Интегральные и дифференциальные уравнения для компонент системы N тел

Яковлев С. Л.

Физический факультет, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, Россия, 198504

1 Оператор энергии системы N частиц, цепочки разбиений, относительные координаты

Рассматривается система N попарно взаимодействующих частиц. Оператор энергии имеет вид [1]

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\Delta_{\mathbf{r}_i} + \sum_{1\le i<j\le N} v_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

где m_i и $\mathbf{r}_i$ – масса и радиус вектор i-той частицы, $\Delta_{\mathbf{r}_i}$ – оператор Лапласа, функции v_{ij} – потенциалы взаимодействия между частицами i и j. В силу трансляционной инвариантности потенциальной энергии оператор $\hat{H}$ содержит тривиальное слагаемое, отвечающее свободному движению системы как целого. Стандартным способом явного отделения этого слагаемого является переход от координат частиц $\mathbf{r}_1 ... \mathbf{r}_N$ к радиус-вектору центра масс

$$\mathbf{R} = M^{-1}\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{1}$$

и системе трансляционно инвариантных относительных координат. Для описания последних, а также для классификации объектов, встречающихся в дальнейшем, необходимо ввести понятие цепочек разбиений .

Цепочки разбиений.

Разбиением a_k называется некоторый способ разделения системы N частиц на k подсистем: $a_k = \{\omega_1, ..., \omega_k\}$, $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$, $\omega_i \subset \{1, 2, ..., N\}$. Соотношение $a_k \subset a_l$ при $k \ge l$ означает, что при $k = l$ $a_k = a_l$, при $k = l + 1$: $a_{l+1} = \{\omega_1, ..., \omega_{l+1}\}$,

[1] На протяжении всего текста используется система единиц, в которой постоянная Планка $\hbar = 1$.

$a_l = \{\sigma_1, ..., \sigma_r, ..., \sigma_l\}$ и существуют такие номера p, q и r, что $\omega_p \cup \omega_q = \sigma_r$, при $k > l+1$ существует последовательность разбиений $a_{k-1} \subset ... \subset a_{l+2} \subset a_{l+1}$ и $a_k \subset a_{k-1}$. В дальнейшем одинаковыми буквами обозначаются разбиения, связанные знаком $\subset$. Цепочкой разбиений A_l^k называется последовательность $A_l^k = a_l, a_{l+1}, ..., a_k$. В частных случаях $k = N-1$ и $l = 2$ применяются обозначения: $A_l = a_l, a_{l+1}, ..., a_{N-1}$ и $A^k = a_2, a_3, ..., a_k$. Ясно, что самая полная информация о разбиениях системы N частиц содержится в цепочках A_2. Обозначим через n_N общее число цепочек A_2 для системы N частиц. Тогда сосчитать что

$$n_N = 2^{1-N} N!(N-1)!$$

В частных случаях это число имеет вид

- $n_3 = 3$ $\qquad a_2 = (12)3, 1(23), (13)2$
- $n_4 = 18$ $\qquad a_2 = (123)4, (12)(34), a_3 = (12)34$
- $n_5 = 180$ ...
- $n_6 = 2700$ ...
- ...

Относительные координаты.
Вводимые координаты связывают с именем Якоби (Jakobi) немецкого математика (физика-теоретика), фамилия которого породила многие хорошо известные понятия, такие как якобиан, уравнения Гамильтона-Якоби, эллиптические функции Якоби, полиномы Якоби, и т.д.[2]. Пусть A_2 – некоторая цепочка разбиений. Определим $N-1$ векторов $\mathbf{x}_{a_2}^{a_1}$, $\mathbf{x}_{a_3}^{a_2}$,..., $\mathbf{x}_{a_{N-1}}^{a_{N-2}}$, $\mathbf{x}_{a_N}^{a_{N-1}}$ по формулам

$$\mathbf{x}_{a_l}^{a_{l-1}} = \left(\frac{2M_{\omega_p} M_{\omega_q}}{M_{\omega_p} + M_{\omega_q}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{R}_{\omega_p} - \mathbf{R}_{\omega_q} \right), \tag{2}$$

где $M_{\omega_p} = \sum_{j \in \omega_p} m_j$, $\mathbf{R}_{\omega_p} = M_{\omega_p}^{-1} \sum_{j \in \omega_p} m_j \mathbf{r}_j$, а подсистемы ω_p и ω_q определяются парой разбиений a_{l-1} и a_l: $a_{l-1} = \{\sigma_1, ...\sigma_r, ..., \sigma_{l-1}\}$, $a_l = \{\omega_1, ..., \omega_l\}$ и $\omega_p \cup \omega_q = \sigma_r$. Набор векторов $\mathbf{X}_{A_2} = \{\mathbf{x}_{a_2}^{a_1}, \mathbf{x}_{a_3}^{a_2}, ..., \mathbf{x}_{a_{N-1}}^{a_{N-2}}, \mathbf{x}_{a_N}^{a_{N-1}}\}$ совместно с $\mathbf{R}$ из (1) дает альтернативные к набору $\{\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N\}$ координаты для системы N частиц. Заметим, что формулы (1) и (2) фактически определяют линейное преобразование

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_{A_2}\} = T_{A_2}\{\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N\},$$

с $N \times N$ матрицей T_{A_2}. Аналогично для некоторой цепочки $B_2 \neq A_2$

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_{B_2}\} = T_{B_2}\{\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N\}.$$

[2]Интересно отметить, что родной брат Б. Якоби получил в свое время позицию в С-Петербургской академии наук и плодотворно трудился в России. Известен работами в области электро-магнетизма.

Из этих равенств следует

$$\{\mathbf{R}, \mathbf{X}_{B_2}\} = T_{B_2} T_{A_2}^{-1} \{\mathbf{R}, \mathbf{X}_{A_2}\}.$$

Последнее означает, что матрица $T_{B_2} T_{A_2}^{-1}$ имеет блочную структуру $[1, O_{B_2 A_2}]$ с $N-1 \times N-1$ матрицей $O_{B_2 A_2}$, которая определяет преобразование относительных координат $\mathbf{X}_{A_2}$ и $\mathbf{X}_{B_2}$

$$\mathbf{X}_{B_2} = O_{B_2 A_2} \mathbf{X}_{A_2}. \tag{3}$$

Матрица преобразования $O_{B_2 A_2}$ – ортогональна, именно $O_{B_2 A_2} O_{B_2 A_2}^{\top}$, где $\top$ означает транспонирование. Для доказательства достаточно заметить, что для любой цепочки C_2 выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^2 = M\mathbf{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N} \left(\mathbf{x}_{c_j}^{c_{j-1}} \right)^2,$$

откуда

$$\sum_{j=2}^{N} \left(\mathbf{x}_{a_j}^{a_{j-1}} \right)^2 = \sum_{j=2}^{N} \left(\mathbf{x}_{b_j}^{b_{j-1}} \right)^2.$$

Введем несколько более компактных обозначений для относительных координат. Пусть a_k некоторое разбиение цепочки A_2. Обозначим $\mathbf{x}_{a_k}$ набор относительных координат внутренних по отношению к подсистемам разбиения a_k:

$$\mathbf{x}_{a_k} = \{\mathbf{x}_{a_{k+1}}^{a_k}, ..., \mathbf{x}_{a_N}^{a_{N-1}}\}.$$

Через $\mathbf{y}_{a_k}$ обозначим набор внешних по отношению к a_k относительных координат:

$$\mathbf{y}_{a_k} = \{\mathbf{x}_{a_2}^{a_1}, ..., \mathbf{x}_{a_k}^{a_{k-1}}\}.$$

По построению $\mathbf{X}_{A_2} = \{\mathbf{x}_{a_k}, \mathbf{y}_{a_k}\}$. Согласно определению $\mathbf{x}_{a_{N-1}} = \mathbf{x}_{a_N}^{a_{N-1}}$ и $\mathbf{y}_{a_2} = \mathbf{x}_{a_2}^{a_1}$. Наконец заметим, что $\mathbf{x}_{a_{N-1}} = [2m_i m_j/(m_i + m_j)]^{1/2} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, где i и j – номера частиц, входящих в единственную нетривиальную подсистему разбиения a_{N-1}. В дальнейшем мы будем систематически использовать взаимно однозначное соответствие между парами ij и разбиениями a_{N-1} для классификации различных парных объектов.

Оператор энергии.

Введенные координаты позволяют переписать оператор $\hat{H}$ в виде

$$\hat{H} = -\frac{1}{2M} \Delta_{\mathbf{R}} - \sum_{k=2}^{N} \Delta_{\mathbf{x}_{a_k}^{a_{k-1}}} + \sum_{b_{N-1}} V_{b_{N-1}}(\mathbf{x}_{b_{N-1}}), \tag{4}$$

где $V_{b_{N-1}}(\mathbf{x}_{b_{N-1}}) = v_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, а i, j – номера частиц, входящих в единственную нетривиальную подсистему разбиения b_{N-1}. Здесь и в дальнейшем предполагается, что фиксирована некоторая цепочка разбиений A_2, которая определяет набор координат $\mathbf{X}_{A_2}$, а векторы $\mathbf{x}_{b_{N-1}}$ в последней сумме выражены в терминах координат $\mathbf{X}_{A_2}$ по формулам (3). Сумму трехмерных операторов Лапласа $\sum_{k=2}^{N} \Delta_{\mathbf{x}_{a_k}^{a_{k-1}}}$ удобно объединить в Лапласиан $\Delta_{\mathbf{X}_{A_2}}$ с $\mathbf{X}_{A_2} \in \mathbf{R}^{3(N-1)}$. Благодаря ортогональности преобразования (3) для любых $A_2 \neq B_2$ выполняется равенство

$$\Delta_{\mathbf{X}_{A_2}} = \Delta_{\mathbf{X}_{B_2}}.$$

По этой причине в дальнейшем будем опускать индексы цепочек у координат $\mathbf{X}_{A_2}$ и писать просто $\mathbf{X}$. Заметим, что для любого a_k верно представление

$$\Delta_{\mathbf{X}} = \Delta_{\mathbf{x}_{a_k}} + \Delta_{\mathbf{y}_{a_k}}, \tag{5}$$

где $\mathbf{x}_{a_k}$ и $\mathbf{y}_{a_k}$ ($\mathbf{x}_{a_k} \in \mathbf{R}^{3(N-k)}, \mathbf{y}_{a_k} \in \mathbf{R}^{3(k-1)}$) – внутренние и внешние по отношению к a_k координаты, определенные выше.

Отделяя в (4) слагаемое $-\frac{1}{M}\Delta_{\mathbf{R}}$, отвечающее свободному движению системы N частиц как целого, получаем оператор энергии N частиц в системе центра масс:

$$H = -\Delta_{\mathbf{X}} + \sum_{b_{N-1}} V_{b_{N-1}}(\mathbf{x}_{b_{N-1}}) \equiv H_0 + \sum_{b_{N-1}} V_{b_{N-1}}. \tag{6}$$

Именно оператор H определяет все физические свойства системы, поэтому его изучение и представляет основную задачу.

Оператор H рассматривается в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbf{R}^{3(N-1)})$ квадратично интегрируемых функций, зависящих от относительных координат. Это гильбертово пространство будет обозначаться в дальнейшем $\mathcal{H}$. Относительно потециалов взаимодействия $V_{b_{N-1}}(\mathbf{x}_{b_{N-1}})$ предполагается, что они являются вещественно значными, гладкими, достаточно быстро убывающими функциями при $|\mathbf{x}_{b_{N-1}}| \to \infty$:

$$|V_{b_{N-1}}(\mathbf{x})| \leq C(1 + |\mathbf{x}|)^{-(3+\varepsilon)}, \quad \varepsilon \geq 0. \tag{7}$$

Оператор H с такими потенциалами становится самосопряженным в $\mathcal{H}$ с областью определения $D = D(-\Delta_{\mathbf{X}})$ [41].

