

Уравнения АГС и их применение

Н.В. Шевченко
(ИЯФ Ржеж, Чехия)

Уравнения Альта-Грассбергера-Сандхаса (АГС):

нерелятивистское описание динамики нескольких частиц

Оригинальные работы:

- Фаддеев Л. Д., *ЖЭТФ* **39** (1960) 1459,
- Фаддеев Л. Д., Тр. Матем. ин-та АН СССР, т.1 (1963) 69,
- E.O. Alt, P. Grassberger, and W. Sandhas, *Nucl. Phys. B*2 (1967) 167.

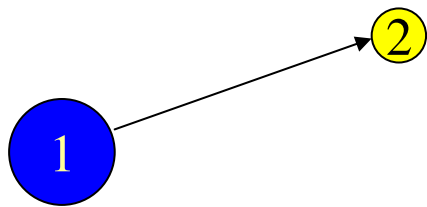
Лекции и книги:

- W. Sandhas, The three-body problem,
Acta Physica Austriaca, Suppl. IX (1972) 57.
- Шмидт Э., Цигельман Х., Проблема трех тел в квантовой механике,
М., Наука, 1979
- Беляев В.Б. Лекции по теории малочастичных систем,
М., Энергоатомиздат, 1986.

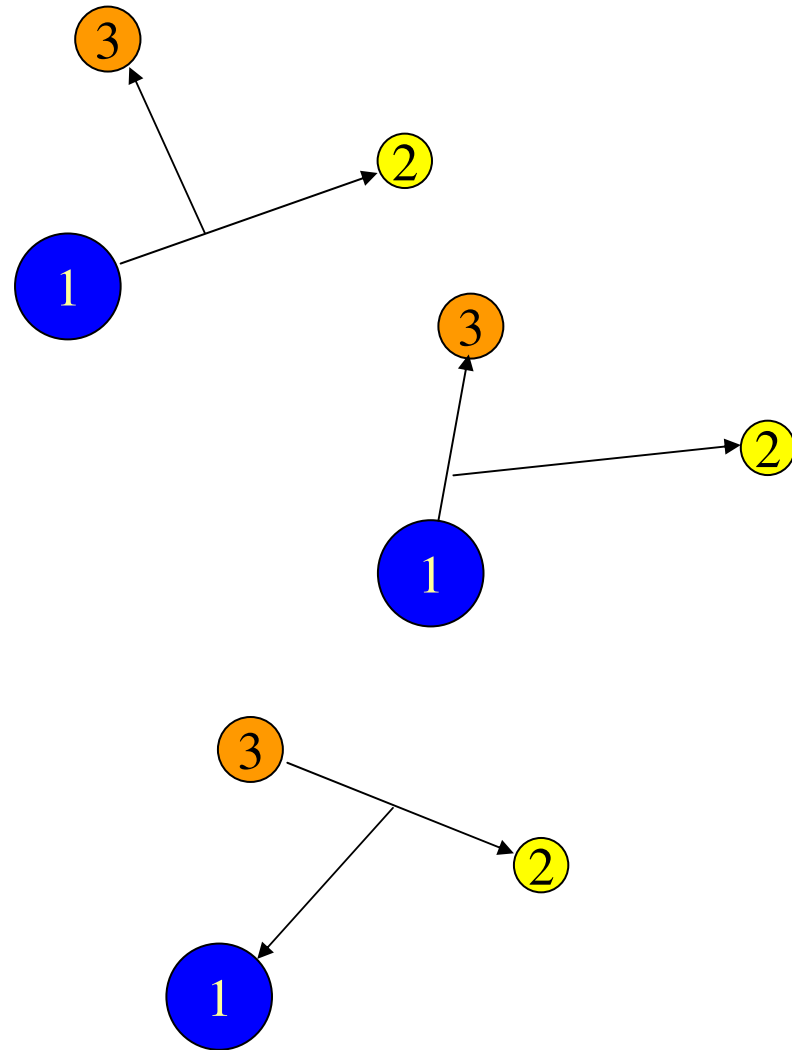
План:

1. Двухчастичное vs трехчастичное рассеяние
2. Уравнения АГС в операторной форме
3. Интегральные уравнения АГС и их особенности
4. Примеры физических задач

2-частичная задача



3-частичная задача



2-частичная задача

Гамильтониан:

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V$$

приведенная масса:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

3-частичная задача

3 возможных разбиения:

$$|\vec{p}_i, \vec{q}_i\rangle = |\vec{p}_i\rangle |\vec{q}_i\rangle$$

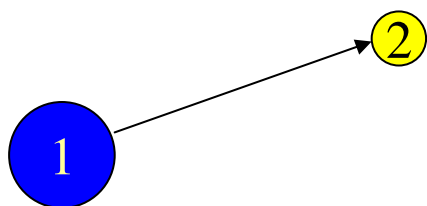
Гамильтониан:

$$H = \frac{p_i^2}{2\mu_i} + \frac{q_i^2}{2M_i} + V_1 + V_2 + V_3$$

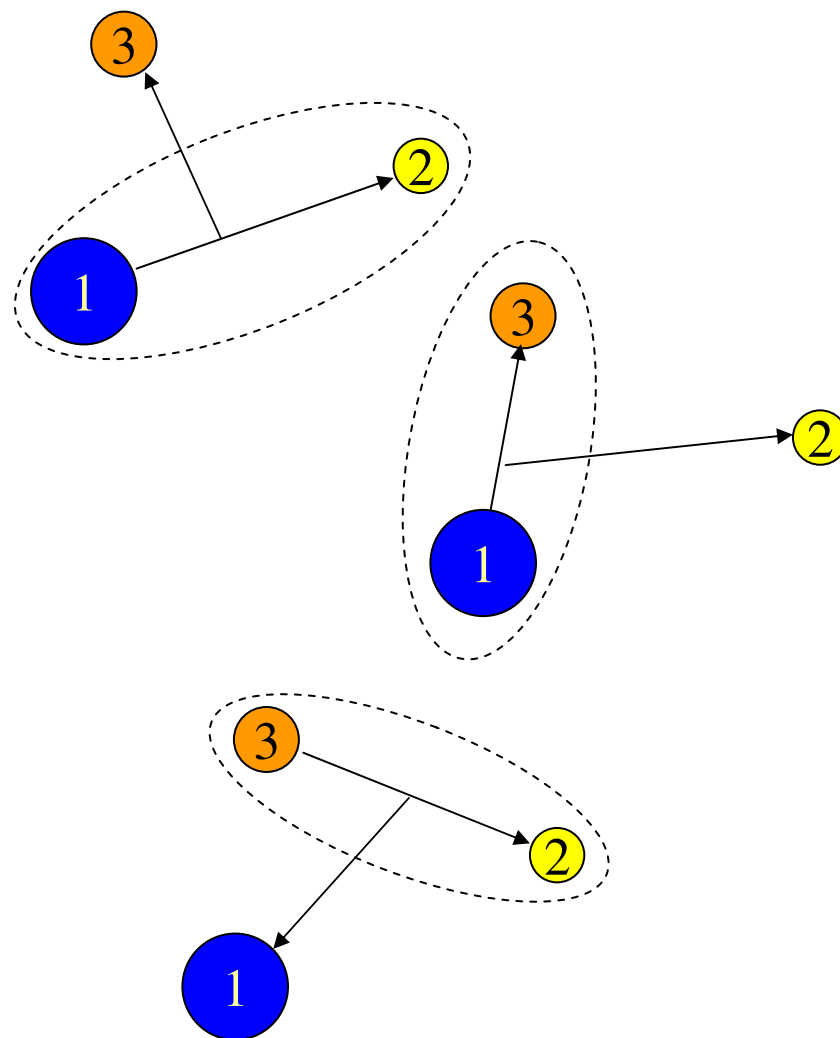
приведенные массы:

$$\mu_i = \frac{m_j m_k}{m_j + m_k}, \quad M_i = \frac{m_i (m_j + m_k)}{m_i + m_j + m_k}$$
$$i \neq j \neq k, \quad i, j = 1, 2, 3$$

2-частичная задача



3-частичная задача



2-частичная задача

Свободный гамильтониан:

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu}, \quad H = H_0 + V$$

$|\vec{p}\rangle$ -его собственное состояние

3-частичная задача

Канальные гамильтонианы:

$$H_i = \frac{p_i^2}{2\mu_i} + \frac{q_i^2}{2M_i} + V_i, \quad H = H_i + \bar{V}_i$$

Аналог плоских волн – канальные состояния:

$$H_i \phi_{in} = E_{in} \phi_{in}$$

$$\phi_{in} = |\psi_{in}\rangle |\vec{q}_i\rangle$$

$|\phi_{in}\rangle$ - 3-частичное собственное состояние

$|\psi_{in}\rangle$ - 2-частичное связанное состояние

$$\text{3-частичная энергия: } E_{in} = \frac{q_i^2}{2M_i} + E_{in}^{(2)}$$

2-частичная задача

Свободный гамильтониан:

