Уравнения АГС
и их применение

Н.В. Шевченко
(ИЯФ Ржеж, Чехия)

Уравнения Альта-Грассбергера-Сандхаса (АГС): нерелятивистское описание динамики нескольких частиц

Оригинальные работы:

•Фаддеев Л. Д., *ЖЭТФ* **39** (1960) 1459,
•Фаддеев Л.Д., Тр. Матем. ин-та АН СССР, т.1 (1963) 69,
•E.O. Alt, P. Grassberger, and W. Sandhas, Nucl. Phys. B2 (1967) 167.

Лекции и книги:

•W. Sandhas, The three-body problem,
Acta Physica Austriaca, Suppl. IX (1972) 57.
•Шмидт Э., Цигельман Х., Проблема трех дел в квантовой механике,
М., Наука, 1979
•Беляев В.Б. Лекции по теории малочастичных систем,
М., Энергоатомиздат, 1986.

План:

1. Двухчастичное vs трехчастичное рассеяние

2. Уравнения АГС в операторной форме

3. Интегральные уравнения АГС и их особенности

4. Примеры физических задач

2-частичная задача

Гамильтониан:

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V$$

приведенная масса:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

3-частичная задача

3 возможных разбиения:

$$\left| \vec{p}_i, \vec{q}_i \right\rangle = \left| \vec{p}_i \right\rangle \left| \vec{q}_i \right\rangle$$

Гамильтониан:

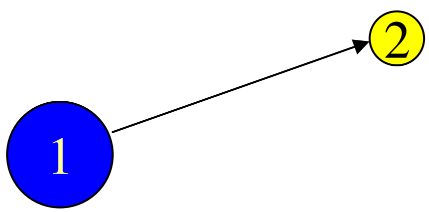
$$H = \frac{p_i^2}{2\mu_i} + \frac{q_i^2}{2M_i} + V_1 + V_2 + V_3$$

приведенные массы:

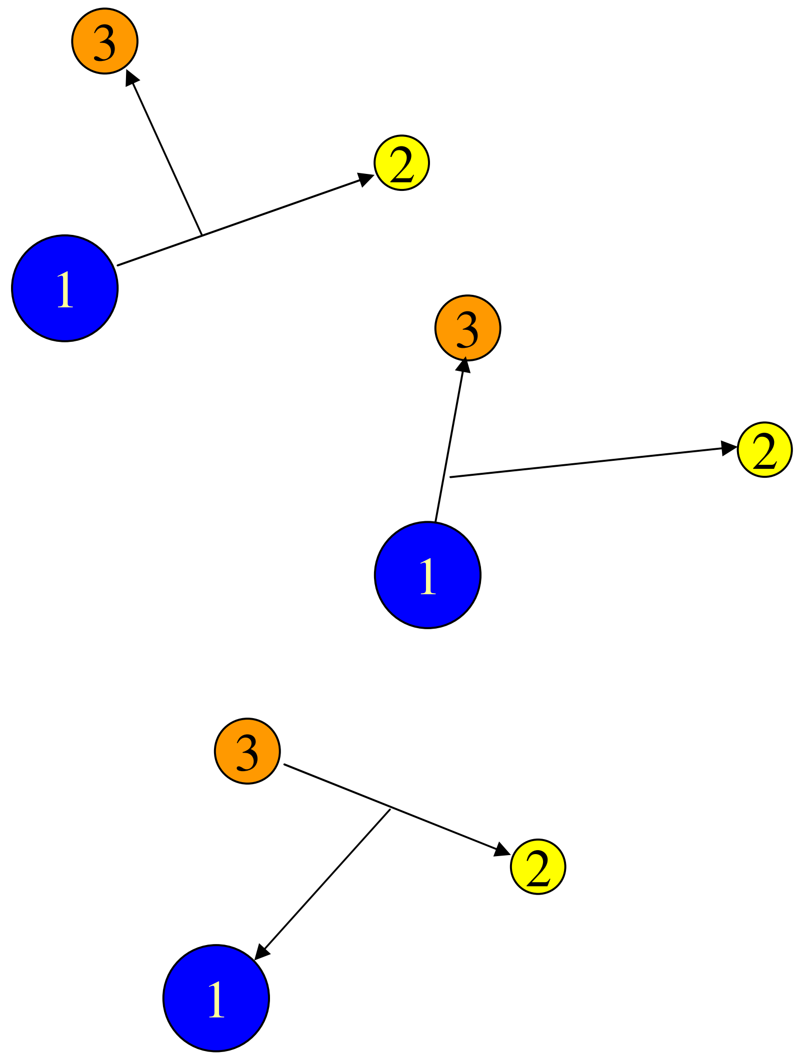
$$\mu_i = \frac{m_j m_k}{m_j + m_k}, \qquad M_i = \frac{m_i (m_j + m_k)}{m_i + m_j + m_k}$$

$$i \neq j \neq k, \quad i, j = 1, 2, 3$$

2-частичная задача



3-частичная задача



2-частичная задача

Свободный гамильтониан:

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu}, \quad H = H_0 + V$$

$|\vec{p}\rangle$ -его собственное состояние

3-частичная задача

Канальные гамильтонианы:

$$H_i = \frac{p_i^2}{2\mu_i} + \frac{q_i^2}{2M_i} + V_i, \quad H = H + \overline{V}_i$$

Аналог плоских волн – канальные состояния:

$$H_i \, \phi_{in} = E_{in} \, \phi_{in}$$

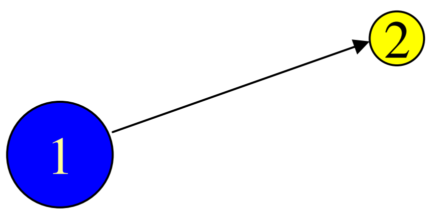
$$\phi_{in} = |\psi_{in}\rangle |\vec{q}_i\rangle$$

$|\phi_{in}\rangle$ - 3-частичное собственное состояние

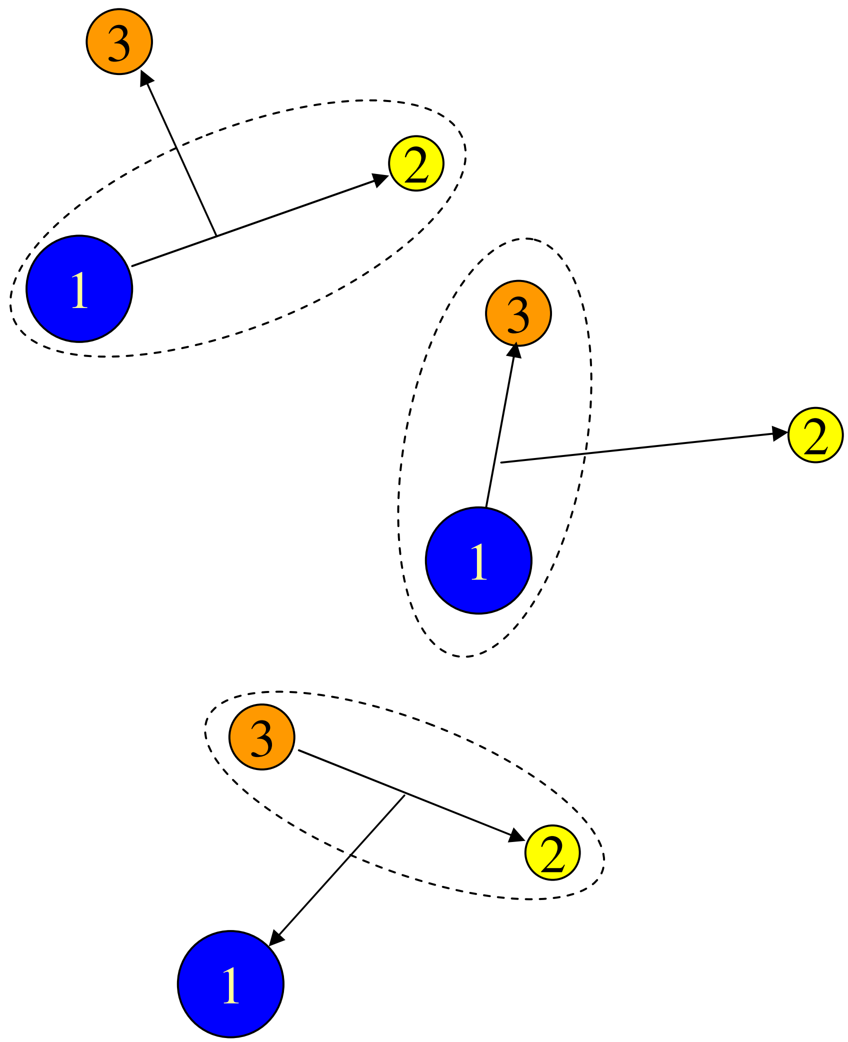
$|\psi_{in}\rangle$ - 2-частичное связанное состояние

3-частичная энергия: $E_{in} = \dfrac{q_i^2}{2M_i} + E_{in}^{(2)}$

2-частичная задача



3-частичная задача



2-частичная задача

Свободный гамильтониан:

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu}, \qquad H = H_0 + V$$

$\left|\vec{p}\right\rangle$ -его собственное состояние

3-частичная задача

Развальный канал (канал $i = 0$):

$$H_0 = \frac{p_i^2}{2\mu_i} + \frac{q_i^2}{2M_i} \quad (V_0 = 0), \qquad H = H_0 + V$$

$\left|\phi_0\right\rangle = \left|\vec{p}_i\right\rangle \left|\vec{q}_i\right\rangle$ -3-частичные собственные функции

