ЧЁРНЫЕ ДЫРЫ И КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНЫХ ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ

Оглавление

0.1 Скалярно-тензорные теории гравитации и чёрные дыры

Скалярно-тензорные теории (СТТ) являются хорошо известными и важными альтернативами общей теории относительности Эйнштейна (ОТО).

СТТ исходят из предположения о том, что помимо гравитационного поля (описываемого метрическим тензором $g_{\mu\nu}$) во Вселенной присутствует дальнодействующее скалярное поле ψ, которое наряду с гравитационным полем влияет на эволюцию Вселенной в целом, на формирование и развитие различных макроструктур в ней (галактик, звёзд, чёрных дыр, кротовых нор и т.п.).

Кроме предположения о существовании скалярного поля в СТТ исходным является предположение о неминимальной связи между скалярным и гравитационным полями. (В случае, когда скалярное поле полагается минимально связанным с гравитацией мы имеем не СТТ, а эйнштейновскую ОТО со скалярным полем в качестве материи).

Таким образом, ОТО (со скалярным полем в качестве материи) можно рассматривать как частный случай СТТ, когда функция неминимальной связи $f \equiv 1$.

Отметим, что существует множество различных конкретных видов СТТ. При этом различные СТТ связаны между собой (а также с ОТО) конформными преобразованиями. Т.е. совершая конформное преобразование метрики и скалярного поля, мы, в зависимости от конкретного вида конформного преобразования (т.е. в зависимости от выбранного конформного множителя), можем перейти к любой другой СТТ или к ОТО.

СТТ широко используются, в частности, как для описания инфляции в ранней Вселенной, так и для объяснения ускоренного расширения Вселенной в современную эпоху, а также для описания различных наблюдаемых космологических явлений.

В ОТО существуют хорошо известные решения, описывающие чёрные дыры – это решения:

Шварцшильда – черная дыра обладает только массой,

Райснера-Нордстрема – черная дыра имеет, кроме массы, электрический заряд,

Керра – черная дыра имеет, кроме массы, момент количества движения (т.е. вращается),

Керра-Ньюмана – черная дыра имеет массу, электрический заряд и момент количества движения.

Были получены обобщения указанных решений на случай СТТ. При этом оказалось, что в СТТ соответствующие чёрнодырные решения обладают новыми необычными свойствами, которые ранее не обнаруживались у чёрных дыр. Более того, эти свойства противоречат тому, что традиционно понимается под чёрной дырой. Так, понятия чёрной дыры в обычном случае предполагает пространственно-временную сингулярность, скрытую за горизонтом событий. Горизонт событий представляет собой поверхность, отделяющую внешнюю область, содержащую пространственную бесконечность, от внутренней области, невидимой для внешнего наблюдателя. Однако в некоторых типах СТТ обнаружен большой класс объектов, обладающих свойствами чёрных дыр, но при этом:

1) не все из эти объекты имеют сингулярность за горизонтом;

2) у них у всех горизонт имеет бесконечную площадь, а также нулевую поверхностную гравитацию, и, следовательно, нулевую температуру Хокинга. Поэтому такие объекты были названы "холодными чёрными дырами".

Указанные необычные свойства чёрнодырных решений в СТТ поднимают вопрос о расширении самого. Т.е. холодные чёрные дыры расширяют понятие чёрных дыр на случай бесконечной площади горизонта.

Таким образом можно дать следующее рабочее определение чёрной дыры, обобщённое на случай холодных чёрных дыр. Черная дыра представляет собой пространство-время, содержащее:

1) статическую область, которая может рассматриваться как внешняя (например, содержать плоскую асимптотику),

2) другую область, невидимую для наблюдателя, находящегося в покое в статической области,

3) горизонт событий ненулевой площади, который разделяет пространство-время две области и допускает аналитическое продолжение метрики из одной области в другую.

Как видно, в данном определении опущено обычно учитываемое требование, что радиус $r(\rho_h)$ и площадь горизонта $4\pi r^2(\rho_h)$ должны быть конечны.

Отметим, что решения с холодными чёрными дырами существуют только в случае так называемых аномальных (или фантомных) СТТ, в которых кинетическая энергия скалярного поля является отрицательной.

В последние годы такие фантомные СТТ стали широко использоваться как в теоретических исследованиях (например, при изучении тахионных полей, в теориях струн), так и для объяснения экспериментальных данных (например, для объяснения данных по сверхновым типа Ia и космическому микроволновому фоновому излучению).

0.2 Картина Йордана и картина Эйнштейна

Пространственно-временное многообразие в случае задания в нём СТТ называется картиной Йордана, а в случае задания ОТО – картиной Эйнштейна. Т.е. мы имеем:

Картина Йордана (в ней задана некоторая произвольная СТТ): пространственно-временное многообразие $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$ с метрикой $g_{\mu\nu}$.

Картина Эйнштейна (в ней задана эйнштейновская ОТО со скалярным полем): пространственно-временное многообразие $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$ с метрикой $\overline{g}_{\mu\nu}$.

Картина Йордана и картина Эйнштейна связаны между собой конформными преобразованиями. Чтобы перейти от картины Йордана к картине Эйнштейна, надо проделать следующие конформные преобразования:

1) Умножить метрику $g_{\mu\nu}$ на конформный множитель. При этом мы получим новую – эйнштейновскую – метрику $\overline{g}_{\mu\nu}$): $\overline{g}_{\mu\nu} = F(x^i)_{\mu\nu}$ (где $i = 0, 1, 2, 3$), при этом конформный множитель F зависит от вида той СТТ, от которой мы хотим перейти к ОТО.