Наряду с оператором H будем рассматривать операторы вида

$$H_{a_k} = H_0 + \sum_{a_{N-1} \subset a_k} V_{a_{N-1}}.$$

Эти операторы соответствуют системам N частиц, в которых взаимодействуют между собой лишь частицы, принадлежащие подсистемам разбиения a_k, тогда как взаимодействие между частицами из разных подсистем a_k отсутствует. Для операторов H_{a_k}, благодаря (5), верно представление

$$H_{a_k} = -\Delta_{\mathbf{y}_{a_k}} + h_{a_k},$$

$$h_{a_k} = -\Delta_{\mathbf{x}_{a_k}} + \sum_{a_{N-1} \subset a_k} V_{a_{N-1}}(\mathbf{x}_{a_{N-1}}).$$

Итак, мы описали операторы H и H_{a_k} в координатном пространстве. Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье

$$f(\mathbf{X}) = \int d\mathbf{P} \exp i(\mathbf{P}, \mathbf{X}) f(\mathbf{P}),$$

где $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{3(N-1)}$ – набор относительных импульсов $\mathbf{k}_{a_2}^{a_1}, ..., \mathbf{k}_{a_N}^{a_{N-1}}$, сопряженных координатам $\mathbf{X}$. Оператор H в импульсном пространстве дается выражением (6), где

$$H_0 = \mathbf{P}^2 = \mathbf{k}_{a_k}^2 + \mathbf{p}_{a_k}^2,$$

а $V_{a_{N-1}}$ – интегральные операторы с ядрами

$$V_{a_{N-1}}(\mathbf{P}, \mathbf{P}') = V_{a_{N-1}}(\mathbf{k}_{a_{N-1}} - \mathbf{k}'_{a_{N-1}}) \delta(\mathbf{p}_{a_{N-1}} - \mathbf{p}'_{a_{N-1}}).$$

Функции $V_{a_{N-1}}(\mathbf{k})$ связаны с $V_{a_{N-1}}(\mathbf{x})$ преобразованием Фурье

$$V_{a_{N-1}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \exp i(\mathbf{k}, \mathbf{x}) V_{a_{N-1}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

Для операторов H, H_{a_k} и H_0 резольвенты определяются равенствами

$$R(z) = (H - z)^{-1}, \quad R_{a_k}(z) = (H_{a_k} - z)^{-1}, \quad R_0 = (H_0 - z)^{-1}.$$

Отвечающие резольвентам T-матрицы имеют вид

$$T(z) = V - VR(z)V, \quad T_{a_k} = V_{a_k} - V_{a_k} R_{a_k}(z) V_{a_k},$$

где

$$V = \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}, \quad V_{a_k} = \sum_{a_{N-1} \subset a_k} V_{a_{N-1}}.$$

Обратное преобразование

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z) T(z) R_0(z), \quad R_{a_k}(z) = R_0(z) - R_0(z) T_{a_k}(z) R_0(z)$$

получается стандартными методами.

Как обычно при решении задачи N тел предполагаются известными решения задач меньшего числа частиц, в частности при изучении резольвенты $R(z)$ считаются известными все операторы $R_{a_k}(z)$ при $2 \leq k \leq N-1$. Однако, как и в [10] мы выписываем соответствующие уравнения для всех операторов $R_{a_k}(z)$. При этом самые сложные уравнения для $R(z)$ получаются при $k = 1$.

В конце данного раздела условимся о некоторых обозначениях, используемых на протяжении работы. Модули векторов будем обозначать соответствующими нежирными буквами $x = |\mathbf{x}|$, а единичные векторы как $\mathbf{x}/x = \hat{x}$. Скалярные произведения векторов обозначаются $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

2 Компоненты T-матрицы и резольвенты. Уравнения Якубовского

В настоящем разделе определяются компоненты T-матриц $T(z)$, $T_{a_k}(z)$ и резольвент $R(z)$, $R_{a_k}(z)$. Компоненты классифицируются цепочками разбиений A_l. Такие компоненты и уравнения для них были введены в работах [10, 11]. Будем работать с операторами $T_{a_k}(z)$ и $R_{a_k}(z)$, отождествляя $T_{a_1}(z) = T(z)$ и $R_{a_1}(z) = R(z)$.

Компоненты T-матриц T_{a_k} определяются следующими рекуррентными соотношениями

$$\begin{gathered}
M^{a_k}_{a_{N-1}b_{N-1}}(z) = V_{a_{N-1}}\delta_{a_{N-1}b_{N-1}} - V_{a_{N-1}}R_{a_k}(z)V_{b_{N-1}}, \\
M^{a_k}_{A_{i-1}B_{i-1}}(z) = M^{a_i}_{A_{i+1}B_{i+1}}(z)\delta_{a_ib_i}\delta_{a_{i-1}b_{i-1}} - \\
- \sum_{(d_i\neq a_i)\subset a_{i-1}} \sideset{}{'}\sum_{(C_{i+1}\neq D_{i+1})\subset a_i} M^{a_i}_{A_{i+1}C_{i+1}}(z)R_0(z)M^{a_k}_{D_iB_i}(z),
\end{gathered} \tag{8}$$

где $A_i \subset a_k, B_i \subset a_k, k+1 \leq i \leq N-1, 1 \leq k \leq N-1, \delta_{a_ib_i}$ – символ Кронекера. Штрих у знака суммы означает, что ограничения при суммировании понимаются покомпонентно: цепочки C_{i+1} и D_{i+1} подчиняются условиям

$$c_{N-1} \neq d_{N-1},\ \dots ,c_{i+1} \neq d_{i+1}\ ;\ d_{N-1} \subset c_{N-2},\ \dots\ d_{i+2} \subset c_{i+1}.$$

Операторы $M^{a_i}_{A_kB_k}(z)$ удовлетворяют системе уравнений [10, 11]

$$M^{a_i}_{A_kB_k}(z) = M^{a_k}_{A_{k+1}B_{k+1}}(z)\delta_{a_kb_k} - \sum_{d_k\neq a_k} \sideset{}{'}\sum_{(C_{k+1}\neq D_{k+1})\subset a_k} M^{a_k}_{A_{k+1}C_{k+1}}(z)R_0(z)M^{a_i}_{D_kB_k}(z) \tag{9}$$

В случае $k = 2,\ i = 1$ уравнения (9) являются обобщением системы уравнений Фаддеева [1] на случай N частиц. Сформулируем два важнейших свойства уравнений (9), доказанных в [10, 11].

Лемма 2.1. *Пусть операторы $\tilde{M}^{a_i}_{A_kB_k}(z)$, $\Im mz \neq 0$, определены на D и удовлетворяют системе (9), тогда операторы*

$$\tilde{M}^{a_i}_{A_{k+1}B_{k+1}}(z) = \sum_{a_k} \tilde{M}^{a_i}_{A_kB_k}(z),$$

$$\tilde{T}_{a_i}(z) = \sum_{A_k,b_{N-1}} \tilde{M}^{a_i}_{A_kB_k}(z)$$

совпадают с $M^{a_i}_{A_{k+1}B_{k+1}}(z)$ и T_{a_i}, соответственно.

Лемма 2.2. *Однородная система уравнений (9)*

$$\varphi^{a_i}_{A_k} = -\sum_{d_k\neq a_k}\sum_{(C_{k+1}\neq D_{k+1})\subset a_k}{}' M^{a_k}_{A_{k+1}C_{k+1}}(z)R_0(z)\varphi^{a_i}_{D_k} \tag{10}$$

не имеет нетривиальных решений при $\Im m z \neq 0$.

Последняя Лемма следует из формальной эквивалентности системы (10) уравнению Шредингера [10]

$$H_{a_i}\Psi^{a_i} = z\Psi^{a_i},$$

где

$$\Psi^{a_i} = \sum_{A_k} R_0(z)\varphi^{a_i}_{A_k}.$$

Аналогично T-матрицам, можно определить компоненты резольвент по формулам

$$\begin{gathered} R^{a_k}_{a_{N-1}b_{N-1}}(z) = R_0(z)\delta_{a_{N-1}b_{N-1}} - R_0(z)V_{a_{N-1}}R_{a_k}(z) \\ R^{a_k}_{A_{i-1}B_{i-1}}(z) = R^{a_i}_{A_{i+1}B_{i+1}}(z)\delta_{a_ib_i}\delta_{a_{i-1}b_{i-1}} - \\ -\sum_{(d_i\neq a_i)\subset a_{i-1}}\sum_{(C_{i+1}\neq D_{i+1})\subset a_i}{}' R^{a_i}_{A_{i+1}C_{i+1}}(z)V_{c_{N-1}}R^{a_k}_{D_iB_i}(z), \end{gathered} \tag{11}$$

Определения (11) ведут к уравнениям

$$R^{a_i}_{A_kB_k}(z) = R^{a_k}_{A_{k+1}B_{k+1}}(z)\delta_{a_kb_k} - \sum_{d_k\neq a_k}\sum_{(C_{k+1}\neq D_{k+1})\subset a_k}{}' R^{a_k}_{A_{k+1}C_{k+1}}(z)V_{c_{N-1}}R^{a_i}_{D_kB_k}(z). \tag{12}$$

Уравнения (12) будут получены в разделе 5 данной главы. Там же будет доказано свойство

$$R^{a_k}_{A_{k+1}C_{k+1}}(z)V_{c_{N-1}} = R_0(z)M^{a_k}_{A_{k+1}C_{k+1}}(z),$$

которое приводит к формулам

$$R^{a_i}_{A_kB_k}(z)V_{b_{N-1}} = R_0(z)M^{a_i}_{A_kB_k}(z) \tag{13}$$

для произвольного a_i. Последнее является обобщением на случай компонент хорошо известного равенства

$$R(z)V = R_0(z)T(z).$$

Формулы (13) позволяют получить связь между компонентами T-матрицы и резольвенты в виде

$$M^{a_i}_{A_kB_k}(z) = (H_0 - z)R^{a_i}_{A_kB_k}(z)V_{b_{N-1}}.$$

Подобно системе (10), однородная система уравнений (12)

$$\psi^{a_i}_{A_k} = -\sum_{d_k\neq a_k}\sum_{(C_{k+1}\neq D_{k+1})\subset a_k}{}' R^{a_k}_{A_{k+1}C_{k+1}}(z)V_{c_{N-1}}\psi^{a_i}_{D_k} \tag{14}$$

не имеет нетривиальных решений при $\Im m z \neq 0$. Как и в случае системы (10), данное утверждение является следствием эквивалентности уравнений (14) и уравнения Шредингера

$$H_{a_i}\Psi^{a_i} = z\Psi^{a_i}. \tag{15}$$

Компоненты $\psi^{a_i}_{A_k}$ могут быть построены по Ψ^{a_i} с помощью следующих формул

$$\psi^{a_i}_{A_{N-1}} = -R_0(z)V_{a_{N-1}}\Psi^{a_i}$$

$$\psi^{a_i}_{A_{j-1}} = \sum_{(d_j\neq a_j)\subset a_{j-1}}\sum_{(C_{j+1}\neq D_{j+1})\subset a_j}{}' R^{a_j}_{A_{j+1}C_{j+1}}(z)V_{c_{N-1}}\psi^{a_i}_{D_j}. \tag{16}$$

При этом

$$\Psi^{a_i} = \sum_{A_k}\psi^{a_i}_{A_k}.$$

Если $\psi^{a_i}_{A_k}$ суть решения (14), то Ψ^{a_i} – решение (15) и в силу самосопряженности H_{a_i} получается, что $\Psi^{a_i} = 0$ при $\Im m z \neq 0$. В свою очередь из первого и второго равенств (16) следует, что все $\psi^{a_i}_{A_{j-1}}$ равны нулю.