3-частичная энергия: $E_0 = \dfrac{q_i^2}{2M_i} + \dfrac{p_i^2}{2\mu_i}$

2-частичная задача | 3-частичная задача

Собственные состояния полного гамильтониана

$$\left|\vec{p}^{(\pm)}\right\rangle = \Omega^{(\pm)}\left|\vec{p}\right\rangle$$

$$S_{\vec{p}'\vec{p}} = \left\langle \vec{p}'^{(-)} \middle| \vec{p}^{(+)} \right\rangle$$

$$\psi_{i\,n}^{(\pm)} = \Omega_i^{(\pm)}\phi_{i\,n}$$

$$S_{jm,in} = \left\langle \psi_{jm}^{(-)} \middle| \psi_{in}^{(+)} \right\rangle$$

$\Omega^{(\pm)}$ - операторы Меллера

$\Omega_i^{(\pm)}$ - канальные операторы Меллера

2-частичная задача

Состояния

рассеяния | связанные

Спектры: разделены

$E \geq 0$ | $E_n < 0$

собственные векторы: ортогональны

$\left| \vec{p}^{(\pm)} \right\rangle$ | $\left| \psi_n \right\rangle$

3-частичная задача

$$H \ \psi_{i\,n}^{(\pm)} = E_{i\,n} \ \psi_{i\,n}^{(\pm)}$$

Полный гамильтониан:
непрерывный спектр энергии
начинается с отрицательного значения

$$E_{in} = \frac{q_i^2}{2M_i} + \mathrm{E}_{in}^{(2)} \geq \mathrm{E}_{i1}^{(2)}$$

Спектры разных каналов перекрываются!

$$E_{in} = E_{jm}$$

Интегральные уравнения на состояния рассеяния:
(переход к стационарной постановке)

2-частичная задача

3-частичная задача

$$\psi_a^{(+)} = \Omega^{(+)}\phi_a = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon \int_{-\infty}^{0} dt\; e^{\varepsilon\, t} e^{iH\, t} e^{-iH_0\, t}\phi_a$$

$$\left|\,\vec{p}^{\,(+)}\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\; G(E+i\varepsilon)\left|\,\vec{p}\right\rangle$$

$$G(z) = (z-H)^{-1}$$

- функция Грина (резольвента) H

Если ввести свободную функцию Грина:

$$G_0(z) = (z-H_0)^{-1}$$

и учесть

$$G_0^{-1}(z) - G^{-1}(z) = H - H_0 = V \quad \Rightarrow$$

2-частичная задача

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\ V\ G(z)$$

$$G(z) = G_0(z) + G(z)\ V\ G_0(z)$$

-второе резольвентное уравнение. С его помощью получается уравнение Липпманна- Швингера для состояний рассеяния:

$$\left|\vec{p}^{(+)}\right\rangle = \left|\vec{p}\right\rangle + G_0(E+i\varepsilon)\ V\ \left|\vec{p}^{(+)}\right\rangle$$

и для связанных состояний:

$$\left|\psi_n\right\rangle = G_0(E_n)\ V\ \left|\psi_n\right\rangle$$

Для обоих уравнений существуют единственные решения

3-частичная задача

Интегральные уравнения на состояния рассеяния:
(переход к стационарной постановке)

2-частичная задача | 3-частичная задача

$$\psi_a^{(+)} = \Omega^{(+)}\phi_a = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{-\infty}^{0} dt\ e^{\varepsilon\, t}e^{iH\, t}e^{-iH_0\, t}\phi_a$$

2-частичная задача

$$\left|\vec{p}^{\,(+)}\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon\ G(E+i\varepsilon)\left|\vec{p}\right\rangle$$

$$G(z) = (z-H)^{-1}$$

- функция Грина (резольвента) H

Если ввести свободную функцию Грина:

$$G_0(z) = (z-H_0)^{-1}$$

и учесть

$$G_0^{-1}(z) - G^{-1}(z) = H - H_0 = V \quad \Rightarrow$$

3-частичная задача

$$\psi_{in}^{(+)} = i\varepsilon\ G(E_{in}+i\varepsilon)\ \phi_{in}$$

$$G(z) = (z-H)^{-1}$$

- функция Грина H

Если ввести канальную - “свободную” функцию Грина:

$$G_i(z) = (z-H_i)^{-1}$$

и учесть

$$G_i^{-1}(z) - G^{-1}(z) = \overline{V}_i \quad \Rightarrow$$

2-частичная задача

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\ V\ G(z)$$
$$G(z) = G_0(z) + G(z)\ V\ G_0(z)$$

-второе резольвентное уравнение. С его помощью получается уравнение Липпманна- Швингера для состояний рассеяния:

$$\left|\vec{p}^{(+)}\right\rangle = \left|\vec{p}\right\rangle + G_0(E+i\varepsilon)\ V\ \left|\vec{p}^{(+)}\right\rangle$$

и для связанных состояний:

$$\left|\psi_n\right\rangle = G_0(E_n)\ V\ \left|\psi_n\right\rangle$$

Для обоих уравнений существуют единственные решения

3-частичная задача

$$G(z) = G_i(z) + G_i(z)\ \overline{V}_i\ G(z)$$
$$G(z) = G_i(z) + G(z)\ \overline{V}_i\ G_i(z)$$

При действии им на ϕ_{in}

$$\psi_{in}^{(+)} = \frac{i\varepsilon}{E_{in} + i\varepsilon - H_i}\phi_{in} + G_i(E_{in} + i\varepsilon)\ \overline{V}_i\ \psi_{in}^{(+)}$$

$$\Rightarrow\ \psi_{in}^{(+)} = \phi_{in} + G_i(E_{in} + i\varepsilon)\ \overline{V}_i\ \psi_{in}^{(+)}$$

При действии на ϕ_{jm} , имеющее ту же энергию $E_{jm} = E_{in}$

$$\psi_{jm}^{(+)} = \frac{i\varepsilon}{E_{jm} + i\varepsilon - H_i}\phi_{jm} + G_i(E_{in} + i\varepsilon)\ \overline{V}_i\ \psi_{jm}^{(+)}$$

$$\Rightarrow\ \psi_{jm}^{(+)} = G_i(E_{in} + i\varepsilon)\ \overline{V}_i\ \psi_{jm}^{(+)}$$

<u>2-частичная задача</u>

Уравнение Липпманна-Швингера для состояний рассеяния:

$$\left|\vec{p}^{\,(+)}\right\rangle = \left|\vec{p}\right\rangle + G_0(E+i\varepsilon)\ V\ \left|\vec{p}^{\,(+)}\right\rangle$$

для связанных состояний:

$$\left|\psi_n\right\rangle = G_0(E_n)\ V\ \left|\psi_n\right\rangle$$

Для обоих уравнений существуют единственные решения

(спектры разделены)

<u>3-частичная задача</u>

$$\Rightarrow\ \psi_{in}^{(+)} = \phi_{in} + G_i(E_{in}+i\varepsilon)\ \overline{V}_i\ \ \psi_{in}^{(+)}$$

$$\Rightarrow\ \psi_{jm}^{(+)} = G_i(E_{in}+i\varepsilon)\ \overline{V}_i\ \ \psi_{jm}^{(+)}$$

одновременно существуют решения неоднородного (рассеяние в канале *i*) и однородного (рассеяние в канале *j*) уравнений –

решение не единственно!

(спектры перекрываются)

3-частичная задача

- Спектры разных каналов перекрываются $\Rightarrow$
- Уравнения на состояния рассеяния, содержащие отдельные канальные состояния, не имеют единственное решение $\Rightarrow$
- Необходимо учитывать все каналы одновременно

Интегральные уравнения на операторы перехода:
(переход к стационарной постановке)

<u>2-частичная задача</u>

S-матрица имеет вид:

$$S_{\vec{p}\,'\vec{p}} = \delta\left(\vec{p}\,' - \vec{p}\right) - 2\pi i\ \delta\left(\frac{p'^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2\mu}\right)\left\langle \vec{p}\,'\right| T\left(\frac{p^2}{2\mu} + i\varepsilon\right)\left|\vec{p}\right\rangle$$

где T определен через

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\ T(z)\ G_0(z)$$

<u>3-частичная задача</u>

2-частичная задача

Подставляем

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\ T(z)\ G_0(z)$$

во второе резольвентное уравнение

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\ V\ G(z)\ \Rightarrow$$

$$\boxed{T(z) = V + V\ G_0(z)\ T(z)}$$

-уравнение Липпманна-Швингера

3-частичная задача

Интегральные уравнения на операторы перехода:
(переход к стационарной постановке)

<u>2-частичная задача</u>

S-матрица имеет вид:

$$S_{\vec{p}\,'\vec{p}} = \delta\left(\vec{p}\,' - \vec{p}\right) - 2\pi i\ \delta\left(\frac{p'^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2\mu}\right)\left\langle \vec{p}\,'\right| T\left(\frac{p^2}{2\mu} + i\varepsilon\right)\left|\vec{p}\right\rangle$$

