

Зимняя школа, Дубка 2010

1

## План лекций

1. Пикноядерные реакции
2. Виртуальные коэффициенты
3. pp-цикл: примеры 3-частичных реакций
4. Малогазовые системы в среде

# Ядерные реакции (Зельдович Г.Б.)

## а) свободные ядра

Вероятность прохождения кулоновского барьера (гамовский фактор):

$$T = \exp(-2\pi\eta), \quad \eta \equiv \frac{z_1 z_2 e^2}{\hbar v} \text{ - параметр Зоммерфельда}$$

$$\sigma(E) \equiv \frac{S(E)}{E} \exp(-2\pi\eta)$$

$$\psi_c(r, \theta, \varphi) = \frac{\chi_c(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

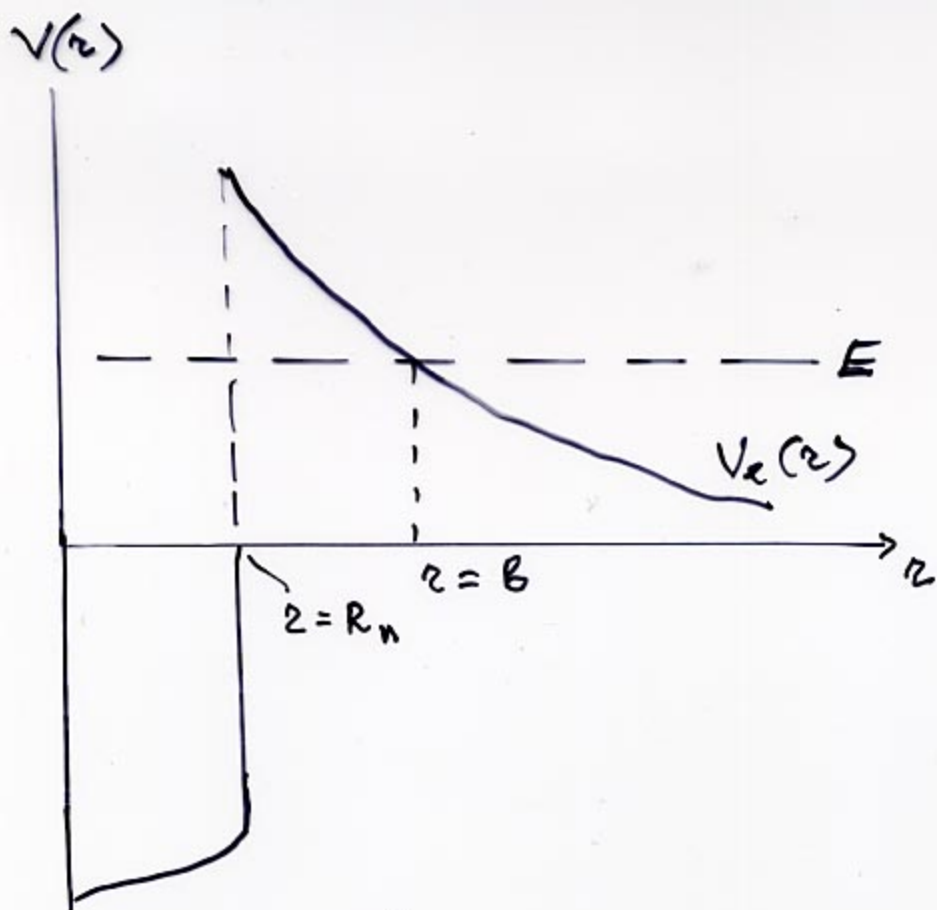
$$\frac{d^2 \chi_c}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V_c(r)] \chi_c = 0 \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$V_c(r) = \frac{l(l+1) \cdot \hbar^2}{2\mu r^2} + V_c(r) \quad r > R_n = R_1 + R_2$$

$$V_c(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$$

## Получение T (WKB)

$$T \equiv \frac{|\chi_{out}|^2 v_{out}}{|\chi_{in}|^2 v_{in}} = \frac{4}{(2\theta + 1/2\theta)^2}$$



$$\Theta = \exp\left(\int_a^b |K(x)| dx\right)$$

$$K(x) = \left(\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\right)^{1/2}$$

then  $\Theta \gg 1$

$$T \approx \frac{1}{\Theta^2}$$

$$a = R_n \rightarrow 0$$

$$E = \frac{z_1 z_2 e^2}{b}$$

T.O.