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu}, \quad H = H_0 + V$$

$|\vec{p}\rangle$ -его собственное состояние

3-частичная задача

Развальный канал (канал $i = 0$):

$$H_0 = \frac{p_i^2}{2\mu_i} + \frac{q_i^2}{2M_i} \quad (V_0 = 0), \quad H = H_0 + V$$

$|\phi_0\rangle = |\vec{p}_i\rangle |\vec{q}_i\rangle$ -3-частичные
собственные функции

$$\text{3-частичная энергия: } E_0 = \frac{q_i^2}{2M_i} + \frac{p_i^2}{2\mu_i}$$

2-частичная задача

3-частичная задача

Собственные состояния полного гамильтониана

$$\begin{aligned} |\vec{p}^{(\pm)}\rangle &= \Omega^{(\pm)} |\vec{p}\rangle \\ S_{\vec{p}'\vec{p}} &= \langle \vec{p}'^{(-)} | \vec{p}^{(+)} \rangle \end{aligned}$$

$\Omega^{(\pm)}$ - операторы Меллера

$$\begin{aligned} \psi_{i n}^{(\pm)} &= \Omega_i^{(\pm)} \phi_{i n} \\ S_{j m, i n} &= \langle \psi_{j m}^{(-)} | \psi_{i n}^{(+)} \rangle \end{aligned}$$

$\Omega_i^{(\pm)}$ - каналные операторы Меллера

2-частичная задача

Состояния	
рассеяния	связанные
Спектры: разделены	
$E \geq 0$	$E_n < 0$
собственные векторы: ортогональны	
$ \vec{p}^{(\pm)}\rangle$	$ \psi_n\rangle$

3-частичная задача

$$H \psi_{in}^{(\pm)} = E_{in} \psi_{in}^{(\pm)}$$

Полный гамильтониан:
непрерывный спектр энергии
начинается с отрицательного значения

$$E_{in} = \frac{q_i^2}{2M_i} + E_{in}^{(2)} \geq E_{i1}^{(2)}$$

Спектры разных каналов перекрываются!

$$E_{in} = E_{jm}$$

Интегральные уравнения на состояния рассеяния:
(переход к стационарной постановке)

2-частичная задача

3-частичная задача

$$\psi_a^{(+)} = \Omega^{(+)} \phi_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-\infty}^0 dt e^{\varepsilon t} e^{iH t} e^{-iH_0 t} \phi_a$$

$$|\vec{p}^{(+)}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G(E + i\varepsilon) |\vec{p}\rangle$$

$$G(z) = (z - H)^{-1}$$

- функция Грина (резольвента) H

Если ввести свободную функцию Грина:

$$G_0(z) = (z - H_0)^{-1}$$

и учесть

$$G_0^{-1}(z) - G^{-1}(z) = H - H_0 = V \Rightarrow$$

2-частичная задача

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) V G(z)$$

$$G(z) = G_0(z) + G(z) V G_0(z)$$

-второе резольвентное уравнение.

С его помощью получается уравнение Липпманна- Швингера для состояний рассеяния:

$$|\vec{p}^{(+)}\rangle = |\vec{p}\rangle + G_0(E + i\varepsilon) V |\vec{p}^{(+)}\rangle$$

и для связанных состояний:

$$|\psi_n\rangle = G_0(E_n) V |\psi_n\rangle$$

Для обоих уравнений существуют единственные решения

3-частичная задача

Интегральные уравнения на состояния рассеяния:
(переход к стационарной постановке)

2-частичная задача

$$\psi_a^{(+)} = \Omega^{(+)} \phi_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-\infty}^0 dt e^{\varepsilon t} e^{iH t} e^{-iH_0 t} \phi_a$$

$$|\vec{p}^{(+)}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G(E + i\varepsilon) |\vec{p}\rangle$$

$$G(z) = (z - H)^{-1}$$

- функция Грина (резольвента) H

Если ввести свободную функцию Грина:

$$G_0(z) = (z - H_0)^{-1}$$

и учесть

$$G_0^{-1}(z) - G^{-1}(z) = H - H_0 = V \Rightarrow$$

3-частичная задача

$$\psi_{in}^{(+)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G(E_{in} + i\varepsilon) \phi_{in}$$

$$G(z) = (z - H)^{-1}$$

- функция Грина H

Если ввести канальную функцию Грина:

$$G_i(z) = (z - H_i)^{-1}$$

и учесть

$$G_i^{-1}(z) - G^{-1}(z) = \bar{V}_i \Rightarrow$$

2-частичная задача

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) V G(z)$$

$$G(z) = G_0(z) + G(z) V G_0(z)$$

-второе резольвентное уравнение.
С его помощью получается
уравнение Липпманна- Швингера
для состояний рассеяния:

$$|\vec{p}^{(+)}\rangle = |\vec{p}\rangle + G_0(E + i\varepsilon) V |\vec{p}^{(+)}\rangle$$

и для связанных состояний:

$$|\psi_n\rangle = G_0(E_n) V |\psi_n\rangle$$

Для обоих уравнений существуют
единственные решения

3-частичная задача

$$G(z) = G_i(z) + G_i(z) \bar{V}_i G(z)$$

$$G(z) = G_i(z) + G(z) \bar{V}_i G_i(z)$$

При действии им на ϕ_{in}

$$\psi_{in}^{(+)} = \frac{i\varepsilon}{E_{in} + i\varepsilon - H_i} \phi_{in} + G_i(E_{in} + i\varepsilon) \bar{V}_i \psi_{in}^{(+)}$$

$$\Rightarrow \psi_{in}^{(+)} = \phi_{in} + G_i(E_{in} + i\varepsilon) \bar{V}_i \psi_{in}^{(+)}$$

При действии на ϕ_{jm} , имеющее
ту же энергию $E_{jm} = E_{in}$

$$\psi_{jm}^{(+)} = \frac{i\varepsilon}{E_{jm} + i\varepsilon - H_i} \phi_{jm} + G_i(E_{in} + i\varepsilon) \bar{V}_i \psi_{jm}^{(+)}$$

$$\Rightarrow \psi_{jm}^{(+)} = G_i(E_{in} + i\varepsilon) \bar{V}_i \psi_{jm}^{(+)}$$

2-частичная задача

Уравнение Липпманна-Швингера для состояний рассеяния:

$$|\vec{p}^{(+)}\rangle = |\vec{p}\rangle + G_0(E + i\varepsilon) V |\vec{p}^{(+)}\rangle$$

для связанных состояний:

$$|\psi_n\rangle = G_0(E_n) V |\psi_n\rangle$$

Для обоих уравнений существуют единственные решения

(спектры разделены)

3-частичная задача

$$\Rightarrow \psi_{in}^{(+)} = \phi_{in} + G_i(E_{in} + i\varepsilon) \bar{V}_i \psi_{in}^{(+)}$$

$$\Rightarrow \psi_{jm}^{(+)} = G_i(E_{in} + i\varepsilon) \bar{V}_i \psi_{jm}^{(+)}$$

одновременно существуют решения неоднородного (рассеяние в канале i) и однородного (рассеяние в канале j) уравнений –

решение не единственно!

(спектры перекрываются)

3-частичная задача

- Спектры разных каналов перекрываются \Rightarrow
- Уравнения на состояния рассеяния, содержащие отдельные канальные состояния, не имеют единственное решение \Rightarrow
- Необходимо учитывать все каналы одновременно

Интегральные уравнения на операторы перехода:
(переход к стационарной постановке)

2-частичная задача

S -матрица имеет вид:

$$S_{\vec{p}'\vec{p}} = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) - 2\pi i \delta\left(\frac{p'^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2\mu}\right) \langle \vec{p}' | T\left(\frac{p^2}{2\mu} + i\varepsilon\right) | \vec{p} \rangle$$

где T определен через

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) T(z) G_0(z)$$

3-частичная задача

2-частичная задача

Подставляем

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) T(z) G_0(z)$$

во второе резольвентное уравнение

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) V G(z) \Rightarrow$$

$$\boxed{T(z) = V + V G_0(z) T(z)}$$

-уравнение Липпманна-Швингера

3-частичная задача

Интегральные уравнения на операторы перехода:
(переход к стационарной постановке)

2-частичная задача

S-матрица имеет вид:

$$S_{\vec{p}'\vec{p}} = \delta(\vec{p}' - \vec{p}) - 2\pi i \delta\left(\frac{p'^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2\mu}\right) \langle \vec{p}' | T\left(\frac{p^2}{2\mu} + i\varepsilon\right) | \vec{p} \rangle$$