где T определен через

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\ T(z)\ G_0(z)$$

<u>3-частичная задача</u>

$$S_{jm,in}\left(\vec{q}_j\,', \vec{q}_i\right) = \delta_{ij}\delta_{mn}\delta\left(\vec{q}_j\,' - \vec{q}_i\right) -$$
$$-2\pi i\ \delta\left(E_{jm}\,' - E_{in}\right)\left\langle \vec{q}_j\,'\right|\left\langle \psi_{jm}\right| U_{ji}\left(E_{in} + i\varepsilon\right)\left|\psi_{in}\right\rangle\left|\vec{q}_i\right\rangle$$

$$G(z) = \delta_{ji} G_i(z) + G_j(z)\ U_{ji}(z)\ G_i(z)$$

$\Rightarrow U_{ji}(z)$ - оператор перехода, аналог T-матрицы

2-частичная задача

Подставляем

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\ T(z)\ G_0(z)$$

во второе резольвентное уравнение

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\ V\ G(z) \ \Rightarrow$$

$$\boxed{T(z) = V + V\ G_0(z)\ T(z)}$$

-уравнение Липпманна-Швингера

3-частичная задача

Подставляем

$$G(z) = \delta_{ji} G_i(z) + G_j(z)\ U_{ji}(z)\ G_i(z)$$

в

$$G(z) = G_j(z) + G_j(z)\ \overline{V}_j\ G(z) \ \Rightarrow$$

$$\boxed{U_{ji} = \left(1 - \delta_{ji}\right) G_0^{-1} + \sum_{k \neq j} T_k G_0 U_{ki}}$$

-уравнение Альта-Грассбергера-Сандхаса (связывает все каналы рассеяния)

Для процесса развала $(i \neq 0,\ j = 0)$

$$U_{0i} = G_0^{-1} + \sum_k T_k G_0 U_{ki}$$

2-частичная задача

Уравнение Липпманна-Швингера

$$\boxed{T(z) = V + V\ G_0(z)\ T(z)}$$

$$T(\vec{p}\,', \vec{p}; z) = \langle \vec{p}\,' | T(z) | \vec{p} \rangle$$

определен без ограничений на значения импульсов и энергии, тогда как

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 \mu^2 \left| T(\vec{p}\,', \vec{p}; E + i\varepsilon) \right|^2,$$

$$p'^2 = p^2 = 2\mu E$$

3-частичная задача

Уравнение Альта-Грассбергера-Сандхаса

$$\boxed{U_{ji} = \left(1 - \delta_{ji}\right) G_0^{-1} + \sum_{k \neq j} T_k G_0 U_{ki}}$$

Двухчастичные операторы T_k

$$T_k(z) = V_k + V_k\ G_0(z)\ T_k(z),$$

T_k -оператор, действующий в 3-частичном пространстве:

$$\langle \vec{q}\,'_k, \vec{p}\,'_k | T_k(z) | \vec{q}_k, \vec{p}_k \rangle =$$

$$\delta\left(\vec{q}\,'_k - \vec{q}_k\right) \langle \vec{p}\,'_k | T_k^{(2)}\left(z - \frac{q_k^2}{2M_k}\right) | \vec{p}_k \rangle$$

$T_k^{(2)}$ -настоящий 2-частичный оператор

2-частичная задача

Уравнение Липпманна-Швингера

$$\boxed{T(z) = V + V\ G_0(z)\ T(z)}$$

3-частичная задача

Уравнение Альта-Грассбергера-Сандхаса

$$\boxed{U_{ji} = \left(1 - \delta_{ji}\right) G_0^{-1} + \sum_{k \neq j} T_k G_0 U_{ki}}$$

Если переписать его в виде

$$U_{ji} = \left(1 - \delta_{ji}\right) G_0^{-1} + \sum_{k} \left(1 - \delta_{jk}\right) G_0^{-1} G_0 T_k G_0 U_{ki}$$

видно, что АГС имеют структуру, аналоничную уравнению Липпманна-Швингера:

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{T},$$

где

$$\mathbf{T}_{ji} = U_{ji}$$

$$\mathbf{V}_{ji} = \left(1 - \delta_{ji}\right) G_0^{-1}$$

$$\mathbf{G}_{0,ji} = \delta_{ji} G_0 T_i G_0$$

2-частичная задача

3-частичная задача

Вводим резольвенту:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{T}\mathbf{G}_0,$$

$$\mathbf{G}_{ji} = G_0\left\{\delta_{ji}V_i + V_j G V_i\right\}G_0 = G_0 M_{ji} G_0$$

Если, как в 2-частичном случае написать

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{V}\mathbf{G}$$

и подставить значения операторов, то

$$M_{ji} = \delta_{ji}T_i + T_j G_0 \sum_k \left(1 - \delta_{jk}\right) M_{ki}$$

-уравнения, полученные Фаддеевым.

Сепарабельные потенциалы

Потенциал вида (одночленный сепарабельный): $V = \lambda|\chi\rangle\langle\chi|$ соответствует T-матрице

$$T = |\chi\rangle \tau(z) \langle\chi|,$$

$$\tau(z) = \left(\lambda^{-1} - \langle\chi|G_0(z)|\chi\rangle\right)^{-1}$$

В импульсном представлении

$$\langle\vec{p}\,'|V|\vec{p}\rangle = \lambda\, \chi(\vec{p}\,')\, \chi^*(\vec{p}) \;\Rightarrow$$

$$\langle\vec{p}\,'|T(z)|\vec{p}\rangle = \frac{\chi(\vec{p}\,')\, \chi^*(\vec{p})}{\lambda^{-1} - \int d\vec{p}\,'' \dfrac{|\chi(\vec{p}\,'')|^2}{z - p''^2/2\mu}}$$

Волновая функция связанного состояния: $|\psi\rangle = N\; G_0(E_B)|\chi\rangle$

<u>Уравнения АГС для сепарабельных потенциалов</u>

Для описания рассеяния $i+(jk)\to j+(ki)$ необходимо найти

$$\left\langle \phi_j \middle| U_{ji}\left(E+i\varepsilon\right) \middle| \phi_i \right\rangle = \left\langle \vec{q}_j{}' \middle| \left\langle \psi_j \middle| U_{ji}\left(E+i\varepsilon\right) \middle| \psi_i \right\rangle \middle| \vec{q}_i \right\rangle =$$

для сепарабельного потенциала:

$$= \left\langle \vec{q}_j{}' \middle| \left\langle \chi_j \middle| G_0(z)\; U_{ji}\left(E+i\varepsilon\right)\; G_0(z) \middle| \chi_i \right\rangle \middle| \vec{q}_i \right\rangle$$

Нужно найти оператор

$$X_{ji}(z) = \left\langle \chi_j \middle| G_0(z)\; U_{ji}\left(E+i\varepsilon\right)\; G_0(z) \middle| \chi_i \right\rangle$$

в импульсном пространстве. Если ввести

$$Z_{ji}(z) = \left(1-\delta_{ji}\right)\left\langle \chi_j \middle| G_0(z) \middle| \chi_i \right\rangle,$$

уравнение АГС превращается в

$$X_{ji}(z) = Z_{ji}(z) + \sum_{k=1}^{3} Z_{jk}(z)\; \tau_k\left(z-\frac{q_k^2}{2M_k}\right) X_{ki}(z)$$

$$\boxed{X_{ji}(z) = Z_{ji}(z) + \sum_{k=1}^{3} Z_{jk}(z)\ \tau_k \left(z - \frac{q_k^2}{2M_k} \right) X_{ki}(z)}$$

Двухчастичный T-оператор в трехчастичном пространстве:

$$\left\langle \vec{q}\,'_k, \vec{p}\,'_k \left| T_k(z) \right| \vec{q}_k, \vec{p}_k \right\rangle = \delta\left(\vec{q}\,'_k - \vec{q}_k\right) \chi(\vec{p}\,'_k) \left\langle \vec{p}\,'_k \left| \tau_k \left(z - \frac{q_k^2}{2M_k} \right) \right| \vec{p}_k \right\rangle \chi^*(\vec{p}_k)$$

Амплитуда рассеяния и дифф. сечение процесса $i + (jk) \to j + (ki)$:

$$f(\vec{q}_j\,', \vec{q}_i; z) = -(2\pi)^2 \sqrt{M_i\ M_j} \left\langle \vec{q}_j\,' \left| X_{ji}(z) \right| \vec{q}_i \right\rangle,$$

$$\frac{d\sigma(\vec{q}_j\,', \vec{q}_i; z)}{d\Omega} = \frac{\vec{q}_j\,'}{\vec{q}_j} \left| f(\vec{q}_j\,', \vec{q}_i; z) \right|^2$$

Для описания рассеяния из состояния *1+(23)* нужно решить систему:

$$X_{11}(z) = \qquad Z_{12}(z)\ \tau_2\left(z-\frac{q_2^2}{2M_2}\right)X_{21}(z)+Z_{13}(z)\ \tau_3\left(z-\frac{q_3^2}{2M_3}\right)X_{31}(z)$$

$$X_{21}(z) = Z_{21}(z)+\ Z_{21}(z)\ \tau_1\left(z-\frac{q_1^2}{2M_1}\right)X_{11}(z)+Z_{23}(z)\ \tau_3\left(z-\frac{q_3^2}{2M_3}\right)X_{31}(z)$$

$$X_{31}(z) = Z_{31}(z)+\ Z_{31}(z)\ \tau_1\left(z-\frac{q_1^2}{2M_1}\right)X_{11}(z)+Z_{32}(z)\ \tau_2\left(z-\frac{q_2^2}{2M_2}\right)X_{21}(z)$$