$$\int_0^b |K(x)| dx = \frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar} \int_0^b \left(\frac{b}{x} - 1\right)^{1/2} dx =$$

$$= \frac{\pi z_1 z_2 e^2}{\hbar} \left(\frac{\mu}{2E}\right)^{1/2} = \pi \eta$$

$T = \exp(-2\pi\eta)$

(WKB)

Точное решение

$$\frac{|\psi_c(0)|^2}{|\psi_c(\infty)|^2} = 2\pi\eta \exp(-2\pi\eta) \quad \eta \gg 1$$

Найдём соотношение между S-фактором и вероятностью ядерной реакции  $P_n$ .

Пусть  $W$  - скорость реакции (= вероятность/сек)

$$W = (\text{прошедший поток при } R_n) \times 4\pi R_n^2 \times P_n$$

$$= (\text{падающий поток}) \times \exp(-2\pi\eta) \cdot 4\pi R_n^2 P_n$$

То определим сечение  $\sigma(E)$

$$W \equiv \sigma(E) \times (\text{падающий поток})$$

$$= \frac{S(E)}{E} \exp(-2\pi\eta) \times (\text{падающий поток})$$

$$S(E) = 4\pi R_n^2 P_n E$$

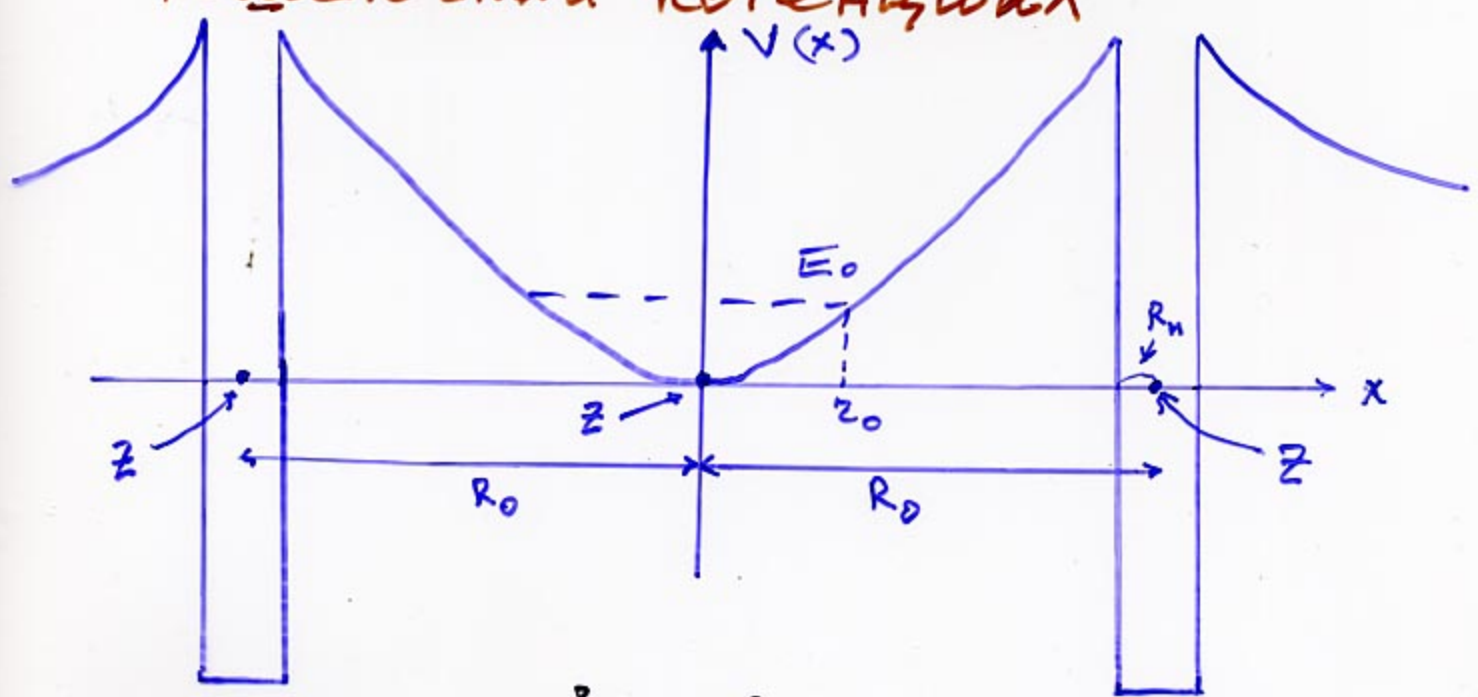
Б) Частицы в кристаллической решетке

Скорость реакции для одной пары ионов:

$$W = (\text{"падающий" поток}) \times \hat{T} \times 4\pi R_n^2 P_n =$$

$$= v |\psi_{in}|^2 \cdot \frac{\hat{T} S(E)}{E}$$

Решеточный потенциал



$$V(x) = \frac{ze^2}{R_0 - x} + \frac{ze^2}{R_0 + x} - \frac{2ze^2}{R_0} \quad |x| < R_0 - R_n$$

$\pi/\mu \quad x \ll R_0$

$$V(x) \rightarrow \frac{1}{2} K x^2, \quad K = \frac{4z^2 e^2}{R_0^3}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 = \frac{ze\hbar}{(\mu R_0^3)^{1/2}}$$

Точка поворота  $r_0$

$$E_0 = V(r_0)$$

т.о.  $r_0 = \left(\frac{\hbar}{2ze}\right)^{1/2} \left(\frac{R_0^3}{\mu}\right)^{1/4}$  (для осцилляторного потенциала)

$$|\psi_{in}|^2 \approx |\psi_{out}|^2 = \frac{e^3}{\pi^{3/2}} e^{-e^2 r^2} \approx \frac{1}{r_0^3 \pi^{3/2}}$$

$$e = \left(\frac{\mu K}{\hbar^2}\right)^{1/4} = \frac{1}{r_0}$$

$\tilde{T}$  найдём в WKB-приближении

$$\tilde{T} \approx \exp\left[-2 \int_a^b |K(x)| dx\right]$$

$$\tilde{T} = \frac{R_0}{z_0} \exp\left(-2 \frac{R_0^2}{z_0^2}\right)$$

$$W = 4 \sqrt{\frac{2}{\pi^3}} S(E) \frac{(z^2 e \mu)^{3/4}}{(\hbar^2 R_0)^{5/4}} \exp\left[-4ze \frac{\sqrt{\mu R_0}}{\hbar}\right]$$

Пусть  $n_A$  - концентрация ионов, тогда число реакций на см<sup>3</sup> в секунду:

$$P_0 = n_A W = \left(\frac{\rho}{A}\right) A^2 z^4 S(E) \gamma \lambda^{5/4} \exp(-\epsilon/\sqrt{\lambda})$$

где

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{2\mu z^2 e^2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{R_0}, \quad \rho = A \mu n_A \text{ (г/см}^3\text{)}$$

$$\gamma = 1.1 \cdot 10^{54}, \quad S \text{ (MeV. barn)}, \quad \epsilon = 2.85$$

Виртуальные коэффициенты  $a_2$  и  $a_3$ .

$$P = \frac{N T \kappa}{V} \left[ 1 + \frac{N}{V} a_2(T) + \frac{N^2}{V^2} a_3(T) + \dots \right]$$

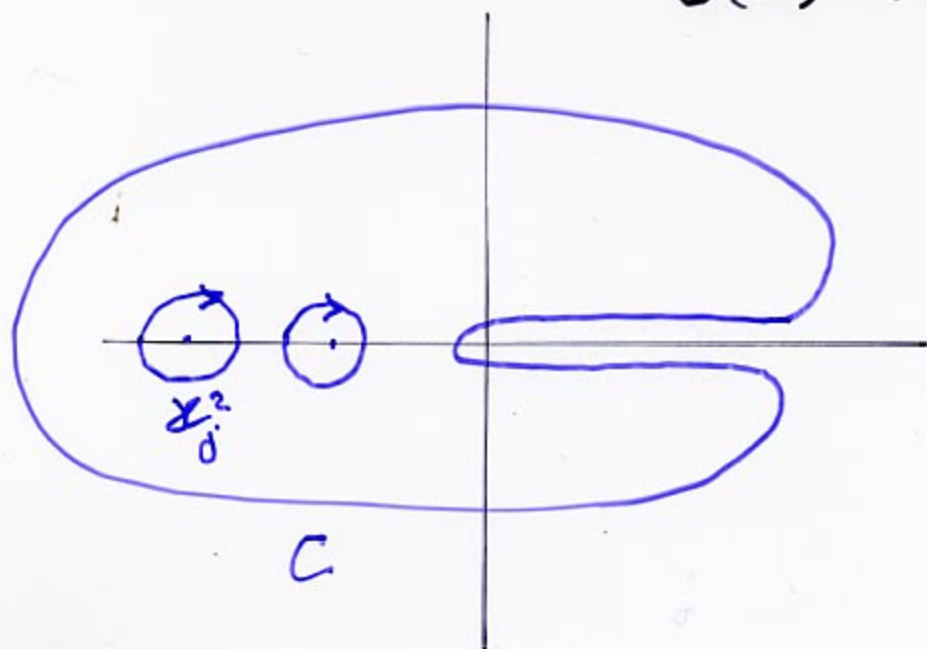
$$a_2(T) = -\sqrt{2} \lambda^3 \text{Sp} [\exp(-\beta h) - \exp(-\beta h_0)]$$