Решения систем (9) и (12) позволяют восстановить T-матрицы и резольвенты по формулам

$$T_{a_i}(z) = \sum_{A_k, b_{N-1}} M^{a_i}_{A_kB_k}(z),$$

$$R_{a_i}(z) = \sum_{A_k} R^{a_i}_{A_kB_k}(z).$$

3 Строение T-матрицы и резольвенты в импульсном пространстве и собственные функции непрерывного спектра

Введенные в предыдущем разделе операторы $M^{a_i}_{A_kB_k}(z)$ и $R^{a_i}_{A_kB_k}(z)$ реализуются в импульсном прстранстве как интегральные операторы. Соответственно системы уравнений (9) и (12) превращаются в системы интегральных уравнений для ядер входящих в них операторов. Эти системы уравнений позволяют явно описать сингулярности ядер T-матицы и резольвенты в импульсном представлении и определить собственные функции непрерывного спектра [23].

Условимся о следующей терминологии. Будем называть интегральный оператор с ядром вида $A_{a_l}(\mathbf{k}_{a_l}, \mathbf{k}'_{a_l})\delta(\mathbf{p}_{a_l} - \mathbf{p}'_{a_l})$, где $A_{a_l}(\mathbf{k}_{a_l}, \mathbf{k}'_{a_l})$ не имеет δ-функционных особенностей, оператором, связным в разбиении a_l, и обозначать $A^c_{a_l}$. Ясно, что резольвенты $R_{a_k}(z)$ и T-матрицы $T_{a_k}(z)$ не являются связными в a_k операторами. Ближайшей нашей задачей является явное описание несвязных частей операторов $R_{a_k}(z)$ и $T_{a_k}(z)$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Для связных частей операторов $R_{a_k}(z)$ и $T_{a_k}(z)$, $1 \le k \le N-1$ справедливы представления*

$$R^c_{a_k}(z) = R_{a_k}(z) - R_0(z) - \sum_{i=k+1}^{N-1} \sum_{a_i} R^c_{a_i}(z),$$

$$T^c_{a_k}(z) = T_{a_k}(z) - \sum_{i=k+1}^{N-1} \sum_{a_i} T^c_{a_i}(z), \tag{17}$$

где $T^c_{a_{N-1}} = T_{a_{N-1}}$.

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать только второе из равенств (17), так как первое тогда будет следовать из соотношения

$$R_{a_k}(z) = R_0(z) - R_0(z) T_{a_k}(z) R_0(z).$$

Формулы (17) можно легко получить с помощью графической техники [42], однако для полноты изложения мы дадим алгебраическое доказательство, используя основное свойство уравнений (9). Вместо компонент (8) удобно рассмотреть следующие компоненты T-матриц $T_{a_k}(z)$

$$T^{a_k}_{a_{N-1}}(z) = V_{a_{N-1}} - V_{a_{N-1}} R_{a_k}(z) V_{a_{N-1}}$$

$$T^{a_k}_{A_{i-1}}(z) = - \sum_{(d_i \ne a_i) \subset a_{i-1}} \sideset{}{'}\sum_{(C_{i+1} \ne D_{i+1}) \subset a_i} M^{a_i}_{A_{i+1} C_{i+1}}(z) R_0(z) T^{a_k}_{D_i}(z), \tag{18}$$

которые удовлетворяют уравнениям [42]

$$T^{a_k}_{A_i}(z) = T^{a_i}_{A_{i+1}}(z) - \sum_{(d_i \ne a_i)} \sideset{}{'}\sum_{(C_{i+1} \ne D_{i+1}) \subset a_i} M^{a_i}_{A_{i+1} C_{i+1}}(z) R_0(z) T^{a_k}_{D_i}(z). \tag{19}$$

Уравнения (19) отличаются от (9) тем, что свободный член $T^{a_i}_{A_{i+1}}(z)$ является связным в a_i оператором и представляет собой компоненту связной части оператора $T_{a_i}(z)$. При этом $T^c_{a_i}(z)$ дается формулой

$$T^c_{a_i}(z) = \sum_{A_{i+1}} T^{a_i}_{A_{i+1}}(z). \tag{20}$$

Из определений (18) и уравнений (19) получаем следующее соотношение для $T^{a_k}_{A_{i+1}}(z)$

$$T^{a_k}_{A_{i+1}}(z) = T^{a_{i+1}}_{A_{i+2}}(z) + \sum_{a_i} T^{a_k}_{A_i}(z)$$

Из свойств уравнений (19), доказанных в [10] и [11], второе слагаемое в (19) при $i = k+1$ является связным в a_k оператором. Отсюда, формул (20) и соотношения

$$T_{a_k}(z) = \sum_{a_{N-1}} T^{a_k}_{a_{N-1}}(z)$$

получаем требуемое представление

$$T^c_{a_k}(z) = T_{a_k}(z) - \sum_{i=k+1}^{N-1} \sum_{a_i} T^c_{a_i}(z)$$

и соответствующее представление для $R^c_{a_k}(z)$. Лемма доказана.

Для описания структуры сингулярностей T-матриц нам понадобится ряд новых обозначений. Пусть $\psi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i})$ и ε_{a_i} $(\varepsilon_{a_i} > 0)$ – собственная функция дискретного спектра и абсолютная величина энергии связи для оператора h_{a_i}:

$$h_{a_i}\psi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i}) = -\varepsilon_{a_i}\psi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i}).$$

Состояние системы N частиц, в котором взаимодействуют лишь частицы из подсистем разбиения a_i, описываемое функцией $\psi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i})$, называют **$i$-кластерным каналом**. Введем формфактор формулой

$$\phi^{a_i} = \sum_{a_{N-1}\subset a_i} V_{a_{N-1}}\psi^{a_i}.$$

Для объектов ψ^{a_i}, ϕ^{a_i} и ε_{a_i} под индексом a_i будем понимать в дальнейшем не только само разбиение a_i, но и возможные дополнительные индексы (квантовые числа), классифицирующие собственные функции и собственные значения оператора h_{a_i}. Далее будем считать выполненным условие $\varepsilon_{a_i} < \varepsilon_{a_k}$ при $a_i \subset a_k$, согласующееся с утверждением [43] о пороге непрерывного спектра для многочастичных гамильтонианов.

Строение T-матрицы $T(z)$ оператора H описывается формулами [23]

$$T(z) = \sum_{i=2}^{N-1} \sum_{a_i} T^c_{a_i}(z) + T^c(z), \tag{21}$$

где ядра операторов $T^c_{a_i}(z)$ при $1 \le i \le N-1$ и $T^c_{a_1} \equiv T^c$ имеют вид

$$T^c_{a_i}(\mathbf{P},\mathbf{P}',z) = t^c_{a_i}(\mathbf{k}_{a_i},\mathbf{k}'_{a_i},z-\mathbf{p}^2_{a_i})\delta(\mathbf{p}_{a_i}-\mathbf{p}'_{a_i}),$$

$$t^c_{a_i}(\mathbf{k}_{a_i},\mathbf{k}'_{a_i},z) = \frac{\phi^{a_i}(\mathbf{k}_{a_i})\overline{\phi^{a_i}}(\mathbf{k}'_{a_i})}{z+\varepsilon_{a_i}} +$$

$$+\sum_{a_j,a_l\subset a_i} \frac{\phi^{a_j}(\mathbf{k}_{a_j})}{z-\mathbf{p}^2_{a_ja_i}+\varepsilon_{a_j}} \mathcal{H}^{a_i}_{a_ja_l}(\mathbf{p}_{a_ja_i},\mathbf{p}'_{a_la_i},z) \frac{\overline{\phi^{a_l}}(\mathbf{k}'_{a_l})}{z-\mathbf{p}'^2_{a_la_i}+\varepsilon_{a_l}}. \tag{22}$$

Здесь $\mathbf{p}_{a_j a_i}$ – набор относительных импульсов внешних по отношению к разбиению a_j и внутренних по отношению к разбиению a_i $(a_j \subset a_i)$, так что $\mathbf{P} = \{\mathbf{k}_{a_i}, \mathbf{p}_{a_i}\}$, $\mathbf{P} = \{\mathbf{k}_{a_j}, \mathbf{p}_{a_j}\}$, $\mathbf{p}_{a_j} = \{\mathbf{p}_{a_j a_i}, \mathbf{p}_{a_i}\}$ и $\mathbf{k}_{a_i} = \{\mathbf{k}_{a_j}, \mathbf{p}_{a_j a_i}\}$. При суммировании по a_j и a_l во втором члене формулы (22) допускаются значения $j, l = N$, при этом полагается

$$\frac{\phi^{a_N}(\mathbf{k}_{a_N})}{z - \mathbf{p}^2_{a_N a_i} + \varepsilon_{a_N}} \equiv 1.$$

Доказательство формул (22) может быть получено по индукции, с помощью формул работы [1] и уравнений (9) и (19). Мы не будем приводить его здесь из-за черезвычайной громоздкости промежуточных формул. Кроме явно выделенных в (22) особенностей, называемых главными, функции $t^c_{a_i}(\mathbf{k}_{a_i}, \mathbf{k}'_{a_i}, z)$ имеют ряд второстепенных сингулярностей, отвечающих первым итерациям систем (9) и (19). Эти сингулярности соответствуют законам сохранения энергии в процессах многократных разделенных столкновений кластеров. Отличительной чертой второстепенных сингулярностей является зависимость не только от модулей векторов $\mathbf{p}_{a_j a_i}$ и $\mathbf{p}'_{a_j a_i}$, но и от углов между этими векторами. Мы также не будем приводить здесь соответствующие формулы из-за их громоздкости. Подробное рассмотрение этих вопросов будет проведено в Главе 2 для системы четырех частиц.

Представление для ядра резольвенты получается из (21) и (22) с помощью формулы

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z). \tag{23}$$

Теперь мы имеем возможность определить собственные функции непрерывного спектра для оператора H. Обозначим $\chi_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l})$ волновую функцию l свободных кластеров. Функция χ_{b_l} выражается через ψ^{b_l} формулой

$$\chi_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}) = \psi^{b_l}(\mathbf{k}_{b_l})\delta(\mathbf{p}'_{b_l} - \mathbf{p}_{b_l}).$$

Собственная функция $\Psi^{\pm}_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l})$, отвечающая l-кластерному начальному $(+)$ или конечному $(-)$ состоянию, определяется как предел

$$\Psi^{\pm}_{b_l} = \lim_{\epsilon \to +0} \mp i\epsilon R(E_{b_l} \pm i\epsilon)\chi_{b_l}, \tag{24}$$

где энергия $E_{b_l} = \mathbf{p}^2_{b_l} - \varepsilon_{b_l}$. Используя (21), (22) и (23) для вычисления предела в (24), получаем следующую формулу для $\Psi^{\pm}_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l})$:

$$\Psi^{\pm}_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}) = \chi_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}) + \sum_{a_k \supset b_l} u^{\pm}_{a_k b_l}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k})\delta(\mathbf{p}'_{a_k} - \mathbf{p}_{a_k}) + u^{\pm}_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}), \tag{25}$$

где $u^{\pm}_{a_k b_l}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k})$ – связные части волновых функций $\psi^{\pm}_{a_k b_l}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k})$ даются формулами

$$u^{\pm}_{a_k b_l}(\mathbf{k}'_{a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k}) = -(\mathbf{k}'^2_{a_k} - E_{b_l a_k} \mp i0)^{-1} \sum_{a_i \subset a_k} \frac{\phi_{a_i}(\mathbf{k}'_{a_i})\mathcal{H}^{a_k}_{a_i b_l}(\mathbf{p}'_{a_i a_k}, \mathbf{p}_{b_l a_k}, E_{b_l a_k} \pm i0)}{E_{b_l a_k} - \mathbf{p}'^2_{a_i a_k} + \varepsilon_{a_i} \mp i0},$$

$$u^{\pm}_{b_l}(\mathbf{P}^{'},\mathbf{p}_{b_l}) = -(\mathbf{P}^{'2} - E_{b_l} \mp i0)^{-1} \sum_{a_i} \frac{\phi_{a_i}(\mathbf{k}^{'}_{a_i})\mathcal{H}_{a_i b_l}(\mathbf{p}^{'}_{a_i},\mathbf{p}_{b_l},E_{b_l} \pm i0)}{E_{b_l} - \mathbf{p}^{'2}_{a_i} + \varepsilon_{a_i} \mp i0}. \tag{26}$$

Здесь $E_{b_l a_k} = \mathbf{p}^2_{b_l a_k} - \varepsilon_{b_l}$.