где T определен через

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) T(z) G_0(z)$$

3-частичная задача

$$S_{jm,in}(\vec{q}_j', \vec{q}_i) = \delta_{ij} \delta_{mn} \delta(\vec{q}_j' - \vec{q}_i) - 2\pi i \delta(E_{jm}' - E_{in}) \langle \vec{q}_j' | \langle \psi_{jm} | U_{ji}(E_{in} + i\varepsilon) | \psi_{in} \rangle | \vec{q}_i \rangle$$

$$G(z) = \delta_{ji} G_i(z) + G_j(z) U_{ji}(z) G_i(z)$$

$\Rightarrow U_{ji}(z)$ - оператор перехода,
аналог T -матрицы

2-частичная задача

Подставляем

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) T(z) G_0(z)$$

во второе резольвентное уравнение

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z) V G(z) \Rightarrow$$

$$\boxed{T(z) = V + V G_0(z) T(z)}$$

-уравнение Липпманна-Швингера

3-частичная задача

Подставляем

$$G(z) = \delta_{ji} G_i(z) + G_j(z) U_{ji}(z) G_i(z)$$

в

$$G(z) = G_j(z) + G_j(z) \bar{V}_j G(z) \Rightarrow$$

$$\boxed{U_{ji} = (1 - \delta_{ji}) G_0^{-1} + \sum_{k \neq j} T_k G_0 U_{ki}}$$

-уравнение Альта-Грассбергера-Сандхаса
(связывает все каналы рассеяния)

Для процесса развала ($i \neq 0, j = 0$)

$$U_{0i} = G_0^{-1} + \sum_k T_k G_0 U_{ki}$$

2-частичная задача

Уравнение Липпманна-Швингера

$$T(z) = V + V G_0(z) T(z)$$

$$T(\vec{p}', \vec{p}; z) = \langle \vec{p}' | T(z) | \vec{p} \rangle$$

определен без ограничений на значения импульсов и энергии, тогда как

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 \mu^2 |T(\vec{p}', \vec{p}; E + i\epsilon)|^2,$$

$$p'^2 = p^2 = 2\mu E$$

3-частичная задача

Уравнение Альта-Грассбергера-Сандхаса

$$U_{ji} = (1 - \delta_{ji}) G_0^{-1} + \sum_{k \neq j} T_k G_0 U_{ki}$$

Двухчастичные операторы T_k

$$T_k(z) = V_k + V_k G_0(z) T_k(z),$$

T_k -оператор, действующий в 3-частичном пространстве:

$$\langle \vec{q}'_k, \vec{p}'_k | T_k(z) | \vec{q}_k, \vec{p}_k \rangle =$$

$$\delta(\vec{q}'_k - \vec{q}_k) \langle \vec{p}'_k | T_k^{(2)} \left(z - \frac{q_k^2}{2M_k} \right) | \vec{p}_k \rangle$$

$T_k^{(2)}$ -настоящий 2-частичный оператор

Сепарабельные потенциалы упрощают уравнения АГС

Потенциал вида $V = \lambda |\chi\rangle\langle\chi|$ (одночленный сепарабельный)
соответствует T -матрице

$$T = |\chi\rangle\tau(z)\langle\chi|,$$
$$\tau(z) = \left(\lambda^{-1} - \langle\chi|G_0(z)|\chi\rangle\right)^{-1}$$

В импульсном представлении

$$\langle\vec{p}'|V|\vec{p}\rangle = \lambda \chi(\vec{p}') \chi^*(\vec{p}) \Rightarrow$$

$$\langle\vec{p}'|T(z)|\vec{p}\rangle = \frac{\chi(\vec{p}') \chi^*(\vec{p})}{\lambda^{-1} - \int d\vec{p}'' \frac{|\chi(\vec{p}'')|^2}{z - p''^2 / 2\mu}}$$

Волновая функция связанного состояния: $|\psi\rangle = N G_0(E_B)|\chi\rangle$

Уравнения АГС для сепарабельных потенциалов

Для описания рассеяния $i + (jk) \rightarrow j + (ki)$ необходимо найти

$$\langle \phi_j | U_{ji}(E + i\varepsilon) | \phi_i \rangle = \langle \vec{q}_j' | \langle \psi_j | U_{ji}(E + i\varepsilon) | \psi_i \rangle | \vec{q}_i \rangle =$$

для сепарабельного потенциала:

$$= \langle \vec{q}_j' | \langle \chi_j | G_0(z) U_{ji}(E + i\varepsilon) G_0(z) | \chi_i \rangle | \vec{q}_i \rangle$$

Нужно найти оператор

$$X_{ji}(z) = \langle \chi_j | G_0(z) U_{ji}(E + i\varepsilon) G_0(z) | \chi_i \rangle$$

в импульсном пространстве. Если ввести

$$Z_{ji}(z) = (1 - \delta_{ji}) \langle \chi_j | G_0(z) | \chi_i \rangle,$$

уравнение АГС превращается в

$$X_{ji}(z) = Z_{ji}(z) + \sum_{k=1}^3 Z_{jk}(z) \tau_k \left(z - \frac{q_k^2}{2M_k} \right) X_{ki}(z)$$

Двухчастичный T -оператор в трехчастичном пространстве:

$$\langle \vec{q}'_k, \vec{p}'_k | T_k(z) | \vec{q}_k, \vec{p}_k \rangle = \delta(\vec{q}'_k - \vec{q}_k) \chi(\vec{p}'_k) \langle \vec{p}'_k | \tau_k \left(z - \frac{q_k^2}{2M_k} \right) | \vec{p}_k \rangle \chi^*(\vec{p}_k)$$

Амплитуда рассеяния и дифф. сечение процесса $i + (jk) \rightarrow j + (ki)$:

$$f(\vec{q}'_j, \vec{q}_i; z) = -(2\pi)^2 \sqrt{M_i M_j} \langle \vec{q}'_j | X_{ji}(z) | \vec{q}_i \rangle,$$

$$\frac{d\sigma(\vec{q}'_j, \vec{q}_i; z)}{d\Omega} = \frac{\vec{q}'_j}{\vec{q}_j} |f(\vec{q}'_j, \vec{q}_i; z)|^2$$

Для описания рассеяния из состояния $1+(23)$ нужно решить систему:

$$X_{11}(z) = Z_{12}(z) \tau_2 \left(z - \frac{q_2^2}{2M_2} \right) X_{21}(z) + Z_{13}(z) \tau_3 \left(z - \frac{q_3^2}{2M_3} \right) X_{31}(z)$$

$$X_{21}(z) = Z_{21}(z) + Z_{21}(z) \tau_1 \left(z - \frac{q_1^2}{2M_1} \right) X_{11}(z) + Z_{23}(z) \tau_3 \left(z - \frac{q_3^2}{2M_3} \right) X_{31}(z)$$

$$X_{31}(z) = Z_{31}(z) + Z_{31}(z) \tau_1 \left(z - \frac{q_1^2}{2M_1} \right) X_{11}(z) + Z_{32}(z) \tau_2 \left(z - \frac{q_2^2}{2M_2} \right) X_{21}(z)$$

которая в импульсном представлении после введения промежуточных состояний превращается в систему интегральных уравнений \Rightarrow

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}'_1 | X_{11}(z) | \vec{q}_1 \rangle = & \int d\vec{q}''_2 \langle \vec{q}'_1 | Z_{12}(z) | \vec{q}''_2 \rangle \tau_2 \left(z - \frac{q''_2{}^2}{2M_2} \right) \langle \vec{q}''_2 | X_{21}(z) | \vec{q}_1 \rangle + \\
& + \int d\vec{q}''_3 \langle \vec{q}'_1 | Z_{13}(z) | \vec{q}''_3 \rangle \tau_3 \left(z - \frac{q''_3{}^2}{2M_3} \right) \langle \vec{q}''_3 | X_{31}(z) | \vec{q}_1 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}'_2 | X_{21}(z) | \vec{q}_1 \rangle = & \langle \vec{q}'_2 | Z_{21}(z) | \vec{q}_1 \rangle + \\
& + \int d\vec{q}''_1 \langle \vec{q}'_2 | Z_{21}(z) | \vec{q}''_1 \rangle \tau_1 \left(z - \frac{q''_1{}^2}{2M_1} \right) \langle \vec{q}''_1 | X_{11}(z) | \vec{q}_1 \rangle + \\
& + \int d\vec{q}''_3 \langle \vec{q}'_2 | Z_{23}(z) | \vec{q}''_3 \rangle \tau_3 \left(z - \frac{q''_3{}^2}{2M_3} \right) \langle \vec{q}''_3 | X_{31}(z) | \vec{q}_1 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q}'_3 | X_{31}(z) | \vec{q}_1 \rangle = & \langle \vec{q}'_3 | Z_{31}(z) | \vec{q}_1 \rangle + \\
& + \int d\vec{q}''_1 \langle \vec{q}'_3 | Z_{31}(z) | \vec{q}''_1 \rangle \tau_1 \left(z - \frac{q''_1{}^2}{2M_1} \right) \langle \vec{q}''_1 | X_{11}(z) | \vec{q}_1 \rangle + \\
& + \int d\vec{q}''_2 \langle \vec{q}'_3 | Z_{32}(z) | \vec{q}''_2 \rangle \tau_2 \left(z - \frac{q''_2{}^2}{2M_2} \right) \langle \vec{q}''_2 | X_{21}(z) | \vec{q}_1 \rangle
\end{aligned}$$

Для решения необходимо:

- знать все двухчастичные T -матрицы,

- вычислить матричные элементы операторов

$$\langle \vec{q}'_j | Z_{ji}(z) | \vec{q}''_i \rangle = \langle \vec{q}'_j | \langle \chi_j | G_0(z) | \chi_i \rangle | \vec{q}''_i \rangle$$