$$\lambda = (2\pi\hbar^2 / \mu kT)^{1/2} \quad h = h_0 + V$$

$$\beta \equiv \frac{1}{kT} \quad \text{Sp} h \equiv \int \langle x | h | x \rangle dx$$

$$\exp(-\beta h) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \exp(-\beta z) G(z) dz$$

$$G(z) = (h - z)^{-1}$$





9

Функция спектрального сдвига  $f(\epsilon)$

$$f(\epsilon) \equiv \text{Sp} [G(\epsilon + i\epsilon) - G_0(\epsilon + i\epsilon)]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} f(\epsilon) = \frac{1}{2i} \frac{d}{d\epsilon} \text{Sp} \ln S(\epsilon) \quad \epsilon > 0$$

$S(\epsilon)$  - s-матрица

$$a_2(T) = -\sqrt{2} \lambda^3 \left\{ \sum_{j=1}^N \exp(\beta x_j^2) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\beta E) \text{Sp} q(E) dE \right\}$$

$$\beta \equiv \frac{1}{kT}, \quad q(E) = -i S^\dagger(E) \frac{d}{dE} S(E)$$

$$\langle \vec{p} | S(E) | \vec{p}' \rangle = \frac{\delta(E - E')}{p \mu} \langle \vec{p} | S(E) | \vec{p}' \rangle$$

$$\text{Sp} q(E) = 2 \sum_l (2l+1) \frac{d\delta_l(E)}{dE}$$

$\hat{q}$  - оператор "временной задержки"

$$\Delta t_e = \lim_{R \rightarrow \infty} \int^R \left[ \psi_e^*(r) \psi_e(r) - \frac{2}{4\pi v r^2} \right] d\vec{r} =$$

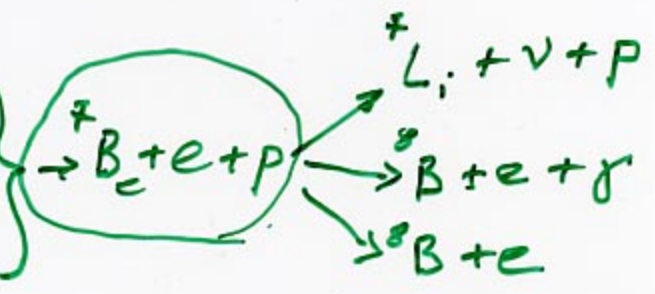
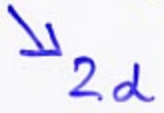
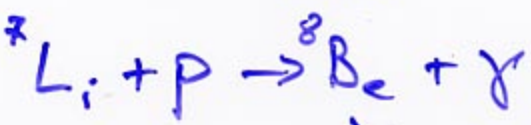
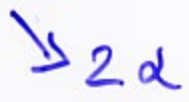
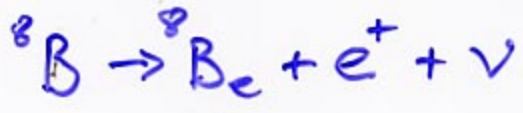
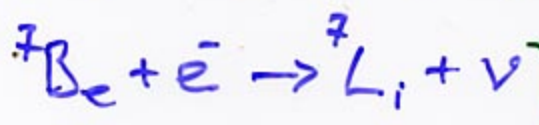
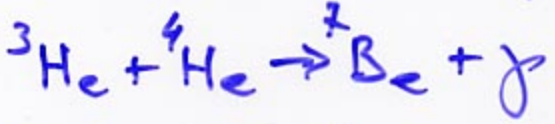
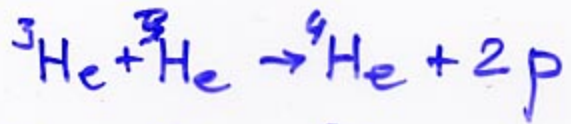
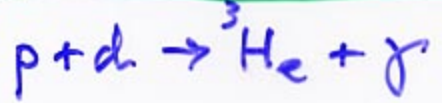
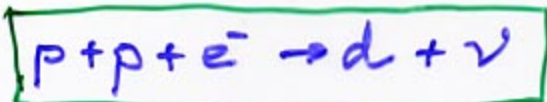
$$= -S_e(E) \frac{dS_e(E)}{dE} = 2(2E + \sqrt{E}) \frac{dS_e(E)}{dE} \equiv \rho_e(E)$$