Рассмотрим N невзаимодействующих частиц. Такая система описывается волновой функцией

$$\chi_0(\mathbf{P}^{'},\mathbf{P}) = \delta(\mathbf{P}^{'} - \mathbf{P}).$$

Собственная функция, отвечающая системе N частиц, свободных в начальном $(+)$, конечном $(-)$ состоянии, определяется как предел

$$\Psi^{\pm}_0 = \lim_{\epsilon\to+0} \mp i\epsilon R(E \pm i\epsilon)\chi_0, \tag{27}$$

где энергия $E = \mathbf{P}^2$. Вычисляя предел как и выше, получим

$$\Psi^{\pm}_0(\mathbf{P}^{'},\mathbf{P}) = \chi_0(\mathbf{P}^{'},\mathbf{P}) + \sum_{a_k} u^{\pm}_{a_k 0}(\mathbf{k}^{'}_{a_k},\mathbf{k}_{a_k})\delta(\mathbf{p}^{'}_{a_k} - \mathbf{p}_{a_k}) + u^{\pm}_0(\mathbf{P}^{'},\mathbf{P}), \tag{28}$$

Здесь $u^{\pm}_{a_k 0}(\mathbf{k}^{'}_{a_k},\mathbf{k}_{a_k})$ – связные части волновых функций $\psi^{\pm}_{a_k 0}(\mathbf{k}^{'}_{a_k},\mathbf{k}_{a_k})$ выражаются через ядра T-матриц $T^c_{a_k}(z)$ формулами

$$\begin{aligned} u^{\pm}_{a_k 0}(\mathbf{k}^{'}_{a_k},\mathbf{k}_{a_k}) &= -(\mathbf{k}^{'2}_{a_k} - \mathbf{k}^2_{a_k} \mp i0)^{-1} t^c_{a_k}(\mathbf{k}^{'}_{a_k},\mathbf{k}_{a_k},\mathbf{k}^2_{a_k} \pm i0),\\ u^{\pm}_0(\mathbf{P}^{'},\mathbf{P}) &= -(\mathbf{P}^{'2} - \mathbf{P}^2 \mp i0)^{-1} T^c(\mathbf{P}^{'},\mathbf{P},\mathbf{P}^2 \pm i0). \end{aligned} \tag{29}$$

4 Резольвента и собственные функции непрерывного спектра в конфигурационном пространстве

В данном разделе описываются асимптотический свойства ядра резольвенты оператора H и волновых функций $\Psi^{\pm}_{b_l}$ в конфигурационном пространстве. Ядро резольвенты $R(z)$ в конфигурационном пространстве дается преобразованием Фурье

$$R(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},z) = (2\pi)^{-n} \int d\mathbf{P} d\mathbf{P}^{'} e^{i(\mathbf{P},\mathbf{X})} R(\mathbf{P},\mathbf{P}^{'},z) e^{-i(\mathbf{P}^{'},\mathbf{X}^{'})}, \tag{30}$$

где $n = 3(N-1)$, а $R(\mathbf{P},\mathbf{P}^{'},z)$ – ядро оператора $R(z)$ в импульсном представлении. Используя связь $R(z)$ и $T(z)$ (23), представим ядро $R(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},z)$ в виде

$$R(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},z) = R_0(\mathbf{P},\mathbf{P}^{'},z) + G(\mathbf{P},\mathbf{P}^{'},z). \tag{31}$$

Здесь $R_0(\mathbf{P},\mathbf{P}^{'},z)$ – ядро оператора $R_0(z)$, которое выражается через функцию Ханкеля формулой

$$R_0(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},z) = \frac{i}{4}\left(\frac{\sqrt{z}}{2\pi}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{z}|\mathbf{X}-\mathbf{X}^{'}|)}{|\mathbf{X}-\mathbf{X}^{'}|^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Ядро $G(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},z)$ дается преобразованием Фурье (30) от функции

$$g(\mathbf{P},\mathbf{P}^{'},z)=-\frac{T(\mathbf{P},\mathbf{P}^{'},z)}{(\mathbf{P}^2-z)(\mathbf{P}^{'2}-z)}.$$

Следует отметить, что в силу представления (31) ядро $R(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},z)$ имеет стандартную сингулярность при $\mathbf{X}=\mathbf{X}^{'}$

$$R(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},z)=\left[(n-2)\sigma_n|\mathbf{X}-\mathbf{X}^{'}|^{n-2}\right]^{-1}(1+O(|\mathbf{X}-\mathbf{X}^{'}|),$$

где σ_n – площадь единичной сферы.

Опишем асимптотический вид ядра $R(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},z)$ при $|\mathbf{X}^{'}|\to\infty$ и $|\mathbf{X}|=O(|\mathbf{X}^{'}|^{\nu})$, $\nu<1$. Поскольку $R(z)$ как функция z имеет разрез на вещественной оси, то, как обычно, следует различать пределы при $z\to E\pm i0$, $(\Im m E=0)$.

Для вычисления асимптотики ядер $R(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},E\pm i0)$ воспользуемся описанной в разделе 3 структурой сингулярностей ядра резольвенты в импульсном пространстве и представлением (30). Докажем теорему.

Теорема 4.1. *Ядро* $R(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},E+i0)$ *представляется в виде*

$$R(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'},E+i0)=\sum_{b_l}\bar{\psi}_{b_l}(\mathbf{x}^{'}_{b_l})Q^{+}_{b_l}(\mathbf{X},\mathbf{y}^{'}_{b_l})+Q^{+}_{0}(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'}), \qquad (32)$$

где функции $Q^{+}_{b_l}(\mathbf{X},\mathbf{y}^{'}_{b_l})$ и $Q^{+}_{0}(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'})$ *при* $|\mathbf{y}^{'}_{b_l}|\to\infty$ и $|\mathbf{X}^{'}|\to\infty$ *переходят в сферические волны*

$$Q^{+}_{b_l}(\mathbf{X},\mathbf{y}^{'}_{b_l})\sim\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sqrt{E}}{2\pi}\right)^{\frac{n_l-3}{2}}\Psi^{+}_{b_l}(\mathbf{X},-\sqrt{E+\varepsilon_{b_l}}\hat{\mathbf{y}}^{'}_{b_l})$$

$$\times|\mathbf{y}^{'}_{b_l}|^{-\frac{n_l-1}{2}}\exp\{i\sqrt{E+\varepsilon_{b_l}}|\mathbf{y}^{'}_{b_l}|-i\frac{\pi(n_l-3)}{4}\}, \qquad (33)$$

$$Q^{+}_{0}(\mathbf{X},\mathbf{X}^{'})\sim\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sqrt{E}}{2\pi}\right)^{\frac{n-3}{2}}\Psi^{+}_{0}(\mathbf{X},-\sqrt{E}\hat{\mathbf{X}}^{'})|\mathbf{X}^{'}|^{-\frac{n-1}{2}}\exp\{i\sqrt{E}|\mathbf{X}^{'}|-i\frac{\pi(n-3)}{4}\}.$$

Здесь $n_l=3(l-1)$, *а функции* $\Psi^{+}_{b_l}(\mathbf{X},\mathbf{p}_{b_l})$ *и* $\Psi^{+}_{0}(\mathbf{X},\mathbf{P})$ *являются собственными функциями непрерывного спектра оператора* H *в конфигурационном пространстве и связаны с функциями* (25) *и* (28) *преобразованием Фурье, например,*

$$\Psi^{+}_{b_l}(\mathbf{X},\mathbf{p}_{b_l})=(2\pi)^{-\frac{n-n_l}{2}}\int d\mathbf{P}^{'}\Psi^{+}_{b_l}(\mathbf{P}^{'},\mathbf{p}_{b_l})\exp\{i(\mathbf{P}^{'},\mathbf{X})\}.$$

Доказательство. Запишем формулу (23) в терминах ядер участвующих в ней операторов $(E^{+}=E+i0)$

$$R(\mathbf{P},\mathbf{P}^{'},E^{+})=\frac{\delta(\mathbf{P}-\mathbf{P}^{'})}{\mathbf{P}^2-E^{+}}-\frac{T(\mathbf{P},\mathbf{P}^{'},E^{+})}{(\mathbf{P}^2-E^{+})(\mathbf{P}^{'2}-E^{+})}. \qquad (34)$$

Ядро $T(\mathbf{P},\mathbf{P}',E^+)$ представим в виде

$$T(\mathbf{P},\mathbf{P}',E^+)=\sum_{b_l} u_{b_l}(\mathbf{P},\mathbf{p}'_{b_l},E^+)\frac{\bar\phi_{b_l}(\mathbf{k}'_{b_l})}{E^+-\mathbf{p}'^2_{b_l}+\varepsilon_{b_l}}, \tag{35}$$

где

$$u_{b_l}(\mathbf{P},\mathbf{p}'_{b_l},E^+)=\phi_{b_l}(\mathbf{k}_{b_l})\delta(\mathbf{p}_{b_l}-\mathbf{p}'_{b_l})+\sum_{a_k\supset a_i,b_l}\frac{\phi_{a_i}(\mathbf{k}_{a_i})}{E^+-\mathbf{p}^2_{a_i}+\varepsilon_{a_i}}$$
$$\times\mathcal{H}^{a_k}_{a_ib_l}(\mathbf{p}_{a_ia_k},\mathbf{p}'_{b_la_k},E^+-\mathbf{p}'^2_{a_k})\delta(\mathbf{p}_{a_k}-\mathbf{p}'_{a_k}).$$

Заметим, что при $E=\mathbf{p}'^2_{b_l}-\varepsilon_{b_l}$ функция $(\mathbf{P}^2-E^+)^{-1}u_{b_l}$ совпадает с волновой функцией $\Psi^+_{b_l}$. Подставляя представление (34) в (30), имеем

$$R(\mathbf{X},\mathbf{X}',E^+)=(2\pi)^{-n}\int d\mathbf{P}'\,\hat R(\mathbf{X},\mathbf{P}',E^+)\exp\{i(\mathbf{P}',\mathbf{X}')\}, \tag{36}$$

где через $\hat R(\mathbf{X},\mathbf{P}',E^+)$ обозначено преобразование Фурье ядра $R(\mathbf{P},\mathbf{P}',E^+)$ по первому аргументу. Используем далее то, что особенности сингулярных знаменателей $\mathbf{P}'^2-E^+$ и $E^+-\mathbf{p}'^2_{b_l}+\varepsilon_{b_l}$ не пересекаются, именно $\mathbf{P}'^2-E^++E^+-\mathbf{p}'^2_{b_l}+\varepsilon_{b_l}=\mathbf{k}'^2_{b_l}+\varepsilon_{b_l}>0$. Выделим из области интегрирования в (36) окрестность Ω гиперсферы $\mathbf{P}'^2=E$ такую, что в ней знаменатели $E^+-\mathbf{p}'^2_{b_l}+\varepsilon_{b_l}$ не обращаются в нуль. В этой области подынтегральная функция в (36) имеет единственную особенность $(\mathbf{P}'^2-E^+)^{-1}$. Асимптотика интеграла (36), взятого по выделенной области, легко вычисляется с помощью формулы

$$I(x,E)=\int dq e^{i(x,q)}\frac{f(q)}{q^2-E\mp i0},\quad x,q\in\mathbf{R}^n,$$

$$I(x,E)=\left(\mp\frac{2\pi i}{|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}}\pi E^{\frac{n-1}{4}}\exp\{\pm i\sqrt{E}|x|\pm i\frac{\pi}{2}\}[f(\pm\sqrt{E}\hat x)+O([\sqrt{E}|x|]^{-1})]. \tag{37}$$

Применяя (37) к интегралу (36), взятому по Ω, получаем в старшем порядке выражение (33).