которая в импульсном представлении после введения промежуточных состояний превращается в систему интегральных уравнений $\Rightarrow$

$$\langle \vec{q}\,'_1 | X_{11}(z) | \vec{q}_1 \rangle = \int d\vec{q}\,''_2 \langle \vec{q}\,'_1 | Z_{12}(z) | \vec{q}\,''_2 \rangle \; \tau_2\left(z - \frac{q''^2_2}{2M_2} \right) \; \langle \vec{q}\,''_2 | X_{21}(z) | \vec{q}_1 \rangle +$$

$$+ \int d\vec{q}\,''_3 \langle \vec{q}\,'_1 | Z_{13}(z) | \vec{q}\,''_3 \rangle \; \tau_3\left(z - \frac{q''^2_3}{2M_3} \right) \; \langle \vec{q}\,''_3 | X_{31}(z) | \vec{q}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{q}\,'_2 | X_{21}(z) | \vec{q}_1 \rangle = \langle \vec{q}\,'_2 | Z_{21}(z) | \vec{q}_1 \rangle \; +$$

$$+ \int d\vec{q}\,''_1 \langle \vec{q}\,'_2 | Z_{21}(z) | \vec{q}\,''_1 \rangle \; \tau_1\left(z - \frac{q''^2_1}{2M_1} \right) \; \langle \vec{q}\,''_1 | X_{11}(z) | \vec{q}_1 \rangle +$$

$$+ \int d\vec{q}\,''_3 \langle \vec{q}\,'_2 | Z_{23}(z) | \vec{q}\,''_3 \rangle \; \tau_3\left(z - \frac{q''^2_3}{2M_3} \right) \; \langle \vec{q}\,''_3 | X_{31}(z) | \vec{q}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{q}\,'_3 | X_{31}(z) | \vec{q}_1 \rangle = \langle \vec{q}\,'_3 | Z_{31}(z) | \vec{q}_1 \rangle \; +$$

$$+ \int d\vec{q}\,''_1 \langle \vec{q}\,'_3 | Z_{31}(z) | \vec{q}\,''_1 \rangle \; \tau_1\left(z - \frac{q''^2_1}{2M_1} \right) \; \langle \vec{q}\,''_1 | X_{11}(z) | \vec{q}_1 \rangle +$$

$$+ \int d\vec{q}\,''_2 \langle \vec{q}\,'_3 | Z_{32}(z) | \vec{q}\,''_2 \rangle \; \tau_2\left(z - \frac{q''^2_2}{2M_2} \right) \; \langle \vec{q}\,''_2 | X_{21}(z) | \vec{q}_1 \rangle$$

Для решения необходимо:

- знать все двухчастичные T-матрицы,
- определить матричные элементы операторов

$$\left\langle \vec{q}\,'_j \middle| Z_{ji}(z) \middle| \vec{q}\,''_i \right\rangle = \left\langle \vec{q}\,'_j \middle| \left\langle \chi_j \middle| G_0(z) \middle| \chi_i \right\rangle \middle| \vec{q}\,''_i \right\rangle$$

- провести разложение матричных операторов по парциальным волнам

(3-частичный угловой момент складывается из момента пары и 3-ей частицы по отношению к паре; на пактике - низшие значения орбитальных моментов)

- в случае наличия тождественных бозонов (нуклонов) провести антисимметризацию
- учесть спиновые и изоспиновые (если есть) степени свободы

При решении системы начальный импульс и трехчастичная энергия – параметры, решается система одномерных интегральных уравнений

<u>Сингулярности ядер уравнений АГС</u>

<u>Сингулярности 2-частичной *T*-матрицы</u>

Двухчастичный *T*-оператор в трехчастичном пространстве:

$$\left\langle \vec{q}\,'_k, \vec{p}\,'_k \right| T_k(z) \left| \vec{q}_k, \vec{p}_k \right\rangle = \delta\left(\vec{q}\,'_k - \vec{q}_k\right) \chi(\vec{p}\,'_k) \left\langle \vec{p}\,'_k \right| \tau_k\left(z - \frac{q_k^2}{2M_k} \right) \left| \vec{p}_k \right\rangle \chi^*(\vec{p}_k)$$

имеет полюс при энергии, равной двухчастичной энергии связи.

$$z - \frac{q_k^2}{2M_k} = E_B^{(2)}$$

Для любого процесса рассеяния $z = \frac{q_k^2}{2M_k} + E_{B,k}^{(2)} \geq E_B^{(2)} \quad \Rightarrow$

полюс в ядре интегральных уравнений присутствует.

Исключение: поиск связанного состояния $z < E_B^{(2)} \quad \Rightarrow$ полюса нет.

Сингулярности “потенциала” Z

При положительной 3-частичной энергии открыт порог 3-частичного развала-

появляются полюсы в $\left\langle \vec{q}\,'_j \middle| Z_{ji}(z) \middle| \vec{q}\,''_i \right\rangle = \left\langle \vec{q}\,'_j \middle| \left\langle \chi_j \middle| G_0(z) \middle| \chi_i \right\rangle \middle| \vec{q}\,''_i \right\rangle$

$$Z_{ji}(\vec{q}\,'_j, \vec{q}\,''_i; z) \sim \frac{m_k}{q'_j\, q''_i} \left(y_{ji}(q'_j, q''_i; z) + i\varepsilon - \cos\theta \right),$$

$$y_{ji}(q'_j, q''_i; z) = \frac{m_k}{q'_j\, q''_i} \left(z - \frac{q'^2_j}{2\mu_{jk}} - \frac{q''^2_i}{2\mu_{ik}} \right)$$

проекция на парциальные волны:

$$Z_{L,ji}(q'_j, q''_j; z) \sim \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_L(\cos\theta)\; d(\cos\theta)}{y_{ji}(q'_j, q''_i; z) + i\varepsilon - \cos\theta} =$$

$$=\frac{1}{2}\left[P\int_{-1}^{1}\frac{P_L(\cos\theta)\,d(\cos\theta)}{y_{ji}(q'_j,q''_i;z)+i\varepsilon-\cos\theta}-i\pi\int_{-1}^{1}\delta\Big(y_{ji}(q'_j,q''_i;z)-\cos\theta\Big)P_L(\cos\theta)\,d(\cos\theta)\right]$$

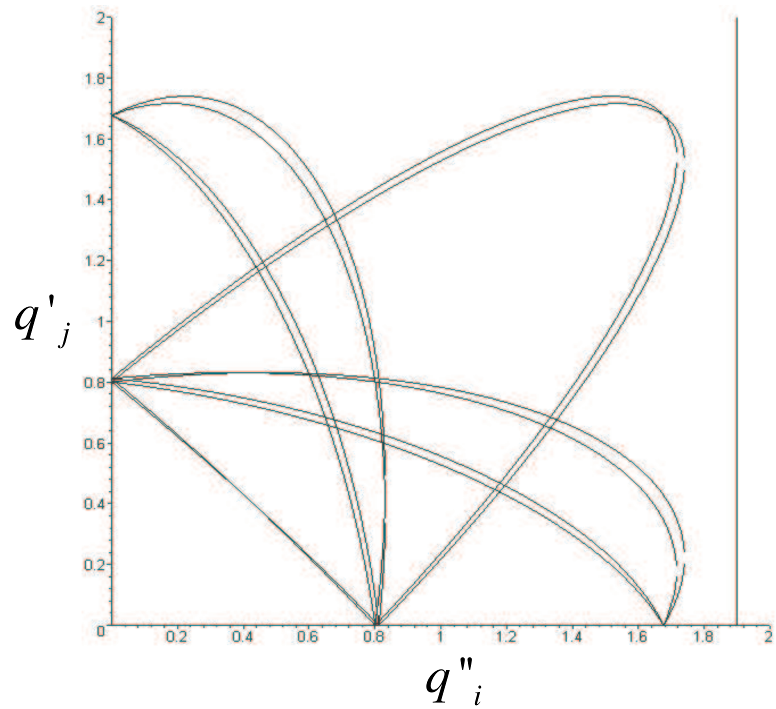
$\Rightarrow$ в функции $Z_{L,ji}(q'_j,q''_j;z)$

имеется разрез при

$$-1<y_{ji}(q'_j,q''_i;z)<1$$

и логарифмические сингулярности в точках

$$y_{ji}(q'_j,q''_i;z)=\pm 1$$



<u>Сингулярности ядер АГС:</u>

связанные состояния $z < E_{B,k}^{(2)}$	сингулярностей нет
упругое рассеяние под порогом 3-частичного развала $E_{B,k}^{(2)} < z < 0$	полюс двухчастичной T-матрицы
рассеяние над порогом 3-частичного развала $z > 0$	полюс двухчастичной T-матрицы + логарифмические сингулярности

Возможные усложнения:

- неодночленные сепарабельные двухчастичные потенциалы и T-матрицы,
- несепарабельные двухчастичные потенциалы и T-матрицы,
- наличие спиновых, изоспиновых степеней свободы
- использование высших парциальных волн
- связанные каналы
- учет 3-частичных сил (?)

$\Rightarrow$ рост числа уравнений в системе

Уравнения АГС использовались:

- для вычисления параметров связанных состояний
  и рассеяния в 3- и 4-нуклонных системах (^{3}H, ^{3} He, ^{4}He)

- описание ядер с использованием кластерных моделей

- описание молекулярных состояний
  (не атомных – проблема с кулоновским взаимодействием)

- описание рассеяния мезонов на легчайших ядрах
  (π, η на d, ^{3}H, ^{3}He)

- вычисление параметров квазисвязанного состояния - резонанса в
  системе $\bar{K}NN - \pi\Sigma$N

Антикаон-ядерные состояния – интересные экзотические объекты

Связаны с вопросами:

• *Взаимодействие антикаонов с нуклонами*
одновременное описание атомных данных и данных по рассеянию
$\Lambda(1405)$ (связанное состояние для $\bar{K}N$ и резонанс для $\pi\Sigma$? Два резонанса? Иное?)

• *Глубина $\bar{K}$ -ядерного оптического потенциала*
анализ атомных данных (170-200 MeV)
киральные модели (60-100 MeV)

• *Свойства антикаонов в среде, еффективная масса*

• *Каонный конденсат (нейтронные звезды)*

Существуют ли такие состояния?
Достаточно ли они узкие для экспериментального наблюдения?

