Метод комплексных вращений для систем нескольких частиц: теория и приложения к исследованию резонансов и процессов рассеяния.

XII Зимняя школа по теоретической физике

Е. Яревский

Санкт-Петербургский государственный университет

2 февраля 2014

Лекция 1

Резонансы. Математические основы метода комплексных вращений. Обобщения метода.

Лекция 1
Резонансы. Математические основы метода комплексных вращений. Обобщения метода.
Лекция 2
Вычисления резонансов в системах нескольких частиц. Примеры. Связь резонансов и поведения сечения рассеяния. Физический смысл резонансной функции.

Лекция 1
Резонансы. Математические основы метода комплексных вращений. Обобщения метода.
Лекция 2
Вычисления резонансов в системах нескольких частиц. Примеры. Связь резонансов и поведения сечения рассеяния. Физический смысл резонансной функции.
Лекция 3
Использование метода комплексных вращений для решения задачи рассеяния. Особенности применения для короткодействующих, дальнодействующих и кулоновских потенциалов.

Резонансы

Сечение рассеяния $\sim$ квадрат модуля амплитуды рассеяния $f(E)$.
$f(E)$ аналитична в $\mathbf{C}/\sigma(H)$.
Предположим, что $f(E)$ имеет аналитическое продолжение на второй лист, и что на втором листе есть простой полюс в точке $E_r - i\Gamma/2$ вблизи вещественной оси:

$$f(E) = \frac{C}{E - E_r + \frac{1}{2}i\Gamma} + f_b(E).$$

Если Γ мала и $f_b(E_r)$ не слишком велика, то

$$|f(E)|^2 = \frac{|C|^2}{(E - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} + R,$$

R мал в окрестности E_r.

Определения резонансов

- Поведение (пики) амплитуды рассеяния
- Связь с квазиклассическим поведением системы
- Особенности резольвенты на втором листе

Определения резонансов

- Поведение (пики) амплитуды рассеяния
- Связь с квазиклассическим поведением системы
- Особенности резольвенты на втором листе

Определение.
Пусть существует такое плотное множество векторов $D \subset \mathcal{H}$, что для всех $\psi \in D$ обе функции $(\psi, (H - z)^{-1}\psi) = R_\psi(z)$ и $(\psi, (H_0 - z)^{-1}\psi) = R_\psi^{(0)}(z)$ имеют аналитическое продолжение на второй лист. Если $R_\psi^{(0)}(z)$ аналитична в $z_0 = E_r - \frac{1}{2}i\Gamma$, а $R_\psi(z)$ при некотором ψ имеет полюс в z_0, то z_0 называется **резонансным полюсом**, а Γ - **шириной резонанса**.

Метод масштабных преобразований (комплексных вращений)

Группа операторов масштабных преобразований (растяжений) на R^3: группа унитарных операторов $u(\theta)$:

$$(u(\theta)\psi)(r) = e^{3\theta/2}\psi(e^{\theta}r).$$

В одномерном случае

$$(u(\theta)\psi)(r) = e^{\theta/2}\psi(e^{\theta}r).$$

Метод масштабных преобразований (комплексных вращений)

Группа операторов масштабных преобразований (растяжений) на R^3: группа унитарных операторов $u(\theta)$:

$$(u(\theta)\psi)(r) = e^{3\theta/2}\psi(e^{\theta}r).$$

В одномерном случае

$$(u(\theta)\psi)(r) = e^{\theta/2}\psi(e^{\theta}r).$$

Преобразование кинетической энергии $H_0 = -\Delta$:

$$u(\theta)H_0u(\theta)^{-1} = e^{-2\theta}H_0 \equiv H_0(\theta).$$

Таким образом, оператор $u(\theta)H_0u(\theta)^{-1}$ допускает аналитическое продолжение на комплексные θ.
Непрерывный спектр $H_0(\theta)$:

$$\sigma(H_0(\theta)) = \{z : \arg z = -2\Im m\ \theta\}.$$

Метод масштабных преобразований (комплексных вращений)

Группа операторов масштабных преобразований (растяжений) на R^3: группа унитарных операторов $u(\theta)$:

$$(u(\theta)\psi)(r) = e^{3\theta/2}\psi(e^{\theta}r).$$

В одномерном случае

$$(u(\theta)\psi)(r) = e^{\theta/2}\psi(e^{\theta}r).$$

Преобразование кинетической энергии $H_0 = -\Delta$:

$$u(\theta)H_0u(\theta)^{-1} = e^{-2\theta}H_0 \equiv H_0(\theta).$$

Таким образом, оператор $u(\theta)H_0u(\theta)^{-1}$ допускает аналитическое продолжение на комплексные θ.