Рассмотрим интеграл (36) по оставшейся части $\mathbf{R}^n$. Теперь можно воспользоваться представлением (35). В результате интеграл распадается на ряд слагаемых вида

$$J(\mathbf{X}',E)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n\setminus\Omega} d\mathbf{P}'f(\mathbf{p}'_{b_l})\frac{\overline{\phi}_{b_l}(\mathbf{k}'_{b_l})\exp\{i(\mathbf{P}',\mathbf{X}')\}}{(E^+-\mathbf{p}'^2_{b_l}+\varepsilon_{b_l})(\mathbf{P}'^2-E^+)},$$

причем в области интегрирования выражение $\mathbf{P}'^2-E$ не обращается в нуль. Для вычисления асимптотики $J(\mathbf{X}',E)$ при $|\mathbf{X}'|\to\infty$ проведем сначала интегрирование по переменной $\mathbf{p}'_{b_l}$ с помощью формулы (37) и учтем, что

$$(2\pi)^{\frac{n-n_l}{2}}\int d\mathbf{k}'_{b_l}e^{i(\mathbf{x}'_{b_l},\mathbf{k}'_{b_l})}\frac{\overline{\phi}_{b_l}(\mathbf{k}'_{b_l})}{\mathbf{k}'^2_{b_l}+\varepsilon_{b_l}}=\overline{\psi}_{b_l}(\mathbf{x}'_{b_l}).$$

Тогда в старшем порядке интеграл $J(\mathbf{X}', E)$ дается выражением

$$J(\mathbf{X}', E) \sim \frac{1}{4\pi(2\pi)^{\frac{n-n_l}{2}}} \left(\frac{\sqrt{E+\varepsilon_{b_l}}}{2\pi} \right)^{\frac{n_l-3}{2}} \overline{\psi}_{b_l}(\mathbf{x}'_{b_l}) f(\sqrt{E+\varepsilon_{b_l}} \hat{\mathbf{y}}'_{b_l})$$

$$\times |\mathbf{y}'_{b_l}|^{-\frac{n_l-1}{2}} \exp\{i\sqrt{E+\varepsilon_{b_l}}|\mathbf{y}'_{b_l}| - i\frac{\pi(n_l-3)}{4}\}.$$

Собирая полученные вклады, получаем для ядра $R(\mathbf{X}, \mathbf{X}', E^+)$ требуемое представление (32). Теорема 4.1 доказана.

Перейдем к обсуждению асимптотических свойств волновых функций $\Psi^+_{b_l}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_l})$:

$$\Psi^+_{b_l}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_l}) = (2\pi)^{-\frac{n-n_l}{2}} \int d\mathbf{P}' \Psi^+_{b_l}(\mathbf{P}', \mathbf{p}_{b_l}) \exp\{i(\mathbf{P}', \mathbf{X})\}.$$

В настоящем разделе мы опишем лишь асимптотику волновых функций $\Psi^+_{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2})$, отвечающих двухкластерным начальным состояниям. В этом случае можно показать (см. Главу 2, раздел 1), что функции $\Psi^+_{b_2}(\mathbf{P}, \mathbf{p}_{b_2})$ не содержат второстепенных сингулярностей, связанных с перерассеянием кластеров. Это означает, что амплитуды в формулах (26) являются гладкими функциями. Последнее позволяет легко вычислить асимптотику волновых функций $\Psi^+_{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2})$ при $|\mathbf{X}| \to \infty$, используя приемы аналогичные тем что применялись при доказательстве Теоремы 4.1. Приведем окончательный результат. Функции $\Psi^+_{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2})$ представляются в виде

$$\Psi^+_{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2}) = \chi_{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2}) + \sum_{i=2}^{N} \sum_{a_i} \psi_{a_i}(\mathbf{x}_{a_i}) U^+_{a_i b_2}(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}). \tag{38}$$

Здесь

$$\chi_{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2}) = \psi_{b_2}(\mathbf{x}_{b_2}) \exp\{i(\mathbf{p}_{b_2}, \mathbf{y}_{b_2})\},$$

а функции $U^+_{a_i b_2}(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2})$ переходят в сферические волны при $|\mathbf{y}_{a_i}| \to \infty$

$$U^+_{a_i b_2}(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}) \sim C_{3(i-1)}(E_{a_i b_2}) \mathcal{H}_{a_i b_2}(\sqrt{E_{a_i b_2}} \hat{\mathbf{y}}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}, E_{b_2} + i0)$$

$$\times |\mathbf{y}_{a_i}|^{-\frac{3i-4}{2}} \exp\{i\sqrt{E_{a_i b_2}}|\mathbf{y}_{a_i}|\}, \tag{39}$$

где $E_{a_i b_2} = E_{b_2} + \varepsilon_{a_i} = \mathbf{p}^2_{b_2} - \varepsilon_{b_2} + \varepsilon_{a_i}$, $C_n(E) = -2\pi^2 E^{\frac{n-3}{4}} \exp\{-i\pi\frac{n-3}{4}\}$. В формулах (38) и (39) при $i = N$ полагается $\psi_{a_N} = 1,\ \varepsilon_{a_N} = 0$.

5 Дифференциальные уравнения для компонент

В разделе 2 мы ввели компоненты резольвенты $R^{a_i}_{A_k B_k}(z)$, уравнения для них (12) и анонсировали перестановочное свойство (13). В данном разделе мы дадим соответствующие доказательства. Более того, мы покажем, что компоненты резольвенты $R^{a_i}_{A_k B_k}(z)$ являются матричными элементами резольвенты некоторого матричного оператора. Мы построим этот оператор и на его основе получим так называемые дифференциальные уравнения для компонент резольвенты и компонент волновых функций системы N тел.

В дальнейшем удобно использовать матричные обозначения. Компонентам $R^{a_i}_{A_k B_k}(z)$ и $M^{a_i}_{A_k B_k}(z)$ сопоставим матрицы $\mathbf{R}^{a_i}_k(z)$ и $\mathbf{M}^{a_i}_k(z)$, столбцы и строки которых нумеруются цепочками разбиений $A_k, B_k : A_k, B_k \subset a_i$. Определим матрицы $\mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z)$, $\mathbf{M}^{a_i}_{kj}(z)$, $\mathbf{V}^{a_i}_k$, $\mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)$ и $\mathbf{I}^{a_i}_k$ по формулам:

$$\left[\mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z)\right]_{A_k B_k} = R^{a_j}_{A_{j+1} B_{j+1}}(z)\delta_{a_j b_j}...\delta_{a_k b_k},$$

$$\left[\mathbf{M}^{a_i}_{kj}(z)\right]_{A_k B_k} = M^{a_j}_{A_{j+1} B_{j+1}}(z)\delta_{a_j b_j}...\delta_{a_k b_k},$$

$$[\mathbf{V}^{a_i}_k]_{A_k B_k} = V_{a_{N-1}}\delta_{a_{N-1} b_{N-1}}...\delta_{a_k b_k},$$

$$[\mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)]_{A_k B_k} = R_0(z)\delta_{a_{N-1} b_{N-1}}...\delta_{a_k b_k},$$

$$[\mathbf{I}^{a_i}_k]_{A_k B_k} = I\delta_{a_{N-1} b_{N-1}}...\delta_{a_k b_k}.$$

Введем числовую матрицу $\mathbf{X}^{a_i}_{kj}$, с помощью которой можно учесть ограничения при суммировании в уравнениях (9) и (12)

$$\left[\mathbf{X}^{a_i}_{kj}\right]_{A_k B_k} = X_{A_{j+1} B_{j+1}}\delta_{a_j b_j}...\delta_{a_k b_k},$$

$$X_{A_{j+1} B_{j+1}} = \overline{\delta}_{a_j b_j}\delta(b_{j+1} \subset a_j)...\delta(b_{N-1} \subset a_{N-2})\overline{\delta}_{a_{N-1} b_{N-1}}.$$

Здесь $\overline{\delta}_{ab} = 1 - \delta_{ab}$, а символ $\delta(b_{k+1} \subset a_k)$ понимается в следующем смысле

$$\delta(b_{k+1} \subset a_k) = \begin{cases} 1, & b_{k+1} \subset a_k \\ 0, & b_{k+1} \not\subset a_k. \end{cases}$$

Уравнения (9) и (12) в матричной форме принимают вид

$$\mathbf{M}^{a_i}_k(z) = \mathbf{M}^{a_i}_{kk}(z) - \mathbf{M}^{a_i}_{kk}(z)\mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)\mathbf{X}^{a_i}_{kk}\mathbf{M}^{a_i}_k(z), \tag{40}$$

$$\mathbf{R}^{a_i}_k(z) = \mathbf{R}^{a_i}_{kk}(z) - \mathbf{R}^{a_i}_{kk}(z)\mathbf{V}^{a_i}_k\mathbf{X}^{a_i}_{kk}\mathbf{R}^{a_i}_k(z). \tag{41}$$

Запишем также уравнения для матриц $\mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z)$, следующие из (41) и определения этих операторов

$$\mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z) = \mathbf{R}^{a_i}_{kj+1}(z) - \mathbf{R}^{a_i}_{kj+1}(z)\mathbf{V}^{a_i}_k\mathbf{X}^{a_i}_{kj+1}\mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z). \tag{42}$$

Нашей первой задачей будет доказательсво справедливости (42) для любого фиксированного k: $i+1 \le k \le N-1$ и любого j: $k \le j \le N-1$. Рассмотрим (42) при $j = N-1$. В этом случае уравнение (42) сводится к виду

$$R_{a_{N-1}}(z) = R_0(z) - R_0(z)V_{a_{N-1}}R_{a_{N-1}}(z)$$

с $R_{a_{N-1}}(z) = (H_0 + V_{a_{N-1}} - zI)^{-1}$ и представляет собой уравнение Липпманна-Швингера для двухчастичной резольвенты. Таким образом (42) справедливо при $j = N-1$. Предположим, что (42) верно на j–том шаге и докажем спреведливость на $j-1$–ом шаге. Оператор $\mathbf{R}^{a_i}_{kj-1}(z)$ имеет матричные элементы

$$\left[\mathbf{R}^{a_i}_{kj-1}(z)\right]_{A_k B_k} = R^{a_{j-1}}_{A_j B_j}(z)\delta_{a_{j-1}b_{j-1}}...\delta_{a_k b_k}.$$

В свою очередь компоненты $R^{a_{j-1}}_{A_j B_j}(z)$ определяются формулами

$$R^{a_{j-1}}_{A_j B_j}(z) = R^{a_{j+2}}_{A_{j+2}B_{j+2}}(z)\delta_{a_{j+1}b_{j+1}}\delta_{a_j b_j}$$
$$- \sum_{(d_{j+1}\neq a_{j+1})\subset a_j} \sum\nolimits'_{(C_{j+2}\neq D_{j+2})\subset a_{j+1}} R^{a_{j+2}}_{A_{j+2}C_{j+2}}(z) V_{c_{N-1}} R^{a_{j-1}}_{D_{j+1}B_{j+1}}(z). \tag{43}$$

Суммируя предыдущую формулу по a_j, используя правило [10, 23]

$$\sum_{a_j} \sum_{(d_{j+1}\neq a_{j+1})\subset a_j} = \sum_{d_{j+1}\neq a_{j+1}}$$

и уравнения (42) на j–том шаге, приходим к заключению, что

$$\sum_{a_j} R^{a_{j-1}}_{A_j B_j}(z) = R^{a_{j-1}}_{A_{j+1}B_{j+1}}(z). \tag{44}$$

Подставляя (44) в правую часть (43), получаем уравнения для компонент $R^{a_{j-1}}_{A_j B_j}(z)$, которые в матричной форме имеют вид

$$\left[\mathbf{X}^{a_i}_k + \mathbf{R}^{a_i}_{kj+1}(z)\mathbf{V}^{a_i}_k \mathbf{X}^{a_i}_{kj+1}\right]\mathbf{R}^{a_i}_{kj-1}(z) = \mathbf{R}^{a_i}_{kj+1}(z) - \mathbf{R}^{a_i}_{kj+1}(z)\mathbf{V}^{a_i}_k \mathbf{X}^{a_i}_{kj}\mathbf{R}^{a_i}_{kj-1}(z).$$

Откуда, благодаря уравнениям (42), записанным в форме

$$\left[\mathbf{X}^{a_i}_k + \mathbf{R}^{a_i}_{kj+1}(z)\mathbf{V}^{a_i}_k \mathbf{X}^{a_i}_{kj+1}\right]^{-1}\mathbf{R}^{a_i}_{kj+1}(z) = \mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z),$$

получаем требуемые уравнения на $j-1$–ом шаге

$$\mathbf{R}^{a_i}_{kj-1}(z) = \mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z) - \mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z)\mathbf{V}^{a_i}_k \mathbf{X}^{a_i}_{kj}\mathbf{R}^{a_i}_{kj-1}(z),$$

что завершает доказательство справедливости уравнений (42).