K^-pp связанное состояние

Глубокое и узкое связанное K^- pp связанное состояние
(G-матричный расчет, оптический потенциал): E_B = - 48 MeV, Γ = 61 MeV
T. Yamazaki and Y. Akaishi, Phys. Lett. B535 (2002) 70

Коллаборация FINUDA: указание на существование глубокого связанного состояния (коррелированний вылет Λ и *p*) с E_B = -115 MeV, Γ = 67 MeV:
M. Agnello et. al., Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 212303

альтернативная интерпретация результатов эксперимента:
V.K. Magas, E. Oset, A. Ramos, H. Toki, Phys. Rev. C 74 (2006) 025206,
M. Agnello et. al., Nucl. Phys. A. 775 (2006) 35

⇒ 3-частичные фаддеевские уравнения в форме АГС для связанных $\bar{K}NN - \pi\Sigma N$ каналов

Каонные атомные и ядерные состояния

– необходимо знать **базовое антикаон-нуклонное** взаимодействие

Существующие $\bar{K}N$ потенциалы:

- Потенциалы, используемые в мало- или многочастичных расчетах (еффективные оптические потенциалы, одноканальная форма):

слишком просты, плохое воспроизведение экспериментальных данных

- Потенциалы “сами по себе” (наиболее популярны “киральные потенциалы”, многоканальные):

невозможно использовать в малочастичных расчетах

Был сконструирован потенциал:

1. воспроизводящий все экспериментальные данные и
2. пригодный для малочастичных расчетов

Существующая информация о $\bar{K}N$ взаимодействии

- Сильно связан с $\pi\Sigma$ каналом через $\Lambda(1405)$ резонанс

$$\text{PDG:}\ \ E_\Lambda = 1406.5 - i\ 25.0\ \text{MeV},\ \ I = 0$$

Обычное предположение:

резонанс в $I = 0$ $\pi\Sigma$ и квазисвязанное состояние в $I = 0$ $\bar{K}N$ канале

Альтернативная версия:

$\Lambda(1405)$ - эффект двух близко расположенных полюсов

J. A. Oller, U. G. Meissner, Phys. Lett. B 500 (2001) 263,

D. Jido et. al, Nucl. Phys. A 725 (2003) 181

- Данные по рассеянию:

- Сечения $K^- p \to K^- p$ и $K^- p \to MB$ реакций,

- Пороговые отношения γ, R_c, и R_n

*D.N. Tovee et al., Nucl. Phys. B*33 (1971) 493,

*R.J. Nowak et al., Nucl. Phys. B*139 (1978) 61

- длина $K^- p$ рассеяния (KEK):

$$a_{K^- p}^{\mathrm{KEK}} = -(0.78 \pm 0.15 \pm 0.03) + i\ (0.49 \pm 0.25 \pm 0.12)\ \mathrm{fm}$$

M. Iwasaki et al., Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 3067,

T.M. Ito et al., Phys. Rev. C 58 (1998) 2366

Получена с помощью формулы Десера-Трумена:

S. Deser et al., Phys. Rev. 96 (1954) 774, T.L. Trueman, Nucl. Phys. 26 (1961) 57

$$\Delta E_{1\mathrm{s}} + i\frac{\Gamma_{1\mathrm{s}}}{2} = 2\ \alpha^3 \mu^2 a_{K^- p}, \quad \Delta E_{1\mathrm{s}} = E_{2\mathrm{p}\to 1\mathrm{s}}^{\mathrm{exp}} - E_{2\mathrm{p}\to 1\mathrm{s}}^{\mathrm{Coulomb}}$$

модельно-независима, но неточна.

Экспериментально измерены: сильный сдвиг и ширина *1s* уровня атома каонного водорода

$$\Delta E_{1s}^{KEK} = -323 \pm 63 \pm 11\ \mathrm{eV},\ \Gamma_{1s}^{KEK} = 407 \pm 208 \pm 100\ \mathrm{eV}$$

- длина $K^- p$ рассеяния (DEAR):

$$a_{K^- p}^{\mathrm{DEAR}} = -(0.468 \pm 0.090 \pm 0.015) + i\ (0.302 \pm 0.135 \pm 0.036)\ \mathrm{fm}$$

G. Beer et al., Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 212302

Экспериментально измерены: сильный сдвиг и ширина *1s* уровня атома каонного водорода

$$\Delta E_{1s}^{DEAR} = -193 \pm 37 \pm 6\ \mathrm{eV},\ \ \Gamma_{1s}^{DEAR} = 249 \pm 111 \pm 30\ \mathrm{eV}$$

Более свежие и точные данные, но не согласуются с данными по рассеянию

B.Borasoy, R.Nißler, and W.Weise, Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 213401;
Eur. Phys. J. A 25 (2005) 79;
B. Borasoy, U.-G. Meißner, and R. Nißler, Phys. Rev. C 74 (2006) 055201.

Был построен феноменологический $\bar{K}N - \pi\Sigma$ потенциал с 1- и 2-польной структурой $\Lambda(1405)$ резонанса, воспроизводящий:

- Измеренные 1s $K^- p$ сдвиг уровня и его ширину (KEK или DEAR),
- Сечения $K^- p \to K^- p$ и $K^- p \to MB$ реакций,
- Пороговые отношения γ и $R_{\pi\Sigma} = \dfrac{R_c}{1 - R_n(1 - R_c)}$,

и пригодный для использования в малочастичных расчетах

J. Révai, N.V. Shevchenko, Phys. Rev. C 79 (2009) 035202

Нарушающие изоспин эффекты:

1. Каонный водород: явное включение **кулоновского взаимодействия**
2. Использование **физических масс**:

$$m_{K^-},\ m_{\bar{K}^0},\ m_p,\ m_n \quad \text{вместо} \quad m_{\bar{K}},\ m_N$$

Уравнения для связанных $\bar{K}N - \pi\Sigma$ каналов

плюс кулоновское взаимодействие в $K^- p$ подсистеме: $V = V_c + V_s$

Сильная часто полного потенциала сепарабельна

$$V_{s,I}^{\alpha\beta} = \left| g_I^\alpha \right\rangle \lambda_I^{\alpha\beta} \left\langle g_I^\beta \right|; \qquad \alpha, \beta = K \text{ or } \pi; \qquad I = 0 \text{ or } 1$$

Форм-факторы:

- 1-полюсной $\Lambda(1405)$:

$$g_{I,1pole}^\alpha(k^\alpha) = \frac{1}{(k^\alpha)^2 + (\beta_I^\alpha)^2} \quad \text{для } \alpha = K \ (\bar{K}N \text{ канал) или } \pi \ (\pi\Sigma \text{ канал)}$$

- 2-полюсной $\Lambda(1405)$:

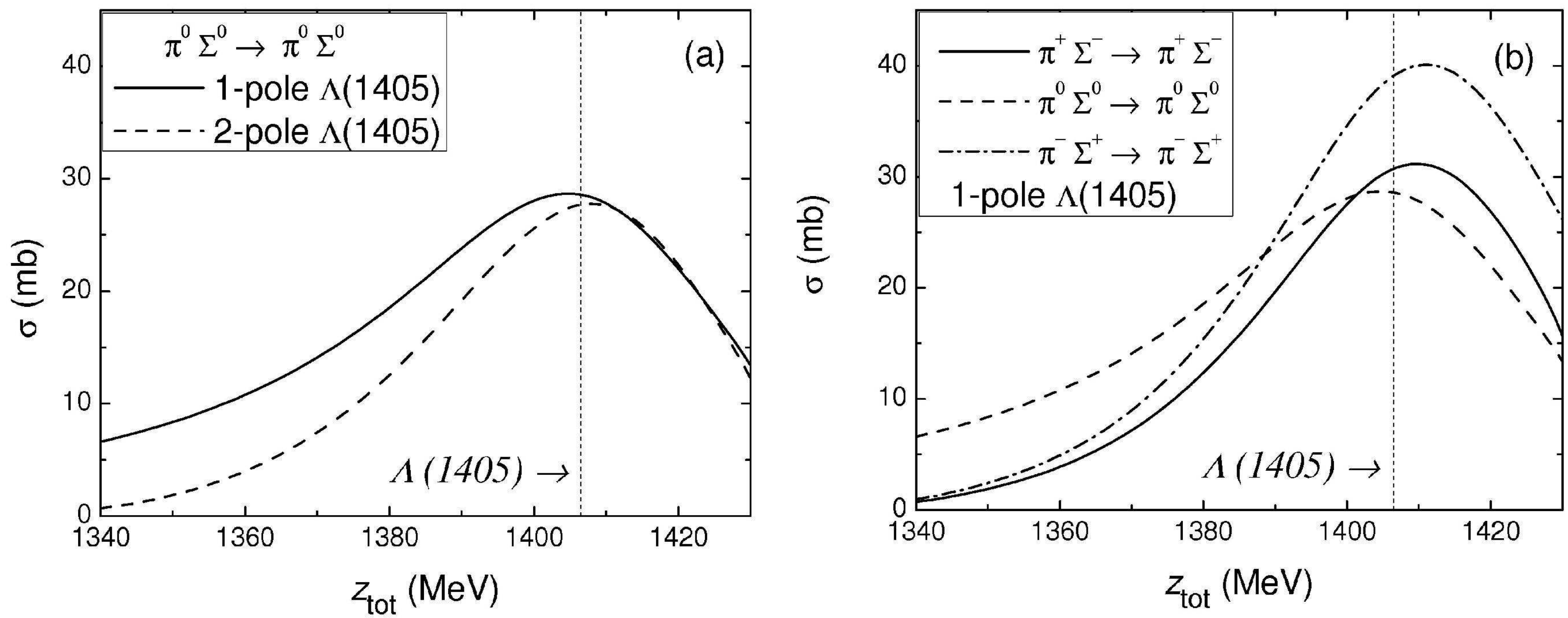
$$g_{I,1pole}^\alpha(k^\alpha) = \frac{1}{(k^\alpha)^2 + (\beta_I^\alpha)^2} \qquad \text{для } \alpha = K \ (\bar{K}N \text{ канал)}$$