$$b_3(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\beta E} \left\{ \text{Sp} \left[ \left( S^*(E) \frac{dS(E)}{dE} \right) - A(E) \right] - \text{Sp} \tilde{A}(E) \right\} dE$$

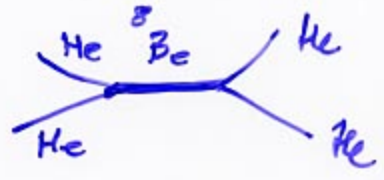
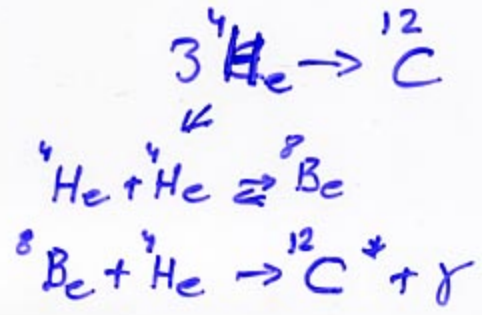
Буслаев + Меркурьев

pp-цикл: примеры 3<sup>x</sup>-частичных реакций

Реакции pp-цикла ( $4p \rightarrow {}^4\text{He} + \text{Q}$ )



J. Phys. B 37 (2004) 1369  
PRC 75 (2007) 034608



3 заряженных частицы в контакте

Полный гамильтониан

$$H = -\Delta_{\vec{x}_1} - \Delta_{\vec{y}_1} + \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \frac{n_3}{x_3}$$

$$n_i = z_j e_j z_k e_k \sqrt{z_{jk}}$$



$$\vec{x}_i = \sqrt{2 \frac{m_j m_k}{m_j + m_k}} (\vec{z}_j - \vec{z}_k)$$

$$\vec{y}_i = \sqrt{2 \frac{m_i (m_j + m_k)}{m_i + m_j + m_k}} \left( \vec{z}_i - \frac{m_j \vec{z}_j + m_k \vec{z}_k}{m_j + m_k} \right)$$

Вспомогательный 2-н

$$\mathcal{H}_{x_1} = -\Delta_{\vec{x}_1} - \Delta_{\vec{y}_1} + \frac{n_1}{x_1} \quad (\text{или } n_1 > 0)$$

Собственные функции  $\mathcal{H}_{x_1}$

$$\Psi = \psi_{\vec{k}_1}^c(\vec{x}_1) \psi_{\vec{p}_1}^o(\vec{y}_1) = \psi_{c_0}(\vec{X}, \vec{P})$$

$$\psi_{\vec{p}_1}^o(\vec{y}_1) = (2\pi)^{-3/2} \exp(\vec{p}_1 \vec{y}_1)$$

$$\psi_{\vec{k}_1}^c(\vec{x}_1) = (2\pi)^{-3/2} \exp(\vec{k}_1 \vec{x}_1) \exp(-\pi y_1 / 2) \times$$

$$y_1 \equiv \frac{n_1}{2k_1}, \quad z_1 \equiv x_1 - (\vec{x}_1, \vec{k}_1)$$

$$\Gamma(1+i\gamma_1) \Phi(-i\gamma_1, 1, i\kappa_1 z_1)$$

$$\vec{x}_i = c_{ij} \vec{x}_j + s_{ij} \vec{y}_j$$

$$\vec{y}_i = -s_{ij} \vec{x}_j + c_{ij} \vec{y}_j$$

$$c_{ij} = -\sqrt{\frac{m_i m_j}{(m_i + m_k)(m_j + m_k)}}$$

$$s_{ij} = \varepsilon_{ijk} \sqrt{1 - c_{ij}^2} \quad , \quad \varepsilon_{123} = 1$$