Уравнения (41) для операторов $\mathbf{R}^{a_i}_k(z)$ формально получаются из (42) при $j = k-1$ с отождествлением $\mathbf{R}^{a_i}_{kk-1}(z) = \mathbf{R}^{a_i}_k(z)$. Однако, (41) можно доказать и независимо от (42), повторяя практически дословно этапы доказательства уравнений (42). Чтобы избежать повторения мы не будем приводить здесь это доказательство и будем считать (41) доказанным.

Следующим этапом являтся построение операторов, для которых $\mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z)$ и $\mathbf{R}^{a_i}_k(z)$ являются резольвентами.

Дифференциальные уравнения для компонент резольвенты.
Рассмотрим оператор

$$\mathbf{H}_{kj}^{a_i} = H_0\mathbf{I}_k^{a_i} + \mathbf{V}_k^{a_i} + \mathbf{V}_k^{a_i} \sum_{m=j+1}^{N-1} \mathbf{X}_{km}^{a_i}.$$

В координатном представлении, благодаря тому что $H_0 = -\Delta_{\mathbf{X}}$, оператор $\mathbf{H}_{kj}^{a_i}$ является матричным дифференциальным оператором, действующим на вектор-функции, компоненты которых классифицируются цепочками разбиений A_k. Справедливо утверждение

Лемма 5.1. $\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z)$ – *резольвента оператора* $\mathbf{H}_{kj}^{a_i}$:

$$\left(\mathbf{H}_{kj}^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i}\right)\mathbf{R}_{kj}^{a_i}(z) = \mathbf{I}_k^{a_i}. \tag{45}$$

Доказательство. При $j = N-1$ уравнение (45) принимает вид

$$(H_0 + V_{a_{N-1}} - zI)R_{a_{N-1}}(z) = I$$

и тем самым по определению $R_{a_{N-1}}(z) = (H_0 + V_{a_{N-1}} - zI)^{-1}$ равенство (45) справедливо при $j = N-1$. Предположим, что (45) выполнено на j–том шаге. Рассмотрим оператор $\mathbf{R}_{kj-1}^{a_i}(z)$, удовлетворяющий уравнению (42) при $j = j-1$. Применяя оператор $\mathbf{H}_{kj}^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i}$ к обеим частям (42) при $j = j-1$, получим

$$\left(\mathbf{H}_{kj}^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i}\right)\mathbf{R}_{kj-1}^{a_i}(z) = \mathbf{I}_k^{a_i} - \mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{X}_{kj}^{a_i}\mathbf{R}_{kj-1}^{a_i}(z),$$

что совпадает с (45) на $j-1$ шаге. Тем самым мы доказали справедливость (45) при любом j. Лемма доказана.

Найдем теперь оператор, для которого $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ является резольвентой. Рассмотрим оператор

$$\mathbf{H}_k^{a_i} = \mathbf{H}_{kk}^{a_i} + \mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{X}_{kk}^{a_i}.$$

Лемма 5.2. *Оператор* $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ – *резольвента оператора* $\mathbf{H}_k^{a_i}$:

$$(\mathbf{H}_k^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i})\,\mathbf{R}_k^{a_i}(z) = \mathbf{I}_k^{a_i}. \tag{46}$$

Доказательство. Формула (46) немедленно следует из уравнений (41) и леммы 5.1 при $j = k$. Лемма доказана.

Нам осталось доказать сформулированное в разделе 2 коммутационное свойство

$$R_{A_kB_k}^{a_i}(z)V_{b_{N-1}} = R_0(z)M_{A_kB_k}^{a_i}(z),$$

которое в матричной форме принимает вид

$$\mathbf{R}_k^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i} = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_k^{a_i}(z). \tag{47}$$

Как и выше сначала докажем аналогичное равенство для операторов $\mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z)$ и $\mathbf{M}^{a_i}_{kj}(z)$.
Лемма 5.3. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z)\mathbf{V}^{a_i}_{k} = \mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)\mathbf{M}^{a_i}_{kj}(z). \tag{48}$$

Доказательство. При $j = N-1$ (48) эквивалентно соотношению $R_{a_{N-1}}(z)V_{a_{N-1}} = R_0(z)T_{a_{N-1}}(z)$ для парных резольвенты и T-матрицы. Для обоснования справедливости перехода $j \to j-1$ запишем в матричной форме уравнения для операторов $M^{a_{j-1}}_{A_jB_j}(z)$:

$$\mathbf{M}^{a_i}_{kj-1}(z) = \mathbf{M}^{a_i}_{kj}(z) - \mathbf{M}^{a_i}_{kj}(z)\mathbf{X}^{a_i}_{kj}\mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)\mathbf{M}^{a_i}_{kj-1}(z).$$

Домножая последнее уравнение слева на $\mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)$ и пользуясь (48), получаем

$$\mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)\mathbf{M}^{a_i}_{kj-1}(z) = \mathbf{R}^{a_i}_{kj}(z)\mathbf{V}^{a_i}_{k}\left[\mathbf{I}^{a_i}_{k} - \mathbf{X}^{a_i}_{kj}\mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)\mathbf{M}^{a_i}_{kj-1}(z)\right],$$

$$\left(\mathbf{H}^{a_i}_{kj} - z\mathbf{I}^{a_i}_{k}\right)\mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)\mathbf{M}^{a_i}_{kj-1}(z) + \mathbf{V}^{a_i}_{k}\mathbf{X}^{a_i}_{kj}\mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)\mathbf{M}^{a_i}_{kj-1}(z) = \mathbf{V}^{a_i}_{k},$$

что эквивалентно

$$\mathbf{R}^{a_i}_{kj-1}(z)\mathbf{V}^{a_i}_{k} = \mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)\mathbf{M}^{a_i}_{kj-1}(z).$$

Лемма доказана.
Равенство (47) следует теперь из (48) при $j = k$ и уравнений (40) и (41). Тем самым (47) доказано.

Заметим, что формула (48) позволяет переписать уравнение (41) в форме

$$\mathbf{R}^{a_i}_{k}(z) = \mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z) - \mathbf{R}^{a_i}_{0k}(z)\mathbf{M}^{a_i}_{kk}(z)\mathbf{X}^{a_i}_{kk}\mathbf{R}^{a_i}_{k}(z).$$

Как отмечалось выше, уравнения (46) представляют собой дифференциальные уравнения для компонент резольвенты. Запишем их в явной форме

$$(H_0 - z)R^{a_i}_{A_kB_k}(z) + V_{a_{N-1}}R^{a_i}_{A_kB_k}(z) + V_{a_{N-1}}\sum_{j=k+1}^{N-1}\sum_{(C_j\neq A_j)\subset a_{j-1}}{}' R^{a_i}_{A_k^{j-1}C_jB_k}(z)$$

$$+V_{a_{N-1}}\sum_{d_k\neq a_k}\sum_{(D_{k+1}\neq A_{k+1})\subset a_k}{}' R^{a_i}_{D_kB_k}(z) = I, \tag{49}$$

где $H_0 = -\Delta_{\mathbf{X}}$, $V_{a_{N-1}}$ – оператор умножения на потенциал $V_{a_{N-1}}(\mathbf{x}_{a_{N-1}})$, а I – единичный оператор. Уравнения (49) являются обобщением на случай N частиц системы дифференциальных уравнений Фаддеева для $N = 3$ [45]. Самые сложные уравнения, отвечающие полному гамильтониану системы N тел H, получаются из (49) при $i = 1$ и $k = 2$.

Обсудим свойства однородной системы уравнений (49).

$$(H_0 - z)U^{a_i}_{A_k} + V_{a_{N-1}}U^{a_i}_{A_k} + V_{a_{N-1}}\sum_{j=k+1}^{N-1}\sum_{(C_j\neq A_j)\subset a_{j-1}}{}' U^{a_i}_{A_k^{j-1}C_j}$$

$$+V_{a_{N-1}} \sum_{d_k \neq a_k} \sum_{(D_{k+1} \neq A_{k+1}) \subset a_k}' U^{a_i}_{D_k} = 0. \tag{50}$$

Покажем, что система (50) не имеет нетривиальных решений при $\Im mz \neq 0$. Перепишем эту систему в виде

$$(H_0 - z) U^{a_i}_{A_k} + V_{a_{N-1}} U^{a_i}_{A_k} + V_{a_{N-1}} \sum_{j=k+2}^{N-1} \sum_{(C_j \neq A_j) \subset a_{j-1}}' U^{a_i}_{A_k^{j-1} C_j}$$

$$+V_{a_{N-1}} \sum_{(D_{k+1} \neq A_{k+1}) \subset a_k}' U^{a_i}_{D_{k+1}} = 0, \tag{51}$$

где введено обозначение

$$\sum_{a_k \subset a_i} U^{a_i}_{A_k} = U^{a_i}_{A_{k+1}}.$$

Суммируя уравнения (51) по всем $a_k \subset a_i$, получим более простую систему для компонент $U^{a_i}_{A_{k+1}}$, которая получается из (50) заменой k на $k+1$. Продолжая описанную процедуру суммирования, придем к еще более простой системе для компонент $U^{a_i}_{A_{k+2}}$ и т.д.. На последнем шаге останется лишь одна компонента $U^{a_i} = \sum_{A_k} U^{a_i}_{A_k}$, удовлетворяющая уравнению Шредингера

$$(H_{a_i} - z) U^{a_i} = 0.$$

В силу самосопряженности H_{a_i} решение последнего уравнения тривиально при $\Im mz \neq 0$, т.е. $U^{a_i} = 0$. Покажем теперь, что величины $U^{a_i}_{a_{N-1}}$:

$$U^{a_i}_{a_{N-1}} = \sum_{A_k^{N-2}} U^{a_i}_{A_k}$$

равны нулю. Действительно, функции $U^{a_i}_{a_{N-1}}$ удовлетворяют уравнениям

$$(H_0 - z) U^{a_i}_{a_{N-1}} = -V_{a_{N-1}} \sum_{b_{N-1}} U^{a_i}_{b_{N-1}},$$

откуда в силу $U^{a_i} = \sum_{b_{N-1}} U^{a_i}_{b_{N-1}} \equiv 0$ и самосопряженности оператора H_0 следует, что $U^{a_i}_{a_{N-1}} = 0$. По этой причине из (51) при $k = N-2$ получаем для компонент $U^{a_i}_{A_{N-2}}$ уравнения

$$(H_{a_i} + V_{a_{N-1}} - z) U^{a_i}_{A_{N-2}} = 0$$

и, как и раньше, $U^{a_i}_{A_{N-2}} = 0$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что все $U^{a_i}_{A_k}$ равны нулю. Тем самым доказана теорема

Теорема 5.1. *Спектр операторов* $\mathbf{H}^{a_i}_k$ *вещественен: уравнения*

$$(\mathbf{H}^{a_i}_k - z \mathbf{I}^{a_i}_k) \mathbf{U}^{a_i}_k = 0 \tag{52}$$

при $\Im m z \neq 0$ имеют лишь тривиальные решения.