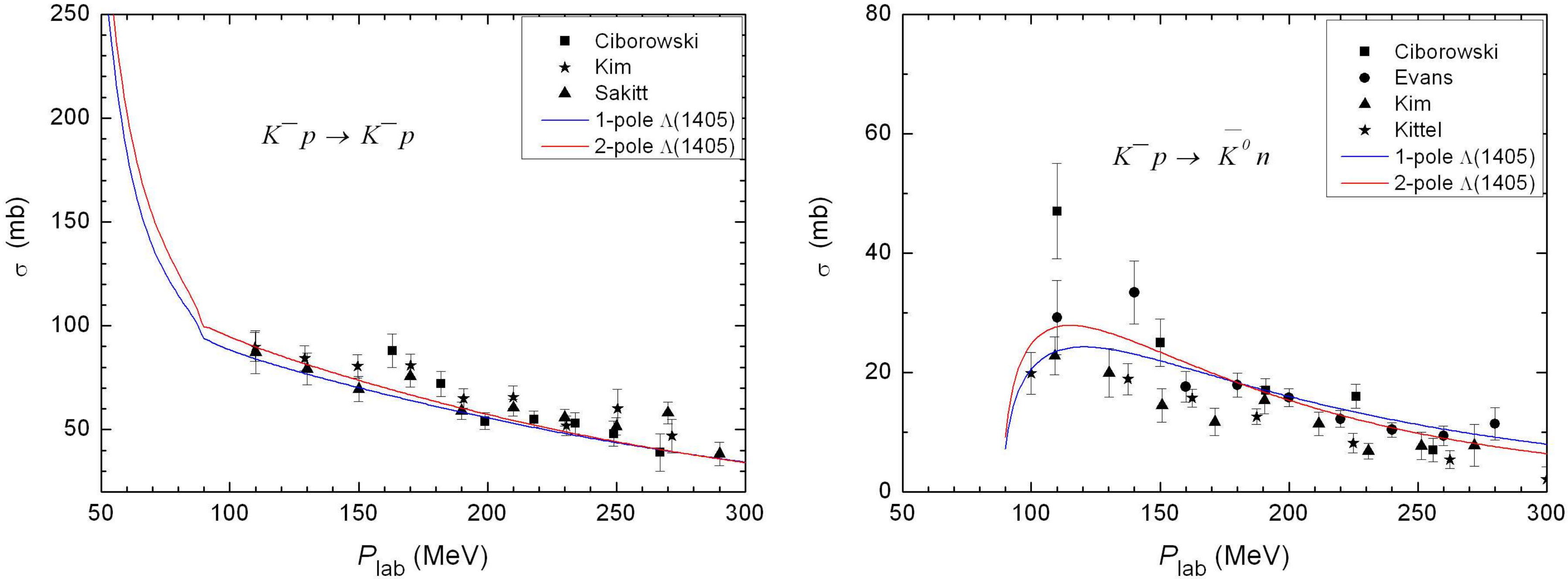
$$g_{I,2pole}^\alpha(k^\alpha) = \frac{1}{(k^\alpha)^2 + (\beta_I^\alpha)^2} + \frac{s\ (\beta_I^\alpha)^2}{[\ (k^\alpha)^2 + (\beta_I^\alpha)^2\ ]^2} \qquad \text{для } \alpha = \pi \ (\pi\Sigma \text{ канал).}$$

Одно- и двух-полюсной *Λ(1405)* резонанс

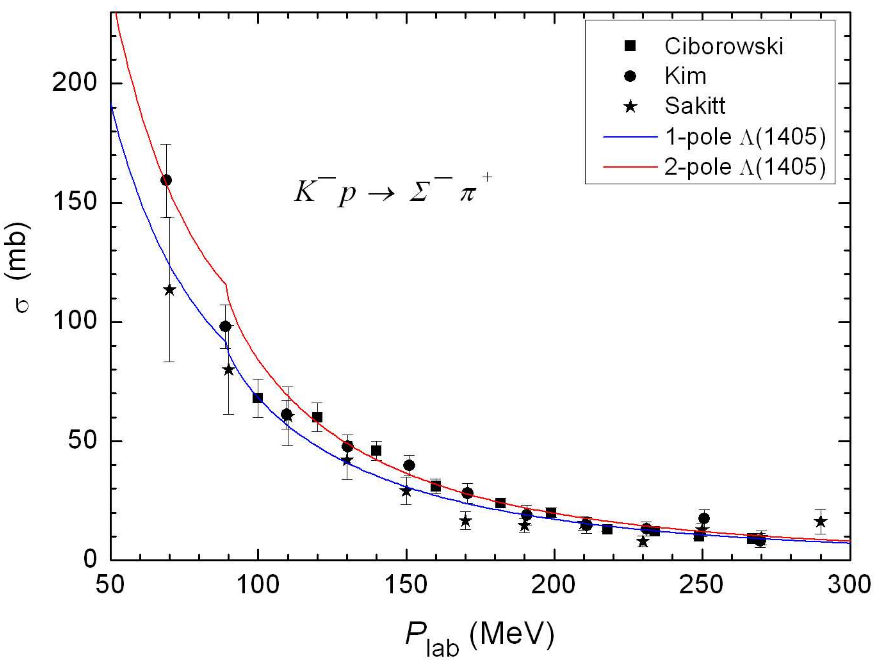
”1-полюсной”, полюс:
$1409 - i\,32$ MeV

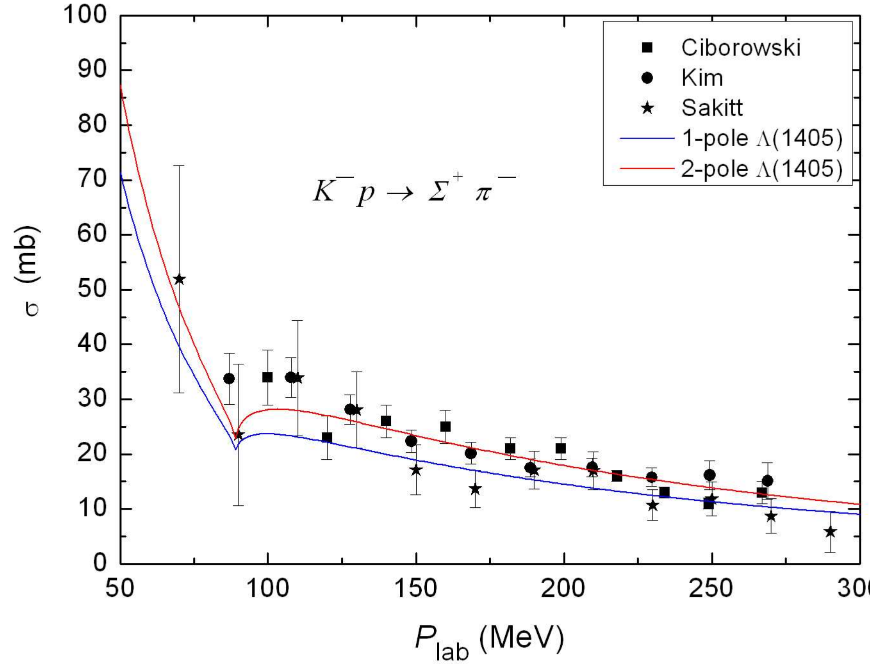
“2-полюсной”, полюса:
$1412 - i\,32$ MeV,
$1380 - i\,105$ MeV

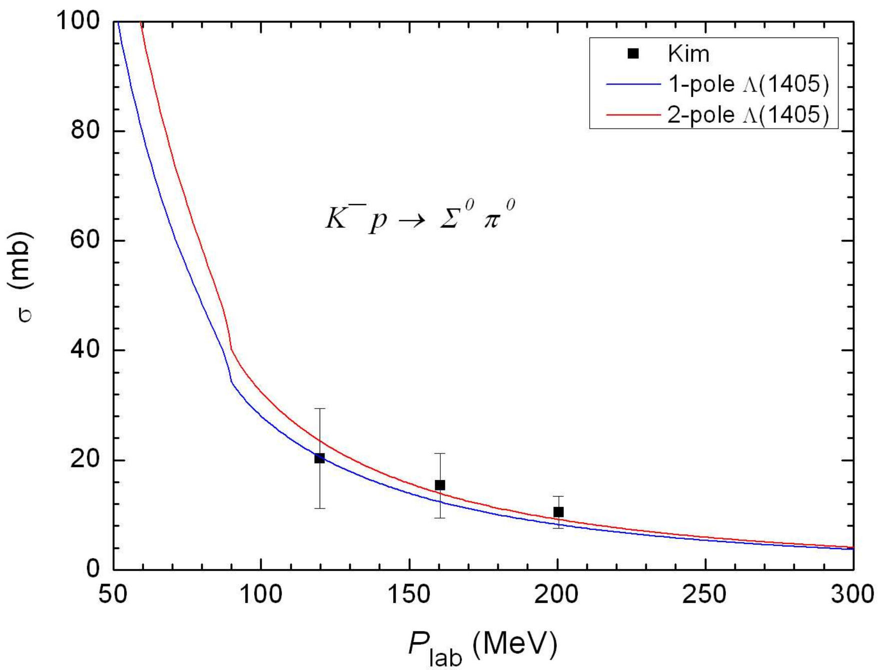




Сравнение с экспериментальными данными по рассеянию:
синие линии: 1-полюсной, красные: 2-полюсной Λ(1405) резонанс