$$\langle \Psi_{c_0}(\vec{p}) | H | \Psi_{c_0}(\vec{p}') \rangle =$$

$$= (k_1^2 + p_1^2) \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) +$$

$$W_2(\vec{p}_1, \vec{p}'_1) + W_3(\vec{p}_2, \vec{p}'_2)$$

$$W_j(\vec{p}, \vec{p}') = s_{j1}^{-1} v_j^c(s_{j1}^{-1}(\vec{p} - \vec{p}')) \mathcal{L}_j(\vec{p}, \vec{p}')$$

$$v_j^c(\vec{q}) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{n_j}{|\vec{q}|^2}$$

$$\mathcal{L}_j(\vec{P}, \vec{P}') = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int d\vec{x}_1 e^{i\vec{E}_j(\vec{x}_1, (\vec{P}-\vec{P}')) - \lambda|\vec{x}_1|} \psi_{\vec{k}_1}^{c+}(\vec{x}_1) \psi_{\vec{k}_1}^c(\vec{x}_1)$$

$$\boxed{\vec{E}_j = c_j \hat{1} / s_j \hat{1}}$$

Для системы (ppe)  $\vec{E}_3 = -\vec{E}_2$  и

$$\boxed{\vec{E}_2 = \sqrt{\frac{m_e}{2m_p}} (1 + O(m_e/m_p))}$$

$$\mathcal{L}_j(\vec{P}, \vec{P}') = \delta(\vec{k} - \vec{k}') + \frac{i\vec{E}_j}{1!} \mathcal{L}^{(1)}(\vec{P}, \vec{P}') + \frac{(i\vec{E}_j)^2}{2!} \mathcal{L}^{(2)}(\vec{P}, \vec{P}') + \dots$$

$$W_2(\vec{P}, \vec{P}') + W_3(\vec{P}, \vec{P}') = \psi_{\text{eff}}^c(\vec{P}_1, \vec{P}_1') \left\{ \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_1') - \frac{\vec{E}^2}{2!} \mathcal{L}^{(2)} + \frac{\vec{E}^4}{4!} \mathcal{L}^{(4)} + \dots \right\}$$

$\vec{E} \equiv |\vec{E}_2|$

$$\boxed{\psi_{\text{eff}}^c(\vec{P}_1, \vec{P}_1') = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{\eta_{\text{eff}}}{|\vec{P}_1 - \vec{P}_1'|}}$$

$$\eta_{\text{eff}} = -2e^2 \sqrt{\frac{4m_e m_p}{m_e + 2m_p}} \approx -2e^2 \sqrt{2m_e}$$

$$\Psi = \Psi_0 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \varepsilon^4 \Psi_4 + \dots$$

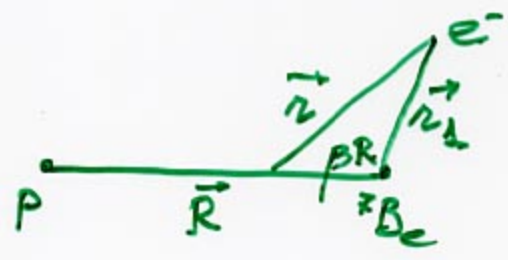
$$(H_0 + V_{eff}^c) \Psi_0 = E \Psi_0$$

$$H_0 = (\kappa_i^2 + p_i^2) \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$V_{eff}^c = V_{eff}^c(p_i, p_i') \delta(\vec{\kappa}_i - \vec{\kappa}_i')$$

$$\Psi_0 = \Psi_{\vec{\kappa}_i}^{\dagger}(\vec{\kappa}_i) \Psi_{\vec{p}_i}^{ce}(\vec{p}_i)$$

Система  $p \ll v_e$



$$\Psi_0(\vec{z}, \vec{R}) = \Psi^c(\vec{R}) \Psi^c(\vec{z}, z = z_1 + z_2)$$

В бинарных реакциях:

$$\Psi(\vec{z}_1, \vec{R}) = \Psi^c(\vec{R}) \Psi^c(\vec{z}_1, z = z_2)$$

$$\zeta(R, T) = \frac{\int_0^{\infty} |\Psi_E^c(pR, z=5)|^2 e^{-E/kT} dE}{\int_0^{\infty} |\Psi_E^c(z_1=0, z=4)|^2 e^{-E/kT} dE}$$

$$\langle \xi(R_0, T) \rangle \equiv N \int e^{-\frac{(R-R_0)^2}{R_0^2}} \xi(R, T) d\vec{R}$$