Теорема 5.1 позволяет получить связь между операторами $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ и $\mathbf{M}_k^{a_i}(z)$. Построим оператор $\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$ по формуле

$$\mathbf{G}_k^{a_i}(z) = -\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_k^{a_i}(z)\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z).$$

Из уравнений (40) и (48) получаем следующее уравнение для оператора $\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$

$$\mathbf{G}_k^{a_i}(z) = -\mathbf{R}_{kk}^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) - \mathbf{R}_{kk}^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{X}_k^{a_i}\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$$

или в "дифференциальной"форме

$$(\mathbf{H}_{kk}^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i} + \mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{X}_{kk}^{a_i})\mathbf{G}_k^{a_i}(z) = -\mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z). \tag{53}$$

Уравнения (53) для $\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$ и (46) для $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ отличаются лишь свободным членом. Поэтому естественно предположить, что $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ выражается линейно через $\mathbf{G}_k^{a_i}(z)$. Действительно, справедливо утверждение

Лемма 5.3. *Для операторов $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ при любом z: $\Im m z \neq 0$ верно представление*

$$\mathbf{R}_k^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) + \mathbf{G}_k^{a_i}(z)\mathbf{Y}_k^{a_i}, \tag{54}$$

где

$$\mathbf{Y}_k^{a_i} = \mathbf{I}_k^{a_i} + \sum_{m=k}^{N-1}\mathbf{X}_{km}^{a_i}.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $\hat{\mathbf{R}}_k^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) + \mathbf{G}_k^{a_i}(z)\mathbf{Y}_k^{a_i}$. Прямое вычисление ведет к уравнению

$$(\mathbf{H}_k^{a_i} - z\mathbf{I}_k^{a_i})\hat{\mathbf{R}}_k^{a_i}(z) = \mathbf{I}_k^{a_i}.$$

Отсюда и тривиальности решений уравнений (52) следует (54). Лемма доказана.

Запишем (54) в терминах операторов $\mathbf{M}_k^{a_i}$

$$\mathbf{R}_k^{a_i}(z) = \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z) - \mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z)\mathbf{M}_k^{a_i}(z)\mathbf{Y}_k^{a_i}\mathbf{R}_{0k}^{a_i}(z). \tag{55}$$

Формула (55) является обобщением на случай матричных операторов $\mathbf{H}_k^{a_i}$ стандартного соотношения между резольвентой и T-матрицей для операторов вида $H = H_0 + V$:

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z).$$

По этой причине оператор

$$\mathbf{T}_k^{a_i}(z) = \mathbf{M}_k^{a_i}(z)\mathbf{Y}_k^{a_i} \tag{56}$$

естественно назвать T-матрицей для матричного оператора $\mathbf{H}_k^{a_i}$. Равенства (55) допускают естественное обращение в виде

$$\mathbf{T}_k^{a_i}(z) = \mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{Y}_k^{a_i} - \mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{Y}_k^{a_i}\mathbf{R}_k^{a_i}(z)\mathbf{V}_k^{a_i}\mathbf{Y}_k^{a_i},$$

что вновь является обобщением на матричный случай стандартной формулы

$$T(z) = V - VR(z)V.$$

Дифференциальные уравнения для компонент волновых функций. Операторы $\mathbf{R}_k^{a_i}(z)$ позволяют аналогично разделу 3 построить собственные функции непрерывного спектра операторов $\mathbf{H}_k^{a_i}$. Будем рассматривать полную систему N частиц, которой отвечает случай $i = 1,\ k = 2$ и опускать в обозначениях индекс a_1. Как и в разделе 3, собственные функции оператора $\mathbf{H}_2$ определяются с помощью подходящих пределов $\mathbf{R}_2(z)$ на вещественной оси плоскости z. Будем рассматривать пределы $\mathbf{R}_2(z)$ на верхнем берегу разреза по вещественной оси. Соответствующие функции обычно снабжаются значком $+$. Мы не будем указывать это в обозначениях с целью экономии места. В выбранном нами случае собственные функции непрерывного спектра классифицируются начальными состояниями системы N тел. Вновь будем использовать функции $\chi_{b_l}(\mathbf{p}_l)$ и $\chi(\mathbf{P})$ из раздела 3, соответствующие l свободным кластерам ($\chi_{b_l},\ 2 \leq l < N$) и N свободным частицам (χ_0). Построим вектор-функции $\mathbf{\Psi}^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l})$ с компонентами

$$\psi_{A_2}^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l}) = \chi_{B_{l+1}}^{b_l}(\mathbf{p}_{b_l})\delta_{a_l b_l}...\delta_{a_2 b_2}$$

и вектор функции $\mathbf{\Psi}_0^{B_2}(\mathbf{P})$ с компонентами

$$\psi_{A_2}^{B_2}(\mathbf{P}) = \chi_0(\mathbf{P})\delta_{a_{N-1} b_{N-1}}...\delta_{a_2 b_2}.$$

Здесь $\chi_{B_{l+1}}^{b_l}$ – компоненты функции χ_{b_l}, построенные по формулам (16). Собственные функции непрерывного спектра оператора $\mathbf{H}_2$ определяются как пределы

$$\mathbf{\Phi}^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l}) = \lim_{\varepsilon \to +0} -i\varepsilon \mathbf{R}_2(E_{b_l} + i\varepsilon)\mathbf{\Psi}^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l}), \tag{57}$$

$$\mathbf{\Phi}^{B_2}(\mathbf{P}) = \lim_{\varepsilon \to +0} -i\varepsilon \mathbf{R}_2(E_0 + i\varepsilon)\mathbf{\Psi}_0^{B_2}(\mathbf{P}), \tag{58}$$

где $E_{b_l} = \mathbf{p}_{b_l}^2 - \varepsilon_{b_l}$, $E_0 = \mathbf{P}^2$.

Используя (46) при $k = 2,\ i = 1$, получаем из (57) и (58) уравнения для $\mathbf{\Phi}^{B_2^l}$ и $\mathbf{\Phi}^{B_2}$

$$(\mathbf{H}_2 - E_{b_l}\mathbf{I}_2)\mathbf{\Phi}^{B_2^l}(\mathbf{p}_{b_l}) = 0 \tag{59}$$

и

$$(\mathbf{H}_2 - E_0\mathbf{I}_2)\mathbf{\Phi}^{B_2}(\mathbf{P}) = 0, \tag{60}$$

которые являются обобщением трехчастичных дифференциальных уравнений Фаддеева [23] на случай системы N частиц. Явная форма уравнений (59), (60) имеет вид (50) при $z = E_{b_l}$ и $z = E_0$, соответственно. Собственные функции $\Psi_{b_l}^+$ (24) и Ψ_0^+ (27) оператора H восстанавливаются по компонентам функций $\mathbf{\Phi}^{B_2^l}$ и $\mathbf{\Phi}^{B_2}$ с помощью суммирования:

$$\Psi_{b_l}^+ = \sum_{A_2} \varphi_{A_2}^{B_2^l}$$

$$\Psi_0^+ = \sum_{A_2} \varphi_{A_2}^{B_2}.$$

Для однозначного определения компонент волновых функций в конфигурационном пространстве уравнения (59) и (60) необходимо дополнить асимптотическими граничными условиями. Эти условия, как и в разделе 4, можно получить с помощью исследования преобразований Фурье соответствующих объектов в импульсном пространстве. Аналогично разделу 4 приведем окончательный результат для компонент функций $\mathbf{\Phi}^{B_2^l}$ при $l = 2$. В этом случае цепочка B_2^l вырождается в одно разбиение b_2, фиксирующее начальное состояние системы. Асимптотический вид компонент функций $\mathbf{\Phi}^{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2})$ повторяет (38) и дается выражением

$$\varphi_{A_2}^{b_2}(\mathbf{X}, \mathbf{p}_{b_2}) = \psi_{A_3}^{a_2}(\mathbf{x}_{a_2}) \exp\{i(\mathbf{p}_{a_2}, \mathbf{y}_{a_2})\}\delta_{a_2 b_2} + \sum_{i=2}^{n} \psi_{A_{i+1}}^{a_i}(\mathbf{x}_{a_i}) U_{a_i b_2}^{A^{i-1}}(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}), \quad (61)$$

где $\psi_{A_{i+1}}^{a_i}$ – компоненты собственной функции ψ^{a_i} оператора h_{a_i}, построенные по формулам (16). Функции $U_{a_i b_2}^{A^{i-1}}(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2})$ при $|\mathbf{y}_{a_i}| \to \infty$ переходят в сферические волны

$$U_{a_i b_2}^{A^{i-1}}(\mathbf{y}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}) \sim C_{3(i-1)}(E_{a_i b_2}) \mathcal{H}_{a_i b_2}^{A^{i-1}}(\sqrt{E_{a_i b_2}}\hat{\mathbf{y}}_{a_i}, \mathbf{p}_{b_2}, E_{b_2} + i0)$$
$$\times |\mathbf{y}_{a_i}|^{-\frac{3i-4}{2}} \exp\{i\sqrt{E_{a_i b_2}}|\mathbf{y}_{a_i}|\}, \quad (62)$$

где $E_{a_i b_2} = E_{b_2} + \varepsilon_{a_i} = \mathbf{p}_{b_2}^2 - \varepsilon_{b_2} + \varepsilon_{a_i}$, $C_n(E) = -2\pi^2 E^{\frac{n-3}{4}} \exp\{-i\pi\frac{n-3}{4}\}$. Амплитуды $U_{a_i b_2}^{A^{i-1}}$ и $\mathcal{H}_{a_i b_2}^{A^{i-1}}$ связаны с сответствующими амплитудами $U_{a_i b_2}$ и $\mathcal{H}_{a_i b_2}$ из (38) и (39) формулами

$$U_{a_i b_2} = \sum_{A^{i-1}} U_{a_i b_2}^{A^{i-1}}$$

и

$$\mathcal{H}_{a_i b_2} = \sum_{A^{i-1}} \mathcal{H}_{a_i b_2}^{A^{i-1}}.$$

Список литературы

[1] Фаддеев Л.Д. *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц.* // Труды Матем. ин-та АН СССР им. В.А.Стеклова. 1963. Т. 63. С. 1-122.

[2] Weinberg S. *Systematic solution of multiparticle scattering problems.* // Phys. Rev. 1964. V. 133. № 1B. P. 232-256.

[3] Rosenberg L. *Generalized Faddeev integral equations for multiparticle scattering amplitudes.* // Phys. Rev. 1965. V. 140. № 1B. P. 217-226.

[4] Mitra A.N., Gillespie J., Sugar B., Panchapakesan N. *Faddeev formalizm for four-particle sysyem.* // Phys. Rev. 1965. V. 140. № 5B. P. 1336-1338.

[5] Alessandrini V.A. *Faddeev-type equations for the four-body problem.* // J. Math. Phys. 1966. V. 7. № 2. P. 213-220.

[6] Weyers J. *Formal theory of n-particle scattering.* // Phys. Rev. 1966. V. 145. № 4. P. 1236-1242.

[7] Mishima N., Takahashi J. *Four-particle scattering in nonrelativistic theory. II.* // Prog. Theor. Phys. 1966. V. 35. № 3. P.440-451.

[8] Omnes R. *Scattering approach to the N-body problem.* Phys. Rev. 1968. V. 165. P. 1265-1272.

[9] Vansani V. *The N-body problem.* // in: Few-Body Nuclear Physics. Vienna. 1978. P. 57.

[10] Якубовский О.А. *Об интегральных уравнениях теории рассеяния для N частиц.* // Ядерная физика. 1967. Т. 5. Вып. 6. С. 1312-1320.

[11] Якубовский О.А. *Строение резольвенты оператора Шредингера для системы N частиц с убывающим парным взаимодействием.* // Труды матем. ин-та АН СССР им. В.А.Стеклова. 1970. Т. 110. С. 146-177.

[12] Hepp K. *On the quantum mechanical N-body problem.* // Helv. Phys. Acta. 1969. V. 42. P. 425-458.

[13] Сигал И.М. *Асимптотическая полнота систем многих частиц.* // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 4. С. 795-798.