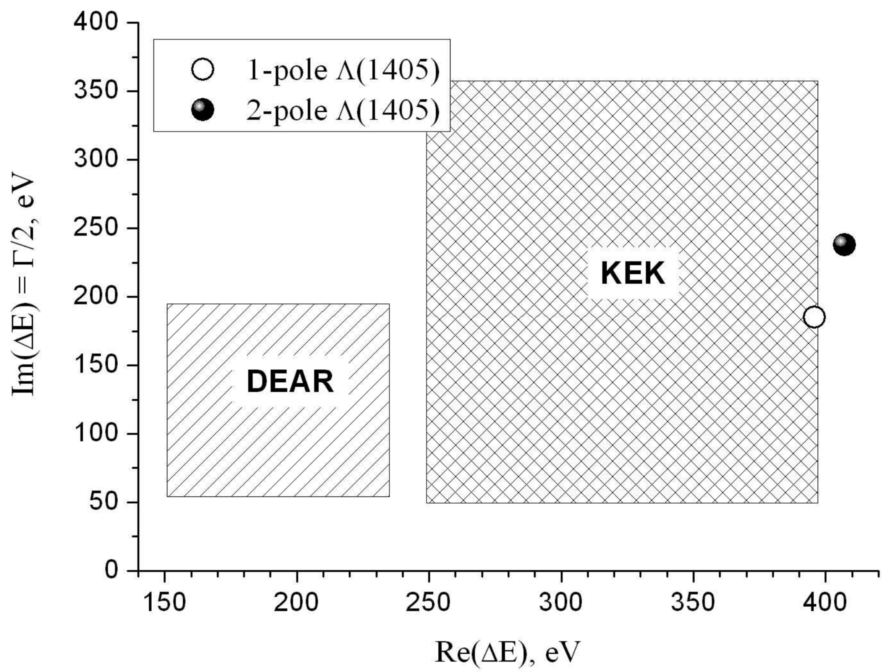






Сравнение с экспериментальными данными по рассеянию, продолжение

Экспериментальные и теоретические сдвиг и ширина *1s* K^-p уровня



– DEAR данные не согласуются с данными по рассеянию

<u>Двучленный NN (pp) потенциал</u>

P. Doleschall, private communication, 2009

$$V_{pp} = \sum_{i=1}^{2} \left| g_i \right\rangle \lambda_i \left\langle g_i \right| \;\rightarrow$$

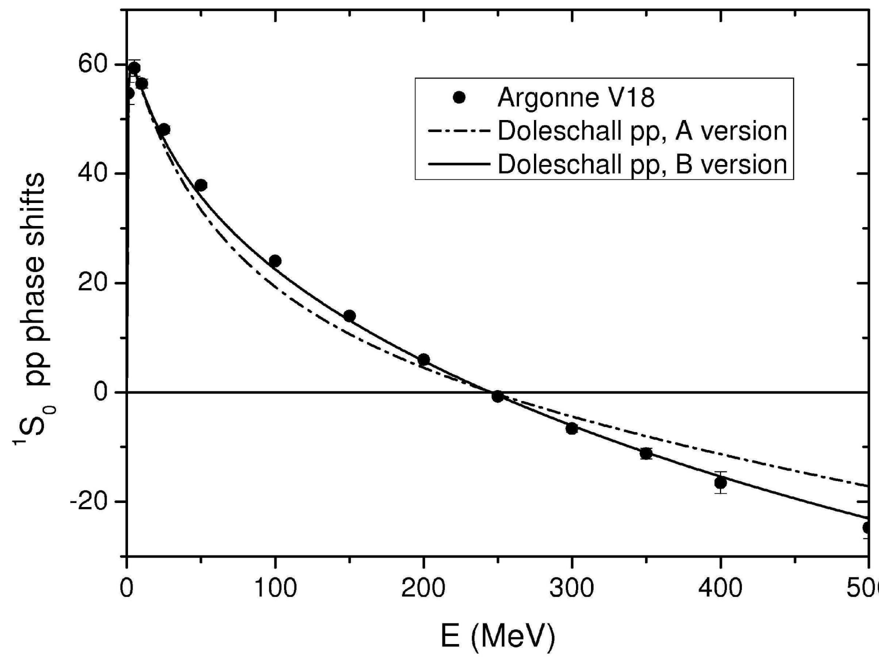
$$T_{pp} = \sum_{i,j=1}^{2} \left| g_i \right\rangle \tau_{ij} \left\langle g_j \right|$$

<u>Воспроизводит:</u>

Argonne V18 NN фазовые сдвиги (с изменением знака!),

$$a^A(pp) = 16.553\,\mathrm{fm},\;\; r_{eff}^A(pp) = 2.845\,\mathrm{fm}$$

$$a^B(pp) = 16.558\,\mathrm{fm},\;\; r_{eff}^B(pp) = 2.880\,\mathrm{fm}$$



Версия A: $$g_i^A(k) = \sum_{m=1}^{2} \frac{\gamma_{im}^A}{\left(\beta_{im}^A\right)^2 + k^2}, \quad i = 1,\ 2$$

Версия B: $$g_1^B(k) = \sum_{m=1}^{3} \frac{\gamma_{1m}^B}{\left(\beta_{1m}^B\right)^2 + k^2}, \quad g_2^B(k) = \sum_{m=1}^{2} \frac{\gamma_{2m}^B}{\left(\beta_{2m}^B\right)^2 + k^2}$$

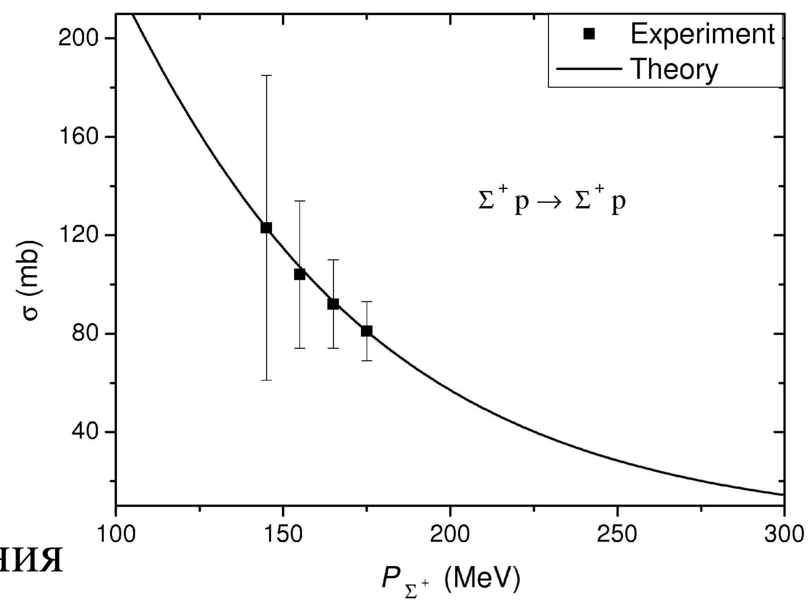
$\Sigma N (-\Lambda N)$ взаимодействие

J. Révai, N.V. Shevchenko, 2009

$\mathrm{T}_I^{\Sigma N}(k,k';z)$ соответствует

$$\mathrm{V}_I^{\Sigma N}(k,k') = \lambda_I^{\Sigma N}\; g_I^{\Sigma N}(k)\; g_I^{\Sigma N}(k')$$

$$\text{c} \quad g_I^{\Sigma N}(k) = \frac{1}{k^2 + \left(\beta_I^{\Sigma N}\right)^2}$$