- учесть спиновые и изоспиновые (если есть) степени свободы

- провести разложение матричных операторов по парциальным волнам (3-частичный угловой момент складывается из момента пары и 3-ей частицы по отношению к паре; на практике - низшие значения орбитальных моментов)

- в случае наличия тождественных бозонов (нуклонов) провести антисимметризацию

При решении системы начальный импульс и трехчастичная энергия – параметры, решается система одномерных интегральных уравнений

Сингулярности ядер уравнений АГС

Сингулярности 2-частичной T -матрицы

Двухчастичный T -оператор в трехчастичном пространстве:

$$\langle \vec{q}'_k, \vec{p}'_k | T_k(z) | \vec{q}_k, \vec{p}_k \rangle = \delta(\vec{q}'_k - \vec{q}_k) \chi(\vec{p}'_k) \langle \vec{p}'_k | \tau_k \left(z - \frac{q_k^2}{2M_k} \right) | \vec{p}_k \rangle \chi^*(\vec{p}_k)$$

имеет полюс при энергии, равной двухчастичной энергии связи.

$$z - \frac{q_k^2}{2M_k} = E_B^{(2)}$$

Для любого процесса рассеяния $z = \frac{q_k^2}{2M_k} + E_{B,k}^{(2)} \geq E_B^{(2)} \Rightarrow$

полюс в ядре интегральных уравнений присутствует.

Исключение: поиск связанного состояния $z < E_B^{(2)} \Rightarrow$ полюса нет.

Сингулярности Z

При положительной 3-частичной энергии открыт порог 3-частичного развала-

появляются полюсы в $\langle \vec{q}'_j | Z_{ji}(z) | \vec{q}''_i \rangle = \langle \vec{q}'_j | \langle \chi_j | G_0(z) | \chi_i \rangle | \vec{q}''_i \rangle$

$$Z_{ji}(\vec{q}'_j, \vec{q}''_i; z) \sim \frac{m_k}{q'_j q''_i} \left(y_{ji}(q'_j, q''_i; z) + i\varepsilon - \cos \theta \right)^{-1}$$

$$y_{ji}(q'_j, q''_i; z) = \frac{m_k}{q'_j q''_i} \left(z - \frac{q'^2_j}{2\mu_{jk}} - \frac{q''^2_i}{2\mu_{ik}} \right)$$

проекция на парциальные волны:

$$Z_{L,ji}(q'_j, q''_i; z) \sim \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_L(\cos \theta) d(\cos \theta)}{y_{ji}(q'_j, q''_i; z) + i\varepsilon - \cos \theta} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[P \int_{-1}^1 \frac{P_L(\cos \theta) d(\cos \theta)}{y_{ji}(q'_j, q''_i; z) + i\varepsilon - \cos \theta} - i\pi \int_{-1}^1 \delta(y_{ji}(q'_j, q''_i; z) - \cos \theta) P_L(\cos \theta) d(\cos \theta) \right]$$

\Rightarrow в функции $Z_{L,ji}(q'_j, q''_i; z)$

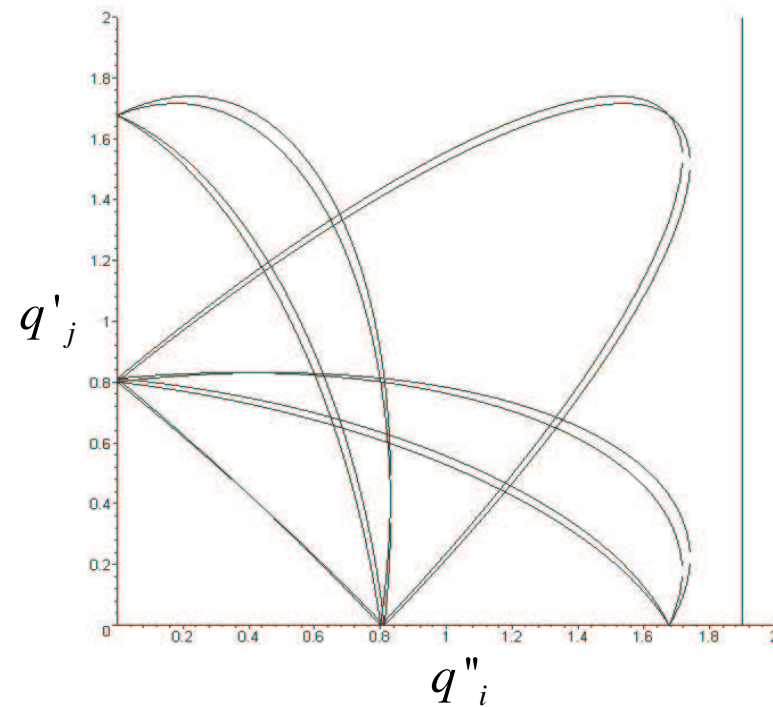
имеется разрез при

$$-1 < y_{ji}(q'_j, q''_i; z) < 1$$

и логарифмические сингулярности

в точках

$$y_{ji}(q'_j, q''_i; z) = \pm 1$$



Сингулярности ядер АГС:

связанные состояния

$$z < E_{B,k}^{(2)}$$

упругое рассеяние под
порогом 3-частичного развала

$$E_{B,k}^{(2)} < z < 0$$

рассеяние над
порогом 3-частичного развала

$$z > 0$$

сингулярностей нет

полюс двухчастичной T -матрицы

полюс двухчастичной T -матрицы +
логарифмические сингулярности

Возможные осложнения:

- неоднородные сепарабельные двухчастичные потенциалы и T -матрицы,
- несепарабельные двухчастичные потенциалы и T -матрицы,
- наличие спиновых, изоспиновых степеней свободы
- учет высших парциальных волн
- связанные (частичные) каналы
- учет 3-частичных сил...

⇒ рост числа уравнений в системе

Уравнения АГС использовались:

- для вычисления параметров связанных состояний и рассеяния в 3- и 4-нуклонных системах (${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$)
- описание ядер с использованием кластерных моделей
- описание молекулярных состояний (не атомных – проблема с кулоновским взаимодействием)
- описание рассеяния мезонов на легчайших ядрах (π , η на d , ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$)
- вычисление параметров квазисвязанного состояния - резонанса в системе $\bar{K}NN - \pi\Sigma N$

Антикаон-ядерные состояния – интересные
экзотические объекты

Существуют ли такие состояния?

Достаточно ли они узкие для экспериментального наблюдения?

K^- pp связанное состояние – легчайшее

Теория: K^- pp связанное состояние существует, очень разные предсказания энергии связи и ширины

(G-матричный расчеты, вариационные расчеты, более грубые приближения...): $E_B \sim (-9) - (-58)$ МэВ, $\Gamma \sim 34 - 100$ МэВ

Эксперимент: указания на существование глубокого связанного состояния (FINUDA: $E_B = -115$ МэВ, $\Gamma = 67$ МэВ; DISTO: $E_B = -103$ МэВ, $\Gamma = 118$ МэВ, OBELIX);

много экспериментов запланировано или в процессе (HADES, LEPS, J-PARK)

3-частичные уравнения АГС для связанных $\bar{K}NN - \pi\Sigma N$ каналов

Каонные атомные и ядерные состояния

– необходимо знать **базовое антикаон-нуклонное** взаимодействие

Существующие $\bar{K}N$ потенциалы:

- Потенциалы, используемые в мало- или многочастичных расчетах (эффективные оптические потенциалы, одноканальная форма):

слишком просты, плохое воспроизведение экспериментальных данных

- Потенциалы “сами по себе” (наиболее популярны “киральные-мотивированные потенциалы”, многоканальные):

невозможно использовать в малочастичных расчетах

Для 3-расчетов были сконструированы потенциалы:

1. воспроизводящие все экспериментальные данные и
2. пригодные для малочастичных расчетов

Существующая информация о $\bar{K}N$ взаимодействии

- Сильно связан с $\pi\Sigma$ каналом через $\Lambda(1405)$ резонанс

$$\text{PDG: } E_{\Lambda} = 1406.5 - i 25.0 \text{ MeV, } I = 0$$

Обычное предположение:

резонанс в $I = 0$ $\pi\Sigma$ и квазисвязанное состояние в $I = 0$ $\bar{K}N$ канале

Альтернативная версия:

$\Lambda(1405)$ - эффект двух близко расположенных полюсов

- Данные по рассеянию:

- Сечения $K^- p \rightarrow K^- p$ и $K^- p \rightarrow MB$ реакций,

- Пороговые отношения γ , R_c , и R_n

- Сильный сдвиг и ширина $1s$ уровня каонного водорода

$$\Delta E_{1s}^{SIDD} = -283 \pm 36 \pm 6 \text{ eV, } \Gamma_{1s}^{SIDD} = 541 \pm 89 \pm 22 \text{ eV}$$

Были построены феноменологические $\bar{K}N - \pi\Sigma$ потенциалы с 1- и 2-польной структурой $\Lambda(1405)$ резонанса и “кирально мотивированный” $\bar{K}N - \pi\Sigma - \pi\Lambda$ потенциал, воспроизводящие:

- Измеренные $1s$ K^-p сдвиг уровня и его ширину
- Сечения $K^-p \rightarrow K^-p$ и $K^-p \rightarrow MB$ реакций,
- Пороговые отношения γ, R_c, R_n (или $R_{\pi\Sigma} = \frac{R_c}{1 - R_n(1 - R_c)}$)

и пригодные для использования в малочастичных расчетах

J. Révai, N.V.S., Phys. Rev. C 79 (2009) 035202,

N.V.S., Phys.Rev. C85 (2012) 034001; Nucl. Phys. A890-891 (2012) 50 (new fits)

Нарушающие изоспин эффекты:

1. Каонный водород: явное включение кулоновского взаимодействия
2. Использование физических масс:

$$m_{K^-}, m_{\bar{K}^0}, m_p, m_n \quad \text{ВМЕСТО} \quad m_{\bar{K}}, m_N$$

Уравнения для связанных $\bar{K}N - \pi\Sigma$ каналов

плюс кулоновское взаимодействие в $K^- p$ подсистеме: $V = V_c + V_s$

Сильная часть полного потенциала сепарабельна

$$V_{s,I}^{\alpha\beta} = |g_I^\alpha\rangle \lambda_I^{\alpha\beta} \langle g_I^\beta|; \quad \alpha, \beta = K \text{ or } \pi; \quad I = 0 \text{ or } 1$$

Форм-факторы:

- 1-полюсной $\Lambda(1405)$:

$$g_{I,1pole}^\alpha(k^\alpha) = \frac{1}{(k^\alpha)^2 + (\beta_1^\alpha)^2} \quad \text{для } \alpha = K \text{ (}\bar{K}N \text{ канал) или } \pi \text{ (}\pi\Sigma \text{ канал)}$$

- 2-полюсной $\Lambda(1405)$:

$$g_{I,1pole}^\alpha(k^\alpha) = \frac{1}{(k^\alpha)^2 + (\beta_1^\alpha)^2} \quad \text{для } \alpha = K \text{ (}\bar{K}N \text{ канал)}$$

$$g_{I,2pole}^\alpha(k^\alpha) = \frac{1}{(k^\alpha)^2 + (\beta_1^\alpha)^2} + \frac{s (\beta_1^\alpha)^2}{[(k^\alpha)^2 + (\beta_1^\alpha)^2]^2} \quad \text{для } \alpha = \pi \text{ (}\pi\Sigma \text{ канал)}.$$

“Кирально-мотивированный” $\overline{KN} - \pi\Sigma - \pi\Lambda$ потенциал, аккуратно воспроизводящий все экспериментальные данные (с двухчастичной структурой $\Lambda(1405)$ резонанса)

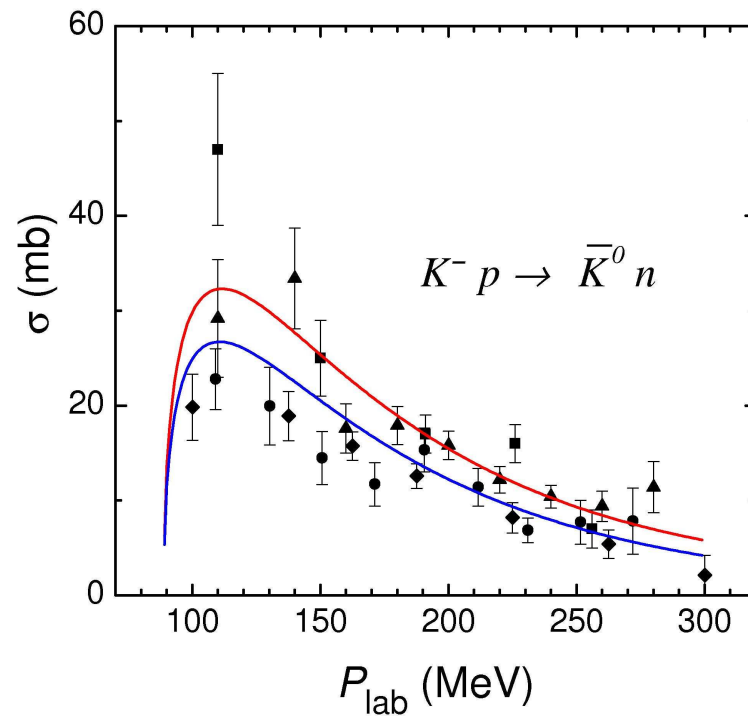
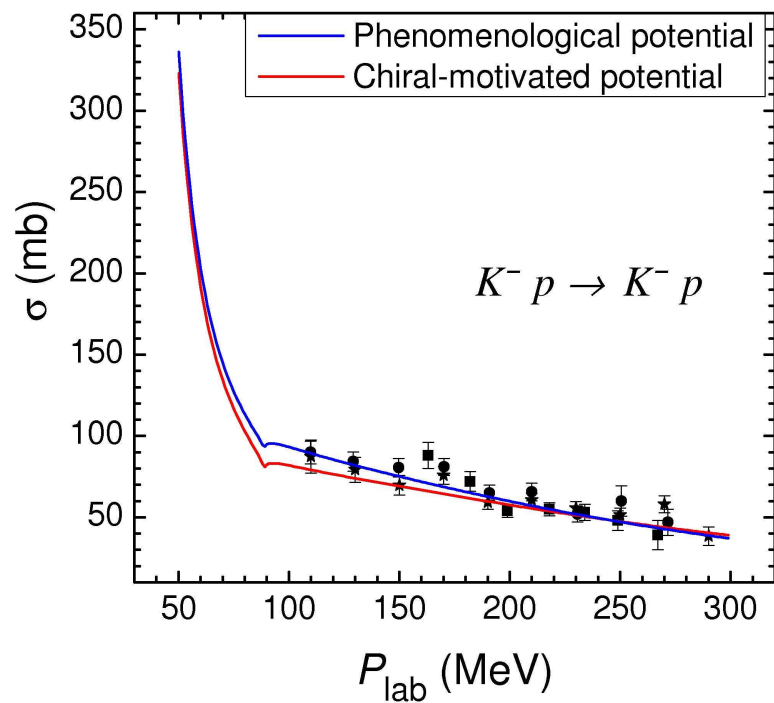
$$V_I^{\alpha\beta}(\vec{k}^\alpha, \vec{k}'^\beta; \sqrt{s}) = \sqrt{\frac{M_\alpha}{2\omega_\alpha E_\alpha}} g_I^\alpha(\vec{k}^\alpha) \frac{C_I^{\alpha\beta}(\sqrt{s})}{(2\pi)^3 f_\alpha f_\beta} \sqrt{\frac{M_\beta}{2\omega_\beta E_\beta}} g_I^\beta(\vec{k}'^\beta),$$

$$g_I^\alpha(k^\alpha) = \frac{(\beta_I^\alpha)^2}{(k^\alpha)^2 + (\beta_I^\alpha)^2}$$