Для стандартной модели Солнца  
SSM BP2009 (J. Bahcall)

$$W_e^{\max} \text{ при } R_e/R_\odot = 0.06$$

$$R_s/R_\odot = 0.06$$

$$kT(\text{keV}) = 1.161$$

$$\rho_p (\text{g/cm}^3) = 18.9$$

$$R_\odot: 10^4(\text{km}) = 3.250$$

$\langle \xi(R_0, T) \rangle = 0.0696$



# Многочастичные системы в среде.

Уравнения АГС (Альт, Зрассбергер, Самухас)  
(в нулевой)

$$U_{\beta\alpha}(z) = (1 - \delta_{\alpha\beta}) G_0^{-1}(z) + \sum_{\gamma=1}^3 (1 - \delta_{\alpha\gamma}) T_{\gamma}(z) G_0(z) U_{\gamma\alpha}$$

$$\langle \vec{q}_{\beta}, \vec{p}_{\beta} | T_{\gamma} | \vec{q}_{\alpha}, \vec{p}_{\alpha} \rangle = \delta(\vec{q}_{\beta} - \vec{q}_{\alpha}) \langle \vec{p}_{\beta} | T_{\gamma}(z_{\gamma}) | \vec{p}_{\alpha} \rangle$$

$$z_{\gamma} = z - \frac{3}{4} \frac{q_{\gamma}^2}{m}$$

Анализ для парного потенциала

$$V_2 = |g_2\rangle \lambda_2 \langle g_2|$$

↓

$$T_2(z) = |g_2\rangle \epsilon_2(z) \langle g_2|$$

$$\epsilon_2(z) = [\lambda_2^{-1} - \langle g_2 | G_0(z) | g_2 \rangle]^{-1}$$

$\langle g_{\beta n} | G_0(z) (A \Gamma C) | G_0(z) | g_{\alpha m} \rangle \rightarrow$   
система одномерных ур-й

$$X_{\beta n, \alpha m}(z) = Z_{\beta n, \alpha m}(z) + \sum_{\gamma r} Z_{\beta n, \gamma r} \epsilon_{\gamma r}(z) X_{\gamma r, \alpha m}(z)$$

$$X_{\beta n, \alpha m} \equiv \langle g_{\beta n} | G_0(z) U_{\beta \alpha} G_0(z) | g_{\alpha m} \rangle$$

$$Z_{\beta n, \alpha m} \equiv \langle g_{\beta n} | (1 - \delta_{\beta \alpha}) G_0(z) | g_{\alpha m} \rangle$$

A Γ C в среде  $(n+d \rightarrow 2n+p \rightarrow n+d)$  Beyers Röpke Sedrakian

$$m \rightarrow m^+ \text{ - (поправка к энергии)}$$
  
$$g_{\alpha m} \rightarrow g_{\alpha m}^+ = \langle Q_{\alpha} \rangle^{1/2} g_{\alpha m} \text{ - (учёт притяжения)}$$
  

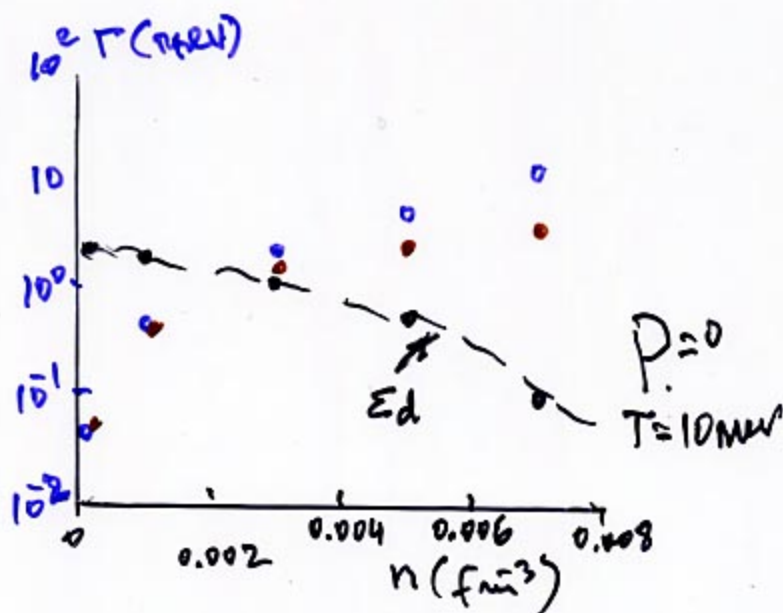
Паули

$$\langle Q(\vec{p}, \vec{q}) \rangle = 2\pi \int dx [1 - f(E_{\vec{q}/2 + \vec{p}}) - f(E_{\vec{q}/2 - \vec{p}})]$$
  