Воспроизводит экспериментальные сечения

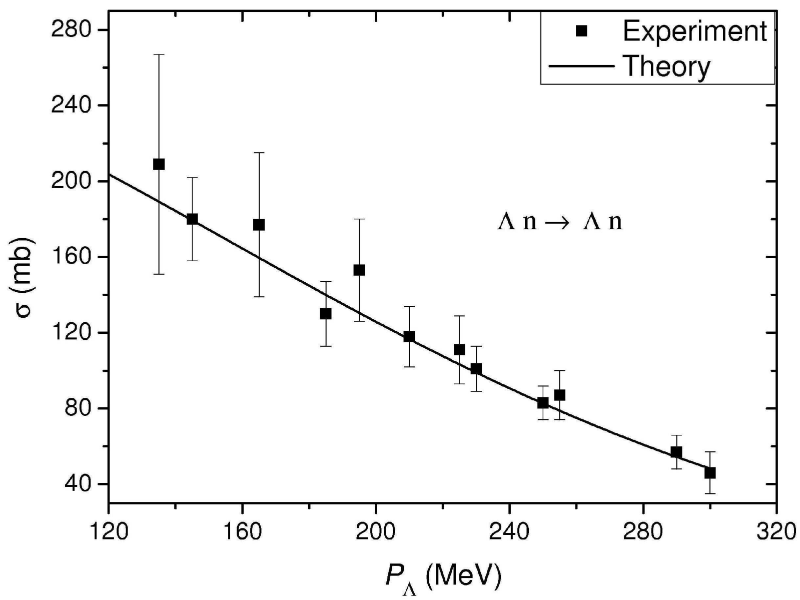
Чистая *I=3/2* часть

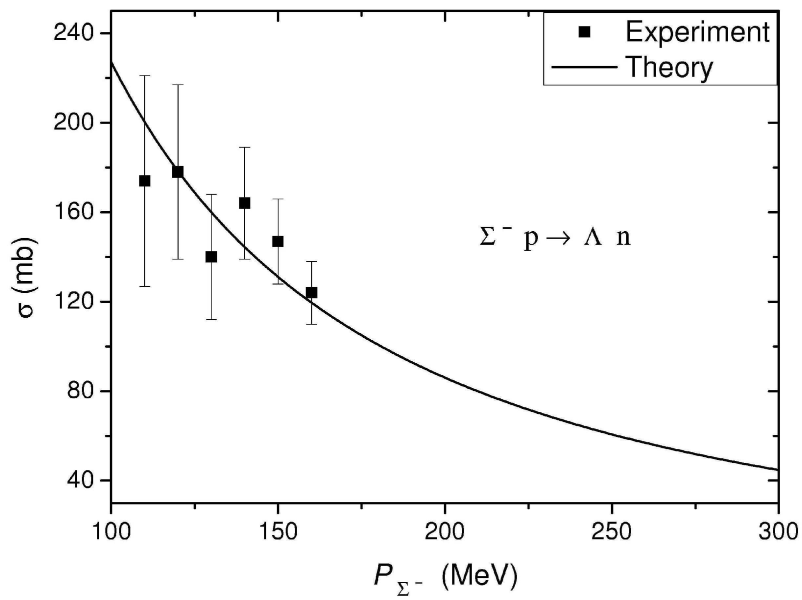
I=3/2

Реальные параметры, одноканальный случай

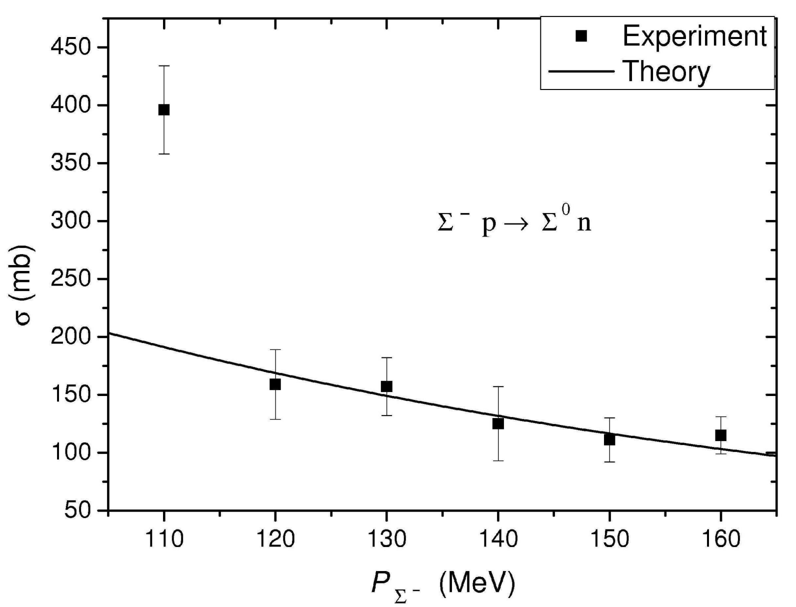
I=1/2

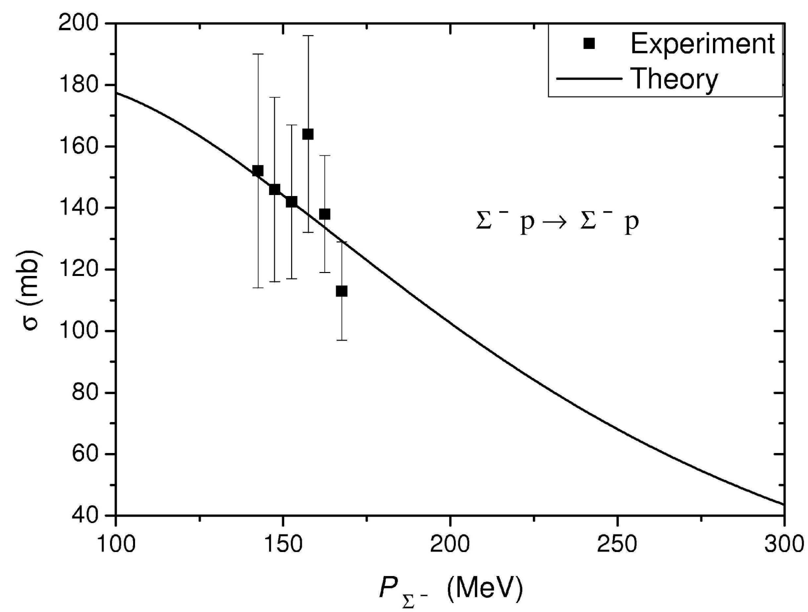
1. Двухканальный $\Sigma N - \Lambda N$ потенциал, реальные параметры
2. Одноканальный ΣN потенциал, комплексные параметры





<u>Чистая *I=1/2*</u> и смесь <u>*I=1/2* с *I=3/2*</u>





Трехчастичный расчет со связанными каналами

N.V. Shevchenko, A. Gal, J. Mareš; Phys. Rev. Lett. 98 (2007) 082301

N.V. Shevchenko, A. Gal, J. Mareš, J. Révai; Phys. Rev. C 76 (2007) 044004

Уравнения Фаддеева в форме АГС:

$$U_{11} = T_2 G_0 U_{21} + T_3 G_0 U_{31}$$

$$U_{21} = G_0^{-1} + T_1 G_0 U_{11} + T_3 G_0 U_{31}$$

$$U_{31} = G_0^{-1} + T_1 G_0 U_{11} + T_2 G_0 U_{21}$$

определяют неизвестные U_{ij}

$U_{11}: \quad 1+(23) \to 1+(23)$

$U_{21}: \quad 1+(23) \to 2+(31)$

$U_{31}: \quad 1+(23) \to 3+(12)$

$\bar{K}N$ взаимодействие сильно связано с $\pi\Sigma$ через $\Lambda(1405)$ резонанс

$\Rightarrow$ $\pi\Sigma$ канал включен явно. Частичные каналы (α):

$$\alpha = 1: \left|\bar{K}_1\ N_2\ N_3\right\rangle, \quad \alpha = 2: \left|\pi_1\ \Sigma_2\ N_3\right\rangle, \quad \alpha = 3: \left|\pi_1\ N_2\ \Sigma_3\right\rangle$$

i, j - обычные фаддеевские индексы
α, β - канальные индексы

Двухчастичные T-матрицы, $T_i^{\alpha\beta}$:

$$T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{NN} & 0 & 0 \\ 0 & T_1^{\Sigma N} & 0 \\ 0 & 0 & T_1^{\Sigma N} \end{pmatrix}, \; T_2 = \begin{pmatrix} T_2^{KK} & 0 & T_2^{K\pi} \\ 0 & T_2^{\pi N} & 0 \\ T_2^{\pi K} & 0 & T_2^{\pi\pi} \end{pmatrix}, \; T_3 = \begin{pmatrix} T_3^{KK} & T_3^{K\pi} & 0 \\ T_3^{\pi K} & T_3^{\pi\pi} & 0 \\ 0 & 0 & T_3^{\pi N} \end{pmatrix}$$

T^{NN}, $T^{\Sigma N}$ и $T^{\pi N}$ - обычные T-матрицы;

элементы 2-канальной $T^{\bar{K}N-\pi\Sigma}$: $\quad T^{KK}: \; \bar{K}N \to \bar{K}N, \quad T^{K\pi}: \; \pi\Sigma \to \bar{K}N$

$\quad T^{\pi K}: \; \bar{K}N \to \pi\Sigma, \quad T^{\pi\pi}: \; \pi\Sigma \to \pi\Sigma$

Свободная функция Грина $G_0^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\, G_0^{\alpha}$, операторы перехода $U_{ij}^{\alpha\beta}$

<u>Квантовые числа</u> $\overline{K}NN - \pi\Sigma N$ системы:

спин $S = 0$, орбитальный момент $L = 0$, изоспин $I = 1/2$

Два тождественных нуклона- антисимметризация,

итого: система 10 интегральных уравнений

$E^{\text{best}}_{1\,\text{real}}$	$E^{\text{best}}_{1\,\text{complex}}$	$E^{\text{best}}_{2\,\text{coupled}}$	$E^{\text{AY}}_{1\,\text{complex}}$	AY's E
- 43.8	-40.2 - i 38.7	-55.1 - i 50.9	-46.6 - i 29.6	-48.0 - i 30.5

Полученные $E_{\text{res}} - i \cdot \Gamma / 2$, E_{res} измеряется от $K^- pp$ порога:

реальный $\overline{K}NN$, комплексный $\overline{K}NN$, полный $\overline{K}NN - \pi\Sigma N$ ("лучший набор"), комплексный $\overline{K}NN$ ("AY набор") и результат AY

Фаддеевский 3-частичный расчет со связанными $\overline{K}NN - \pi\Sigma N$ каналами, $I = 1/2$, $J^{\pi} = 0^-$**:**

квазичастичное состояние в $\overline{K}NN$ (резонанс в $\pi\Sigma N$) имеет

$$E_{\text{res}} \sim 55 - 70 \text{ MeV}, \ \Gamma \sim 90 - 110 \text{ MeV}$$

<u>Новые результы</u> *(предварительные):*

	1-полюсной $\Lambda(1405)$ резонанс	2-полюсной $\Lambda(1405)$ резонанс
NN A-версия	$-29.63 - i\ 47.31$	$-59.50 - i\ 41.13$
NN B-версия	$-30.90 - i\ 47.38$	$-59.66 - i\ 41.31$