Непрерывный спектр $H_0(\theta)$:

$$\sigma(H_0(\theta)) = \{z : \arg z = -2\Im m\ \theta\}.$$

Выберем подходящий класс потенциалов, чтобы такое продолжение существовало и для $H = -\Delta + V$.

Потенциалы, аналитические относительно растяжений

Определение. Квадратичная форма V принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$ $(\alpha > 0)$ тогда и только тогда, когда

- V – симметрическая форма, причем $Q(H_0) \subset Q(V)$
- оператор $(H_0 + I)^{-1/2} V (H_0 + I)^{-1/2}$ компактен
- семейство операторов

$$F(\theta) = (H_0 + I)^{-1/2} (u(\theta) V u(\theta)^{-1}) (H_0 + I)^{-1/2},$$

  определенных при $\theta \in R$, имеет продолжение до аналитической ограниченной операторнозначной функции в полосе B_α, где

$$B_\alpha \equiv \{\theta : |\Im m \ \theta| < \alpha\}.$$

Множество $\bigcup_{\alpha > 0} \mathcal{F}_\alpha$ называется **семейством потенциалов, аналитических относительно растяжений.**
В этом определении $u(\theta) V u(\theta)^{-1} \equiv V(\theta)$, где $V(\theta)(\psi, \varphi) = V(u(-\theta)\psi, u(-\theta)\varphi)$

Пример 1.
Пусть $V(r)$ – центральный вещественный потенциал. При вещественном θ, $V(\theta)$ – оператор умножения на функцию $V(e^{\theta}r)$.
Если $V(r)$ обладает аналитическим продолжением $V(z)$ в сектор $\{z : |\arg z| < \alpha\}$, причем для каждого $\beta < \alpha$

$$\lim_{|z|\to\infty, |\arg z|<\beta} V(z) = 0$$

и

$$\sup_{0<|\varphi|<\beta} \int_{|r|,|r'|\le 1} |V(e^{i\varphi}r)||V(e^{i\varphi}r')||r-r'|^{-2} d^3r\, d^3r' < \infty,$$

то V аналитичен относительно растяжений.
В частности:
кулоновский потенциал $V(r) = r^{-1} \in \mathcal{F}_{\infty}$,
потенциал Юкавы $V(r) = e^{-\mu r}/r \in \overline{\mathcal{F}}_{\pi/2}$ при $\mu > 0$.

Пример 1.
Пусть $V(r)$ – центральный вещественный потенциал. При вещественном θ, $V(\theta)$ – оператор умножения на функцию $V(e^{\theta}r)$.
Если $V(r)$ обладает аналитическим продолжением $V(z)$ в сектор $\{z : |\arg z| < \alpha\}$, причем для каждого $\beta < \alpha$

$$\lim_{|z|\to\infty, |\arg z|<\beta} V(z) = 0$$

и

$$\sup_{0<|\varphi|<\beta} \int_{|r|,|r'|\leq 1} |V(e^{i\varphi}r)||V(e^{i\varphi}r')||r-r'|^{-2} d^3r\, d^3r' < \infty,$$

то V аналитичен относительно растяжений.
В частности:
кулоновский потенциал $V(r) = r^{-1} \in \mathcal{F}_{\infty}$,
потенциал Юкавы $V(r) = e^{-\mu r}/r \in \overline{\mathcal{F}}_{\pi/2}$ при $\mu > 0$.