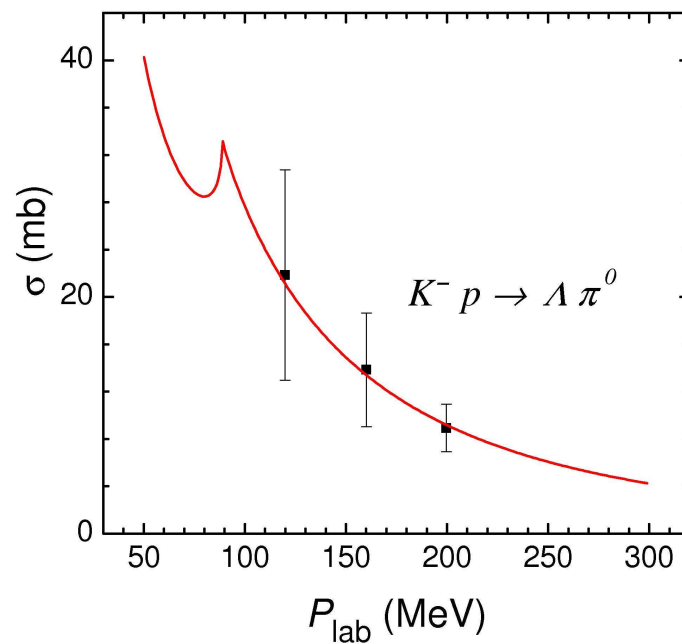
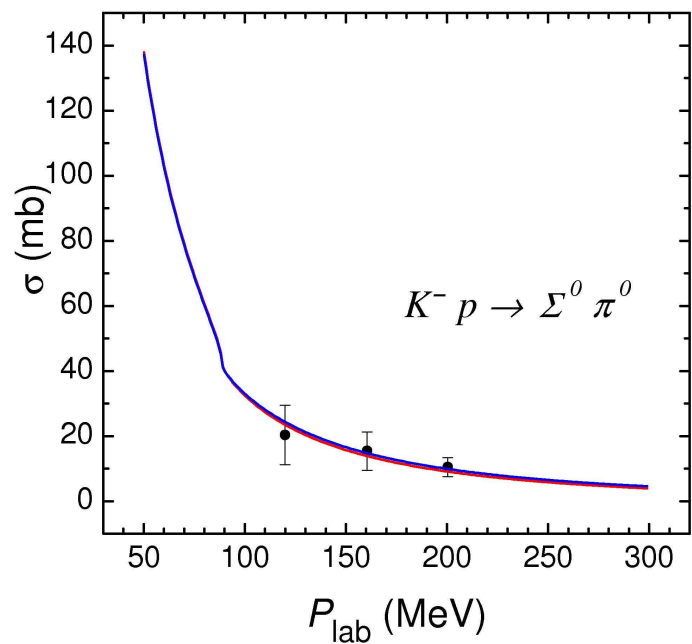
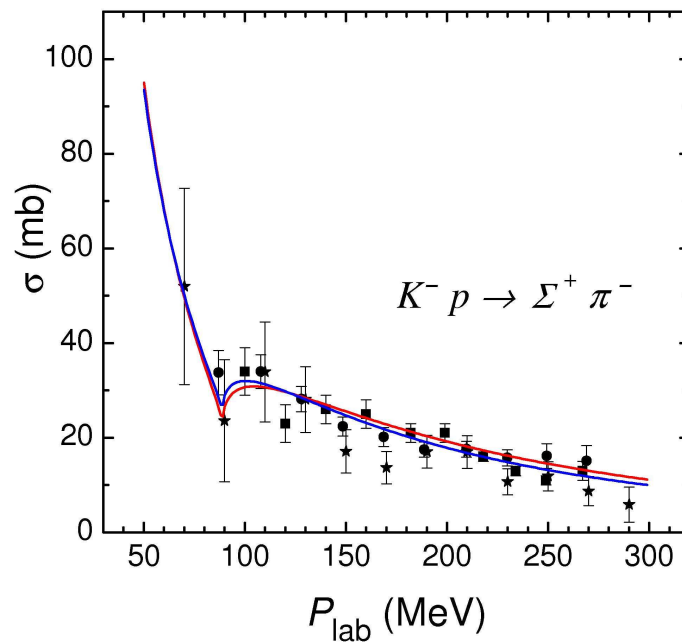
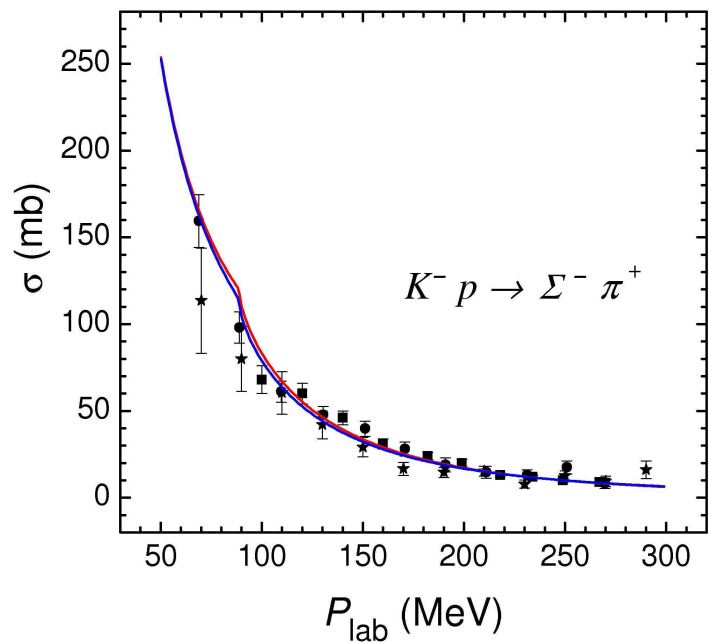
Ведущий порядок - член Вайнберга-Томозавы

$$C_I^{\alpha\beta}(\sqrt{s}) = -C^{WT} (2\sqrt{s} - M_\alpha - M_\beta)$$

Параметры: f_K , f_π и β_I^α

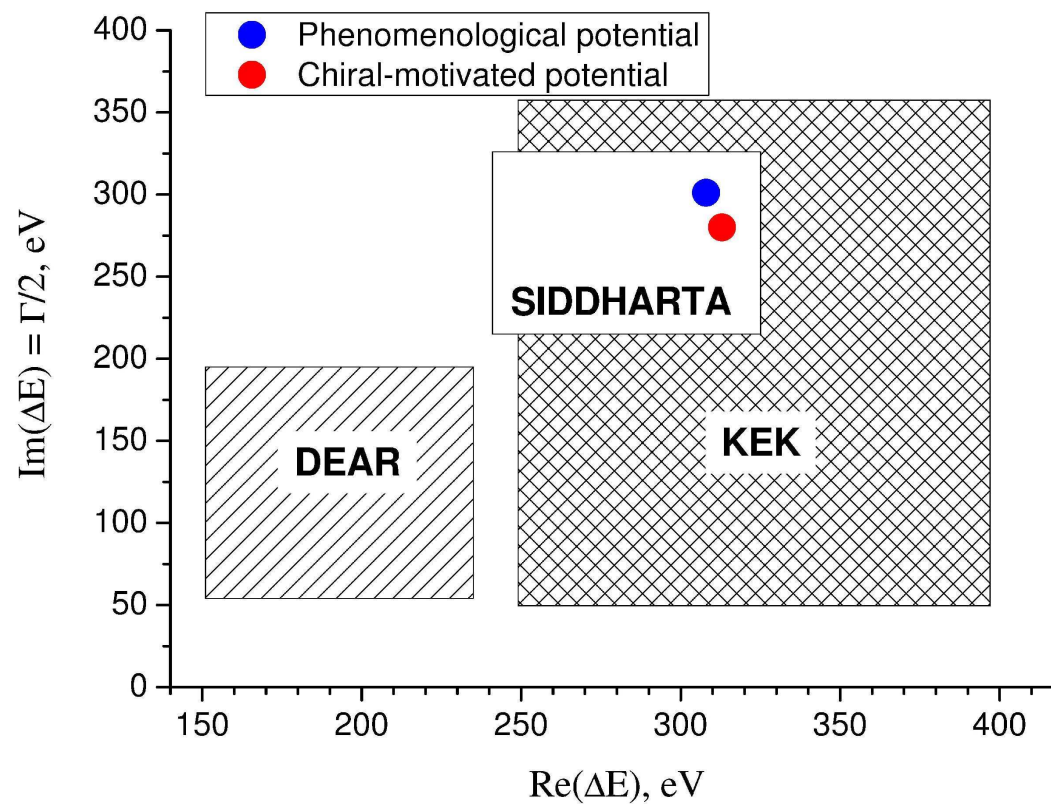


Сравнение с экспериментальными данными по рассеянию



(продолжение)

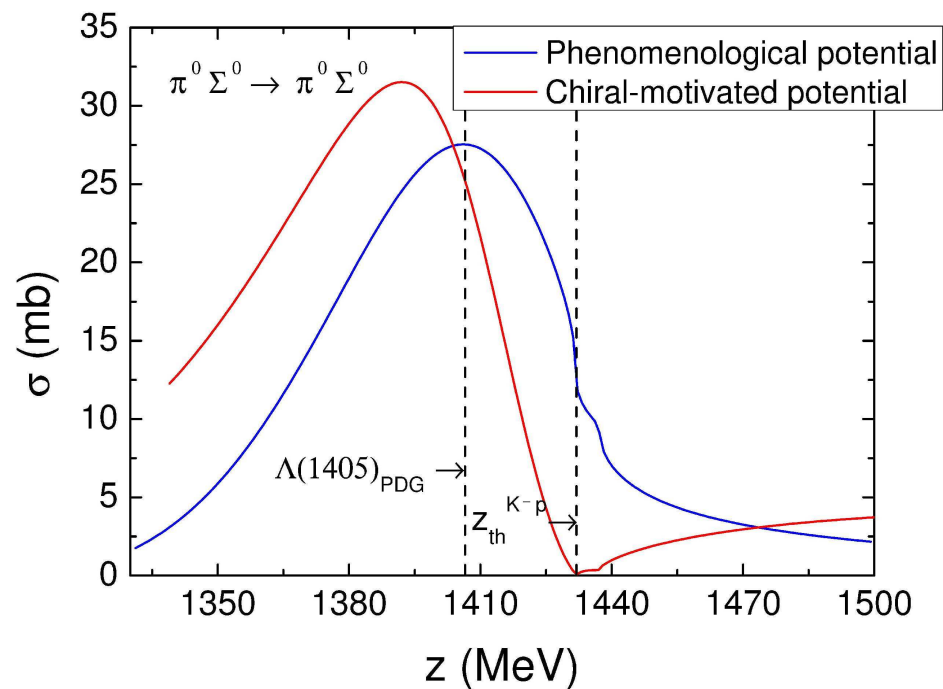
Экспериментальные и теоретические
сдвиг и ширина $1s$ К-р уровня