$$x = (\vec{p} \vec{q}) / pq$$
  
$$f(\epsilon) = \left\{ 1 + e^{(\epsilon - \mu) / kT} \right\}^{-1}$$
  
$$E_q = \frac{q^2}{2m^*(s, T)}$$

$$U_{\alpha\beta}^* = (1 - \delta_{\alpha\beta})(R^0)^{-1} + \sum_{\gamma \neq \alpha} T_{\gamma}^* R^0 U_{\gamma\beta}^*$$

$$R^0 = \frac{1}{2\mu - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3}, \quad \epsilon_i = \frac{k_i^2}{2m_i} + \sum^{HF} (i) \approx \frac{k_i^2}{2m_i^*(T, \rho)}$$

$$T_{\gamma} = \tilde{V}_{\gamma} + R^0 \tilde{V}_{\gamma} T_{\gamma}$$



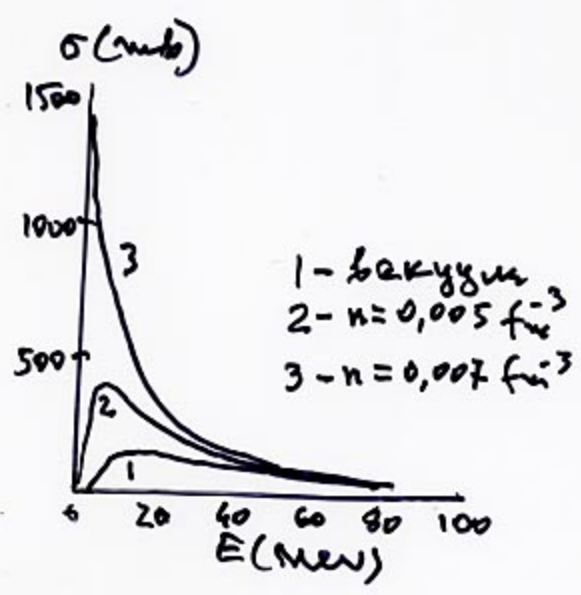
# Результаты

## 1. Среднее процесса

$$n+d \rightarrow 2n+p$$

а) Порог сдвигается к низким энергиям с ростом плотности яд. мат.  
( $E_d(n) \rightarrow 0$  с ростом  $n$ )

б) При фикс.  $T$  среднее растёт с ростом плотности.



Трүтөрк б сүдө

$$|\psi_\epsilon\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\epsilon G_3(E_\epsilon + i\epsilon) |\psi_\epsilon\rangle$$

$$G_3(z) = G_3^0(z) + G_3^0(z) V_3 G_3(z)$$

$$|\psi_\epsilon\rangle = G_3^0(E_\epsilon) V_3 |\psi_\epsilon\rangle$$

$$|\psi^{(\alpha)}\rangle = G_3^0 V_3^{(\alpha)} |\psi_\epsilon\rangle, \quad G_3^{(\delta)}(z) = G_3^{(0)}(z) +$$

$$|\psi_\epsilon\rangle = \sum_{\alpha} |\psi^{(\alpha)}\rangle \quad + G_3^{(0)}(z) V_3^{(\delta)} G_3^{(\delta)}(z)$$

$$|\psi_\epsilon\rangle = G_3^{(\alpha)}(E_\epsilon) \bar{V}^{(\alpha)} |\psi_\epsilon\rangle$$

$$\bar{V}^{(\alpha)} \equiv V_3 - V_3^{(\alpha)}$$

$$|F^{(\alpha)}\rangle \equiv \bar{V}_3^{(\alpha)} |\psi_\epsilon\rangle$$

$$|F^{(\alpha)}\rangle = \sum_{\beta} (1 - \delta_{\alpha\beta}) T_3^{(\beta)} G_3^0 |F^{(\beta)}\rangle$$