Потенциалы не обязаны быть локальными!
Пример 2. Пусть $\psi \in L^2$ – аналитический вектор генератора группы $u(\theta)$, и $\psi(\theta) = u(\theta)\psi$. Пусть $V = (\psi, \cdot)\psi$. Тогда $V(\theta) = (\psi(\overline{\theta}), \cdot)\psi(\theta)$, и V аналитичен относительно растяжений.

Основная теорема метода комплексных вращений

Теорема. Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L^2(R^3)$, и пусть $V \in \mathcal{F}_\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Пусть $\theta \in B_\alpha$, и $H(\theta) = e^{-2\theta} H_0 + V(\theta)$. Тогда

- $\sigma(H(\theta))$ зависит лишь от $\Im\mathrm{m}\ \theta$,

Основная теорема метода комплексных вращений

Теорема. Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L^2(R^3)$, и пусть $V \in \mathcal{F}_\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Пусть $\theta \in B_\alpha$, и $H(\theta) = e^{-2\theta} H_0 + V(\theta)$. Тогда

- $\sigma(H(\theta))$ зависит лишь от $\Im m\ \theta$,
- $\sigma(H(\theta))$ состоит из $\{e^{-2\theta}\lambda, \lambda \in [0, \infty)\} \bigcup \sigma_d(\theta)$, где каждое $\mu \in \sigma_d(\theta)$ – собственное значение конечной кратности,

Основная теорема метода комплексных вращений

Теорема. Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L^2(R^3)$, и пусть $V \in \mathcal{F}_\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Пусть $\theta \in B_\alpha$, и $H(\theta) = e^{-2\theta} H_0 + V(\theta)$. Тогда

- $\sigma(H(\theta))$ зависит лишь от $\Im m\ \theta$,
- $\sigma(H(\theta))$ состоит из $\{e^{-2\theta}\lambda, \lambda \in [0, \infty)\} \bigcup \sigma_d(\theta)$, где каждое $\mu \in \sigma_d(\theta)$ – собственное значение конечной кратности,
- $\sigma_d(\overline{\theta}) = \overline{\sigma_d(\theta)}$,

Основная теорема метода комплексных вращений

Теорема. Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L^2(R^3)$, и пусть $V \in \mathcal{F}_\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Пусть $\theta \in B_\alpha$, и $H(\theta) = e^{-2\theta} H_0 + V(\theta)$. Тогда

- $\sigma(H(\theta))$ зависит лишь от $\Im\text{m}\ \theta$,
- $\sigma(H(\theta))$ состоит из $\{e^{-2\theta}\lambda, \lambda \in [0, \infty)\} \bigcup \sigma_d(\theta)$, где каждое $\mu \in \sigma_d(\theta)$ – собственное значение конечной кратности,
- $\sigma_d(\overline{\theta}) = \overline{\sigma_d(\theta)}$,
- если $0 < \Im\text{m}\ \theta < \pi/2$, то $\sigma_d(\theta) \subset R \bigcup \{\mu : -2\Im\text{m}\ \theta < \arg \mu < 0\}$ и $R \bigcap \sigma_d(\theta) = \sigma_{pp}(H(0))\ \{0\}$.
Если $\Im\text{m}\ \varphi < \Im\text{m}\ \theta < \pi/2$, то $\sigma_d(\varphi) \subset \sigma_d(\theta)$.
- $\sigma_{sing}(H(0)) = \emptyset$.

Обобщенные варианты комплексных вращений

Возможные названия:

- Analytic distortion
- Analytic dilation
- Complex scaling
- Complex rotation

Обобщенные варианты комплексных вращений

Возможные названия:

- Analytic distortion
- Analytic dilation
- Complex scaling
- Complex rotation

Выберем семейство U_λ унитарных операторов, $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, так что семейство $H(\lambda) = U_\lambda H U_\lambda^{-1}$ допускает естественное аналитическое продолжение.
Пусть $\mathcal{A}$ – пространство функций, такое что:

$$\forall \psi \in \mathcal{A} \quad \lambda \to U_\lambda \psi \text{ аналитично при } |\lambda| < \lambda_0,$$

$$U_\lambda \mathcal{A} \text{ плотно в } L^2 \; \forall \lambda : |\lambda| < \lambda_0.$$