(Сильные) полюсы

Феноменологический (2-полюсной) $\overline{KN} - \pi\Sigma$	Кирально-мотивированный $\overline{KN} - \pi\Sigma - \pi\Lambda$
1414 – i 58 MeV	1417 – i 33 MeV
1386 – i 104 MeV	1406 – i 89 MeV

Упругие $\pi\Sigma - \pi\Sigma$ сечения



Двухчленный NN (pp) потенциал

P. Doleschall, private communication, 2009

$$V_{pp} = \sum_{i=1}^2 |g_i\rangle \lambda_i \langle g_i| \rightarrow$$

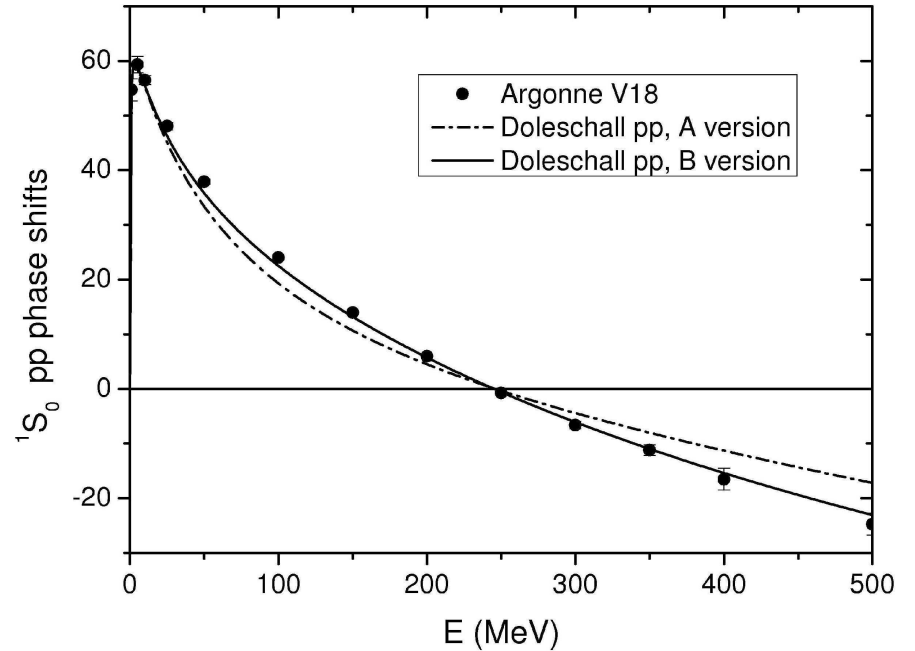
$$T_{pp} = \sum_{i,j=1}^2 |g_i\rangle \tau_{ij} \langle g_j|$$

Воспроизводит:

Argonne V18 NN фазовые сдвиги
(с изменением знака!),

$$a^A(pp) = 16.553 \text{ fm}, \quad r_{eff}^A(pp) = 2.845 \text{ fm}$$

$$a^B(pp) = 16.558 \text{ fm}, \quad r_{eff}^B(pp) = 2.880 \text{ fm}$$



Версия А: $g_i^A(k) = \sum_{m=1}^2 \frac{\gamma_{im}^A}{(\beta_{im}^A)^2 + k^2}, \quad i = 1, 2$

Версия В: $g_1^B(k) = \sum_{m=1}^3 \frac{\gamma_{1m}^B}{(\beta_{1m}^B)^2 + k^2}, \quad g_2^B(k) = \sum_{m=1}^2 \frac{\gamma_{2m}^B}{(\beta_{2m}^B)^2 + k^2}$

$\Sigma N(-\Lambda N)$ взаимодействие

J. Révai, N.V.S., 2009

$T_I^{\Sigma N}(k, k'; z)$ соответствует

$$V_I^{\Sigma N}(k, k') = \lambda_I^{\Sigma N} g_I^{\Sigma N}(k) g_I^{\Sigma N}(k')$$

$$c g_I^{\Sigma N}(k) = \frac{1}{k^2 + (\beta_I^{\Sigma N})^2}$$

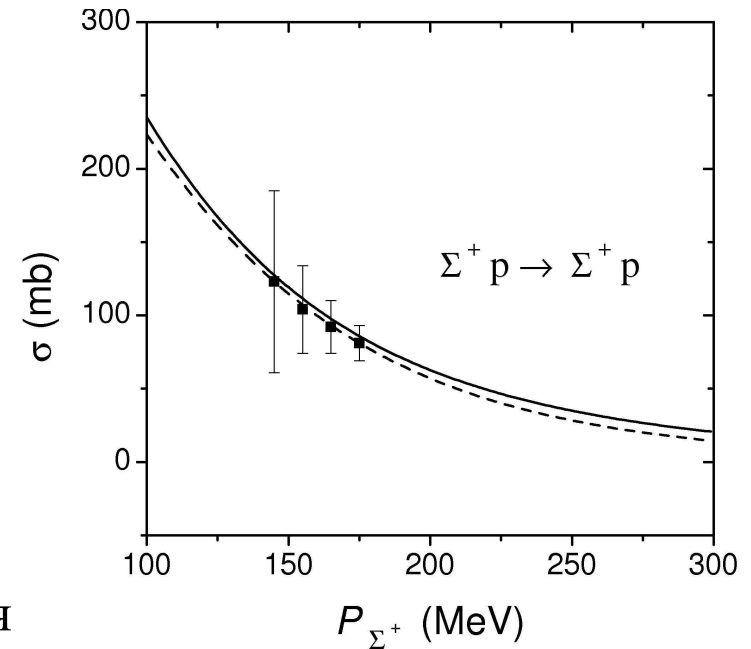
Воспроизводит экспериментальные сечения

$I=3/2$

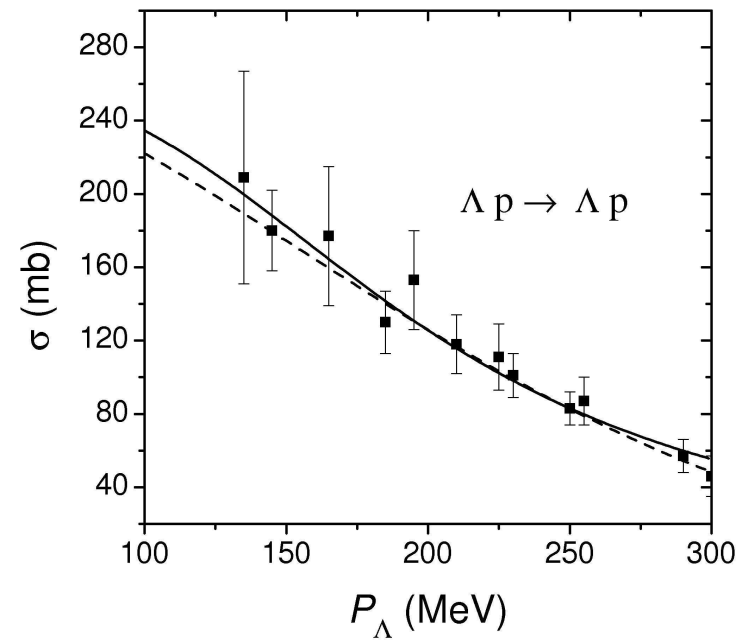
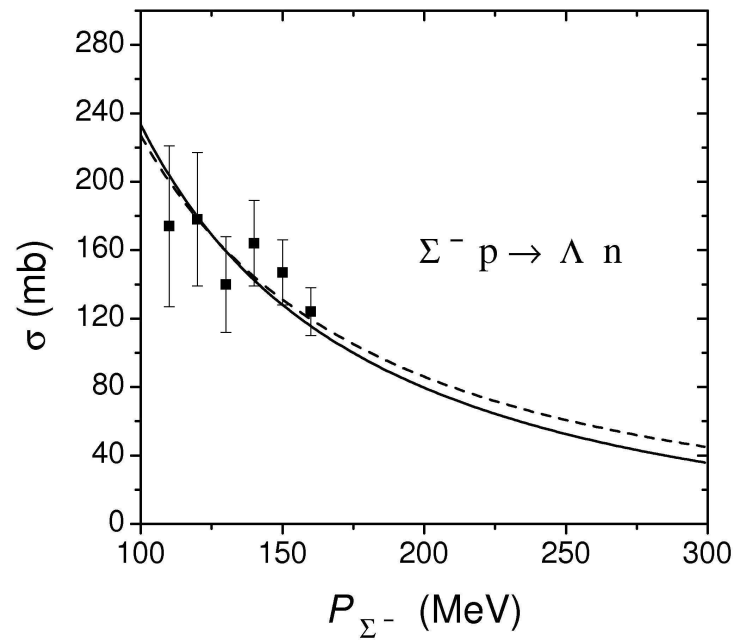
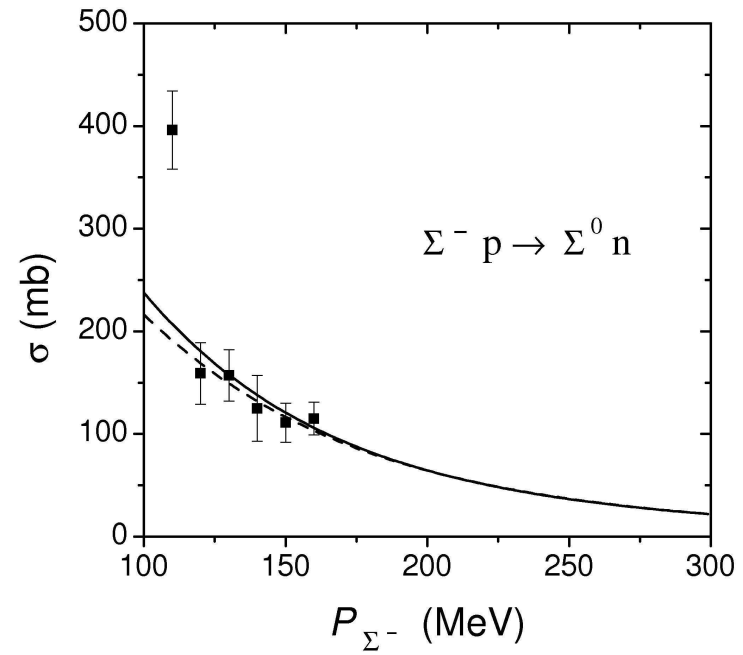
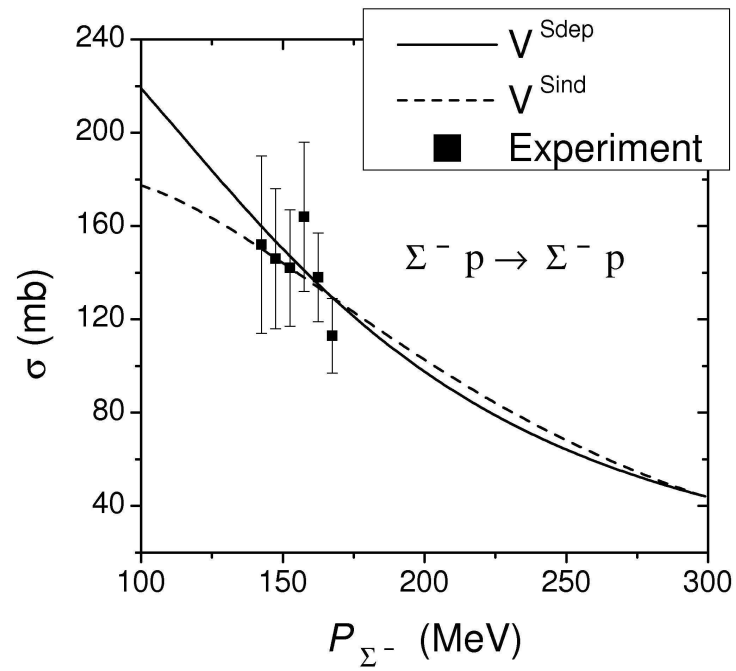
Реальные параметры, одноканальный случай