[14] Kato T. *Smooth operators and commutators.* Studia Math. 1968. V. 31. P. 535-546.

[15] Sigal I., Soffer A. *The N-particle scattering problem: Asymptotic completeness for short-range systems.* // Ann. Math. 1987. V. 126. P. 35-108.

[16] Derezinski J. *A new proof of the propagation theorem for N-body quantum systems.* // Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 203-231.

[17] Graf G.M. *Asymptotic completeness for N-body short-range quantum systems: A new proof.* // Commun. Math. Phys. 1990. V. 132. P. 73-101.

[18] Enss V. *Completeness of three-body quantum scattering.* in: Dinamics and Processes. (Ed. by Blanchard P., Streit L.) Springer Lecture Notes in Math. 1983. V. 103. P. 62-88.

[19] Yafaev D. *Radiation condition and scattering theory for N-particle Hamiltonians.* // Commun. Math. Phys. 1993. V. 154. P. 523-554.

[20] Yafaev D. *Eigenfunctions of the continuous spectrum for the N-particle Schrödinger operator.* in: Spectral and Scattering Theory. Proceedings of the Taniguchi international workshop (Ed. by M. Ikawa). Marcel Dekker, Inc. 1994. P. 259-286.

[21] Вильдермут К., Тан Я. *Единая теория ядра.* М.: Мир. 1980.

[22] Меркурьев С.П., Яковлев С.Л. *Дифференциальная формулировка задачи рассеяния для системы N тел.* // Доклады АН СССР, 1982, т. 262, № 3, с. 591-594.

[23] Меркурьев С.П., Яковлев С.Л. *Квантовая теория рассеяния для N тел в конфигурационном пространстве.* // Теор. Мат. Физ. 1983, т. 56, № 1, с. 60-73.

[24] Яковлев С.Л. *Дифференциальные уравнения Якубовского для четырех нуклонов.* // В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории систем нескольких частиц с сильным взаимодействием. Ленинград, 1983, с. 38-39.

[25] Меркурьев С. П., Яковлев С.Л. *О квантовой задаче рассеяния для четырех тождественных частиц, взаимодействующих в s-состоянии.* // Ядерная физика, 1984, т. 39, вып. 6, с. 1580-1587.

[26] Яковлев С.Л. *О трехкратных столкновениях в квантовой задаче рассеяния для системы четырех частиц.* // В кн. Микроскопические расчеты легких ядер. Калинин, 1984, с. 96-110.

[27] Merkuriev S.P., Yakovlev S.L., Gignoux C. *Four body Yakubovsky equations for identical particles.* // Nucl. Phys. 1984. V. A431. P. 125-138.

[28] Квицинский А.А., Куперин Ю.А., Меркурьев С.П., Мотовилов А.К., Яковлев С.Л. *Квантовая задача N тел в конфигурационном пространстве.* // Элем. част. и атом. Ядро. 1986, т. 17, № 2, с. 267-317.

[29] Яковлев С.Л. *Координатные асимптотики волновых функций для системы четырех частиц.* // В кн.: Микроскопические методы в теории систем нескольких частиц. Тезисы докладов международного семинара 15-21 августа 1988 г., Калинин, 1988, с. 70-71.

[30] Яковлев С.Л. *Координатная асимптотика волновой функции для системы четырех частиц, свободных в начальном состоянии.* // Теор. мат. физ., 1990, т. 82, № 2, с. 224-241.

[31] Меркурьев С.П., Филихин И.Н., Яковлев С.Л. *Расчет низкоэнергетических характеристик рассеяния в системе трех частиц.* // В кн.: Теория квантовых систем с сильным взаимодействием. Тверской гос. ун-т. Тверь. 1990, с. 58-66.

[32] Меркурьев С.П., Мотовилов А.К., Яковлев С.Л. *Задача нескольких тел в модели граничных условий и обобщенные потенциалы.* // Теор. мат. физ. 1993, т. 94, № 3, с. 435-447.

[33] Филихин И.Н., Яковлев С.Л. *Расчет характеристик низкоэнергетического рассеяния для системы трех заряженных частиц.* // Вестник С. Петерб. ун-та. , 1992, сер. 4, вып. 3, с. 24-29.

[34] Яковлев С.Л., Филихин И.Н. *Метод сильной связи каналов для уравнений Фаддеева. Низкоэнергетическое нуклон-дейтронное рассеяние.* // Ядерная физика, 1993, т. 56, вып. 12, с. 98-106.

[35] Руднев В.А., Яковлев С.Л. *О ложных решениях уравнений Фаддеева.* // Ядерная физика, 1995, т. 58, № 10, с. 1762-1771.

[36] Яковлев С.Л. *О спектральных свойствах уравнений Фаддеева.* // Теор. мат. физ., 1995, т. 102, № 3, с. 323-336.

[37] Яковлев С.Л., Филихин И.Н. *Расчет состояний рассеяния в системе n-^3H на основе уравнений для компонент Якубовского в конфигурационном пространстве.* // Ядерная физика, 1995, т. 58, № 5, с. 817-828.

[38] Яковлев С.Л. *Дифференциальные уравнения Фаддеева как спектральная задача для несимметричного оператора.* // Теор. мат. физ., 1996, т. 107, № 3, с. 513-528.

[39] Yakovlev S.L., Filikhin I.N. *Cluster reduction of the four-body Yakubovsky equations in configuration space for bound-state problem and low-energy scattering.* // Ядерная физика, 1997, т. 60, № 11, с. 1962-1970.

[40] Yakovlev S.L., Filikhin I.N. *Computations of scattering lengths in nnpp system within cluster reduction method for Yakubovsky equations.* // In : Few-body XV conference handbook. XVth international conference on few-body problem in physics. Groningen, the Netherlands 22-26 July 1997 (Ed. by L.P.Kok et al), p. 157.

[41] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* // М. Мир. 1972.

[42] Народецкий И.М., Якубовский О.А. *Интегральные уравнения теории рассеяния для N часиц.* // В кн.: Проблема нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1980. С. 183-226.

[43] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 3. // М. Мир. 1979.

[44] Меркурьев С.П. *Координатная асимптотика волновой функции для системы трех частиц.* // Теор. мат. физ. 1971. Т. 8. С. 235-250.

[45] Noyes H.P., Fiedelday H. *Calculations of three-nucleon low-energy parameters.* // В кн.: Three-particle scattering in quantum mecanics. New-York-Amsterdam. 1968. P. 195-293.

[46] Merkuriev S.P., Gignoux C., Laverne A. *Three-body scattering in configuration space.* // Ann. of Phys. 1976. V. 99. P. 30-71.

[47] Меркурьев С.П. *Координатная асимптотика волновых функций для системы трех заряженных частиц.* // Теор. мат. физ. 1977. Т. 32. № 2. С. 187-207.

[48] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Механика.* Т. 1. // М. Наука. 1973.

[49] Буслаев В.С. *Об асимптотическом поведении спектральных характеристик внешних задач для оператора Шредингера.* // Изв. АН СССР, сер. матем. 1975. Т. 39. № 1. С. 149-235.

[50] Меркурьев С.П. *Строение резольвенты оператора энергии системы трех заряженных частиц.* // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1978. Т. 77. С. 148.

[51] Федорюк М.В. *Метод перевала.* // М.: Наука. 1977.

[52] Жигунов В.П., Захарьев В.Н. *Метод сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния.* // М.: Атомиздат, 1974.

[53] Повзнер А.Я. // Мат. сборник. 1953. Т. 32. С. 109.

[54] Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* // М.: Наука. 1972.

[55] Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц.* // М.: Наука. 1985.

[56] Levin F.S. // Phys. Rev., 1980. V. C21. P. 2199.

[57] Levin F.S. // Ann.of Phys. 1980 . V. 13. P.139.

[58] Sandhas W. // in *Few Body Dynamics*, Amsterdam, North-Holland, 1976. P. 540.

[59] Evans J.W. // J. Math. Phys., 1981. V. 22. P. 1672.

[60] Evans J.W., Hoffman D.K. // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 2858.

[61] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* // Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

[62] Данфорт Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Спектральные операторы* . // М.: Мир, 1974.

[63] Glöckle W. // Nucl. Phys. 1970. V. A141. P. 620

[64] Ландау Л.Д., Лифшиц И.М. *Квантовая механика (нерелятивистская теория).* Т. 3. // М.: Физматгиз. 1963.

[65] Malfliet R.A., Tjon J.A. // Ann. Phys. (New-York). 1970. V. 61. P. 425

[66] Abramovitz M. Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions.* // N.Y.: Dover. 1972.

[67] Payne G.L., Friar J.L, Gibson B.F. // Phys. Rev. 1980. V. C22. P. 823

[68] Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L. // Phys. Rev. 1983. V. C28. P. 983

[69] Benayoun J.J., Gignoux C., Chauvin J. // Phys. Rev. 1989. V. C23. P. 1854

[70] Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L. // Phys. Rev. 1989. V. C39. P. 1264

[71] Tjon J.A. // Phys. Lett. 1976. V. B63. P. 391

[72] Левашов В.П. // Ядерная физика. 1983. Т. 38. С. 566

[73] Fonseca A.C. // Few Body Systems. 1986. V. 1. P. 69

[74] Беляев В.Б., Пупышев В.В. // Ядерная физика. 1982. Т. 35. С. 905

[75] Heiss P., Hackenboich H.H. // Nucl. Phys. 1971. V. A202. P. 353

[76] Seagrave J.D., Berman B.L., Phillips T.W. // Phys. Lett. 1980. V. B91. P. 200

[77] Fonseca A.C. // Phys. Rev. 1982. V. C30. P. 35

[78] Kharchenko V.F., Levashov V.P. // Nucl.Phys. 1980. V. A343. P. 317.

[79] Fonseca A.C. // Phys.Rev. 1984. Vol. C. 30. P. 35.

[80] Ciesielski F., Carbonell J., Gignoux C., // Preprint ISN96, Grenoble, 1996.

[81] Adhikari S.K. // Phys. Rev. 1981. V. C23. P. 16.

[82] I.R. Afnan, Y.C. Tang, Phys. Rev. // 1968. V. 175. P. 1337.

[83] N.W. Schellingerhout, J.J. Schut, L.P. Kok // Phys. Rev. 1992. V. C46. P. 1192.

[84] Kamada H., Glöckle W. // Nucl. Phys. 1992. V. A548. P. 205

[85] Tjon J.A. // Phys. Lett. 1975. V. B56. P. 217; 1976. V. B63. P. 391.

[86] Василевский В.С., Коваленко Т.Н., Филиппов Г.Ф. // Ядерная физика 1987. Т. 48. Вып. 2. С. 346.

[87] Sears V.F., Khanna F.C. // Phys. Lett. 1975. V. B56. C. 1.

[88] Харченко В.Ф. // ЭЧАЯ 1979. Т. 10. С. 884.

[89] V.P. Alfimenkov и др. // Ядерная Физика 1981. Т. 33. С. 33.

[90] Kaiser H. *et.al.,* // Phys.Lett. 1977. V. B71. P. 321.

[91] Firman S., Meyerhof W.E. // Nucl. Phys. 1973. V. A206. P. 1.

[92] Kobschal G., *et.al.,* // Nucl.Phys. 1983. V. A405. P. 648.

[93] Базь А.И. // ЖЭТФ 1957. Т. 33. С. 923.

[94] Thompson D.R. // Nucl. Phys. 1970. V. A357. P. 304.

[95] Hofman H.M., Zahn W., Stowe H. // Nucl. Phys. 1981. V. A357. P. 139.

[96] Kanada H., Kaneko T., Tang Y.C. // Phys. Rev.1986. V. C34. P. 22.

[97] Василевский В.С., Коваленко Т.Н., Филиппов Г.Ф. // Ядерная физика 1987. Т. 48. Вып. 2. С. 346.

[98] Дубовиченко С.Б. // Ядерная физика 1995. Т. 58. С. 1973.

[99] Als-Nielsen J., Dietrich O. // Phys.Rev. 1964. V. B133. P. 925.