Случай A. (Uniform) complex scaling. Комплексные вращения.
J. Aguilar and J.M. Combes, Comm. Math. Phys. **22**, 269 (1971).
E. Balslev and J.M. Combes, Comm. Math. Phys. **22**, 280 (1971).
Пусть $\lambda = e^{\theta} - 1$. Тогда

$$\theta \to U_0^{\theta} \text{ где } U_0^{\theta} u = e^{n\theta/2} u(e^{\theta} x).$$

В качестве $\mathcal{A}$ можно взять множество голоморфных векторов группы U_0^{θ} для $|\Im\text{m}\ \theta| > \alpha_0$.

Обобщенные варианты комплексных вращений

Случай Б. (Sharp) exterior complex scaling. Внешние комплексные вращения.
B. Simon, Ann. Math. **97**, 247 (1973).
C.A. Nicolaides and D.R. Beck, Phys. Lett. **65A**, 11 (1978).
B. Simon, Phys. Lett. **71A**, 211 (1979).
Обозначим $r = |x|$ и введем функцию

$$f_\theta(r) = \begin{cases} 1 \text{ для} & 0 \le r \le R \\ r^{-1}\left(R + e^{\theta}(r - R)\right), & R \le r < \infty \end{cases}$$

для $R > 0$.
Определим отображение

$$x \to \phi_\theta(x) = x f_\theta(r)$$

$$(U_1^\theta u)(x) = J(\theta)^{1/2} u[\phi_\theta(x)],$$

где $J(\theta)$ – якобиан отображения ϕ_θ
Пусть потенциал $V \in C^\infty(R^n, R)$ и допускает аналитическое продолжение в область D,

$$D = \{x \in C^n,\ |\Re\mathrm{e}\ x| \ge M,\ |\Im\mathrm{m}\ x| \le \varepsilon_0 |\Re\mathrm{e}\ x|\}$$

и выполнено:

$$\lim_{|x|\to\infty,\ x\in D} V(x) = 0.$$

Обобщенные варианты комплексных вращений

Для таких потенциалов и достаточно большого R, можно определить $H_\theta = U_1^\theta H (U_1^\theta)^{-1}$ для вещественных θ и продолжить его затем для $\theta : \Im\mathrm{m} \neq 0$. Здесь область определения H_θ зависит от θ.

Случай Б. (Soft) exterior complex scaling. Гладкие внешние комплексные вращения.
Для ECS имеется сингулярность при $|x| = R$.
Выберем $g(r)$ – C^k-функцию ($k \geq 2$) такую, что

- g – неубывающая и имеет ограниченные производные
- $$\lim_{r \to \infty} g(r)(r - R)^{-1} = 1$$
- $$g(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r \leq R \\ \tilde{g}(r), & r \geq R \end{cases}$$

  где $\tilde{g}$ – сужение на $r > R$ аналитической функции, определенной в секторе S_0, и удовлетворяющей следующему (техническому) условию:

$$|\tilde{g}(z)| \leq [|x - R| + |y|] \left(1 + O(|x - R|^2)\right)$$

$$\text{для } x > R, \; z = (x + iy) \in S_0$$

Пример.

$$\tilde{g}(z) = (z - R)\left(1 - e^{-(z-R)^2}\right).$$

Теперь H_θ – аналитическое семейство на постоянной области определения $H^2(R^n)$.

Три типа комплексных вращений

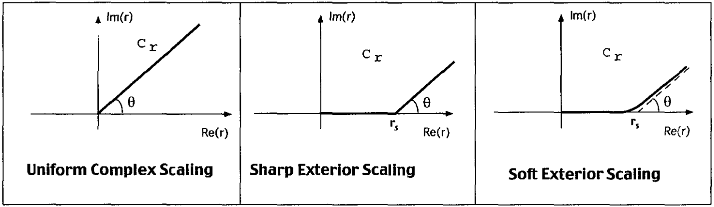

Figure 4: Complex scaling in three different forms : the original Uniform complex scaling of Balslev and Combes. The Exterior complex scaling proposed by Simon and the Smooth exterior complex scaling studied by Helffer are all discussed in the text.