$I=1/2$

1. Двухканальный $\Sigma N - \Lambda N$ потенциал, реальные параметры
2. Одноканальный ΣN потенциал, комплексные параметры



Чистая $I=3/2$ часть



Трехчастичный расчет со связанными $\bar{K}NN - \pi\Sigma N$ каналами

Уравнения Фаддеева в форме АГС:

$$U_{11} = T_2 G_0 U_{21} + T_3 G_0 U_{31}$$

$$U_{21} = G_0^{-1} + T_1 G_0 U_{11} + T_3 G_0 U_{31}$$

$$U_{31} = G_0^{-1} + T_1 G_0 U_{11} + T_2 G_0 U_{21}$$

определяют неизвестные U_{ij}

$$U_{11} : \quad 1 + (23) \rightarrow 1 + (23)$$

$$U_{21} : \quad 1 + (23) \rightarrow 2 + (31)$$

$$U_{31} : \quad 1 + (23) \rightarrow 3 + (12)$$

$\bar{K}N$ взаимодействие сильно связано с $\pi\Sigma$ через $\Lambda(1405)$ резонанс

$\Rightarrow \pi\Sigma$ канал включен явно. Частичные каналы (α):

$$\alpha = 1 : |\bar{K}_1 N_2 N_3\rangle, \quad \alpha = 2 : |\pi_1 \Sigma_2 N_3\rangle, \quad \alpha = 3 : |\pi_1 N_2 \Sigma_3\rangle$$

i, j - обычные фаддеевские индексы
 α, β - каналные индексы

Двухчастичные T -матрицы, $T_i^{\alpha\beta}$:

$$T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{NN} & 0 & 0 \\ 0 & T_1^{\Sigma N} & 0 \\ 0 & 0 & T_1^{\Sigma N} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} T_2^{KK} & 0 & T_2^{K\pi} \\ 0 & T_2^{\pi N} & 0 \\ T_2^{\pi K} & 0 & T_2^{\pi\pi} \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} T_3^{KK} & T_3^{K\pi} & 0 \\ T_3^{\pi K} & T_3^{\pi\pi} & 0 \\ 0 & 0 & T_3^{\pi N} \end{pmatrix}$$

T^{NN} , $T^{\Sigma N}$ и $T^{\pi N}$ - обычные T -матрицы;

элементы 2-канальной $T^{\bar{K}N-\pi\Sigma}$: $T^{KK} : \bar{K}N \rightarrow \bar{K}N$, $T^{K\pi} : \pi\Sigma \rightarrow \bar{K}N$
 $T^{\pi K} : \bar{K}N \rightarrow \pi\Sigma$, $T^{\pi\pi} : \pi\Sigma \rightarrow \pi\Sigma$

Свободная функция Грина $G_0^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} G_0^\alpha$, операторы перехода $U_{ij}^{\alpha\beta}$

$$U_{ij}^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} (1 - \delta_{ij}) (G_0^\alpha)^{-1} + \sum_{k,\gamma=1}^3 (1 - \delta_{ik}) T_k^{\alpha\gamma} G_0^\gamma U_{kj}^{\gamma\beta}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Сепарабельные взаимодействия :

$$V_{i,I}^{\alpha\beta}(\vec{k}, \vec{k}') = \lambda_{i,I}^{\alpha\beta} g_{i,I}^{\alpha}(\vec{k}) g_{i,I}^{\beta}(\vec{k}') \Rightarrow T_{i,I}^{\alpha\beta}(\vec{k}, \vec{k}'; z^{(2)}) = g_{i,I}^{\alpha}(\vec{k}) \tau_{i,I}^{\alpha\beta}(z^{(2)}) g_{i,I}^{\beta}(\vec{k}')$$

С учетом $U_{ij,I_i I_j}^{\alpha\beta} \equiv \langle g_{i,I_i}^{\alpha} | G_0^{\alpha} U_{ij,I_i I_j}^{\alpha\beta} | \Psi_{j,I_j}^{\beta} \rangle$, $Z_{ij,I_i I_j}^{\alpha} \equiv (1 - \delta_{ij}) \langle g_{i,I_i}^{\alpha} | G_0^{\alpha} | g_{j,I_j}^{\alpha} \rangle$

окончательная система уравнений:

$$X_{ij,I_i I_j}^{\alpha\beta}(\vec{p}_i, \vec{p}_j; z^{(3)}) = \delta_{\alpha\beta} Z_{ij,I_i I_j}^{\alpha}(\vec{p}_i, \vec{p}_j; z^{(3)}) + \\ + \sum_{k,\gamma=1}^3 \sum_{I_k} \int_0^{\infty} Z_{ik,I_i I_k}^{\alpha}(\vec{p}_i, \vec{p}_k''; z^{(3)}) \tau_{k,I_k}^{\alpha\gamma} \left(z^{(3)} - \frac{p_k''^2}{2\mu_k^{\alpha}} \right) X_{kj,I_k I_j}^{\gamma\beta}(\vec{p}_k'', \vec{p}_j; z^{(3)}) d\vec{p}_k''$$

Квантовые числа $\overline{KNN} - \pi\Sigma N$ системы:

спин $S = 0$, орбитальный момент $L = 0$, изоспин $I = 1/2$

Два тождественных нуклона- антисимметризация,

итого: система 10 интегральных уравнений

K^-pp квази-связанное состояние

	B (MeV)	Γ (MeV)
<u>Вариационные расчеты</u>		
Dote,Hyodo,Weise (<i>PRC79,014003,2009</i>)	17 – 23	40 – 70
Barnea,Gal,Liverts (<i>PLB712,132,2012</i>)	15.7	41.2
<u>Фаддеевские расчеты со связанными каналами</u>		
NVS,Gal,Mares,Revai (<i>PRC76,044004,2007</i>)	55.1	100.2
Ikeda,Kamano,Sato (<i>Prog.Theor.Phys124,533,2010</i>) :		
E-indep	44 – 58	34 – 40
E-dep	9 – 16	34 – 46
	67 – 89	244 – 320
Новые результаты (<i>Revai, NVS</i>):		
Феномен. 1-полюсной $\bar{K}N$	53.3	64.8
Феномен. 2-полюсной $\bar{K}N$	47.4	49.8
Кирально-мотивированный $\bar{K}N$	32.2	48.6
	нет второго полюса	