2) Перейти от исходного скалярного поля (обозначим его ψ) к некоторому новому (эйнштейновскому) скалярному полю (обозначим его ϕ), т.е. $\phi = Fun(\psi)$. При этом вид функции $Fun(\psi)$ для данного скалярного поля ψ определяется видом конформного множителя.

3) Умножить потенциал скалярного поля (обозначим его U) на квадрат конформного множителя. При этом мы получим новый – эйнштейновский – потенциал V: $V = F^2U$.

Аналогично можно перейти от картины Эйнштейна к картине Йордана, совершив обратные преобразования.

Отметим, что в общем случае конформно преобразованная метрика $\overline{g}_{\mu\nu}$ не является просто метрикой $g_{\mu\nu}$, записанной в другой системе координат: метрики $\overline{g}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ описывают разные гравитационные поля и разную физику.

Отметим также, что в то время как картин Йордана бесконечно много (в соответствии с бесконечным множеством частных видов СТТ, определяемых функцией неминимальной связи между скалярным и гравитационным полями), картина Эйнштейна только одна – та, в которой скалярное поле минммально связано с гравитацией.

Если конформный множитель $F(x^i)$ всюду регулярен (то есть является всюду гладким и конечным), то основные геометрические и физические свойства конформно связанных многообразий $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$ и $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$ (качественно) совпадают , так как при таких преобразованиях плоская асимптотика в в одном многообразии (например, в $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$) переходит при конформном преобразовании в плоскую асимптотику в другом многообразии ($\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$), горизонт событий, соответственно, переходит в горизонт событий, сингулярность – в сингулярность и т.п..

Конформное преобразование часто используется в качестве математического инструмента для преобразования уравнений поля в СТТ в математически эквивалентные, но более удобные для изучения уравнения в ОТО.

0.3 Конформные продолжения

Конформные продолжения (conformal continuations или conformal extension) являются частным случаем конформных преобразований. Необходимым (но не достаточным) условием конформного продолжения является нерегулярность конформного множителя $F(x^i)$ (т.е. обращение его в бесконечность или в нуль) в некоторой точке пространства-времени.

Тогда возможны, например, такие случаи, что сингулярность в одной картине (например, в многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$) соответствует регулярной поверхности в другой картине (в многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$). Обозначим эту регулярную поверхность $\mathbb{S}_{\mathrm{trans}}$, т.е. поверхность (в данном случае сферической симметрии – сфера) перехода.

Тогда второе многообразие ($\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$) может быть регулярно продолжено через эту поверхность $\mathbb{S}_{\rm trans}$. (Это явление и составляет сущность конформного продолжения.) Следовательно, глобальные свойства многообразия $\mathbb{M}_{\rm J}$ могут быть значительно богаче, чем у первого многообразия ($\mathbb{M}_{\rm E}$). В новой области может, например, оказаться горизонт событий или дополнительная пространственная бесконечность.

В рассматриваемом случае сферической симметрии поверхность $\mathbb{S}_{\rm trans}$ в многообразии $\mathbb{M}_{\rm J}$ может быть либо обычной (регулярной) сферой, на которой метрика $g_{\mu\nu}$ конечна (назовём данное конформное продолжение типом I), либо горизонтом, на котором метрическая функция g_{22} конечна, но $g_{00} \to 0$ (назовём такое конформное продолжение типом II). То есть

- конформное продолжение <u>типа I</u> – когда сингулярность в одном многообразии конформно преобразуется в обычную сферу в другом;

- конформное продолжение типа II – когда сингулярность в одном многообразии конформно преобразуется в горизонт событий в другом;

Отметим, что конформное продолжение типа II можно рассматривать как частный случай конформного продолжения типа I – так как горизонт является частным случаем сферы.

Отметим, что с общей точки зрения, существование конформных продолжений может означать, что доступная нашему наблюдению Вселенная является лишь частью реальной, намного большей Вселенной, которую следует описывать с помощью другой, более фундаментальной конформной картины.

0.4 Основные уравнения

0.4.1 Лагранжиан и метрика в картине Йордана

Рассмотрим случай, когда в картине Йордана задана СТТ самого общего вида. Лагранжиан такой СТТ:

$$L_{\mathrm{STT}} = f(\psi)R + h(\psi)\partial^{\nu}\psi\partial_{\nu}\psi - 2U(\psi), \tag{1}$$

где R - скалярная кривизна, соответствующая метрике $g_{\mu\nu}$,

ψ – скалярное поле, которое в рассматриваемом здесь статическом сферически симметричном случае зависит лишь от одной (радиальной) координаты,

f, h и U – некоторые произвольные функции; от конкретного задания этих функций зависит конкретный вид СТТ.

Отметим, чти из этих трёх функций от ψ только две независимы, т.к. существует свобода преобразования $\psi = \psi(\psi_{\text{new}})$. Используя указанную свободу, положим $h(\psi) \equiv 1$.

Функция $f(\psi)$ называется функцией неминимальной связи (связь будет минимальной в случае $f \equiv 1$).

$U(\psi)$ – потенциал скалярного поля. Если $U \equiv 0$, то такое скалярное поле называется безмассовым.

Общий вид статической сферически-симметричной метрики можно записать как

$$ds_J^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \mathcal{A}(q)dt^2 - \mathcal{A}^{-1}(q)dq^2 - {r_*}^2(q)d\Omega^2, \qquad (2)$$

где q – радиальная координата, выбранная в соответствии с условием $g_{tt}g_{\rho\rho} = -1$;

$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ – элемент телесного угла.

Метрические функции $\mathcal{A}(q)r_*(q)$, а также скалярное поле $\psi(q)$ находятся в результате решения уравнения поля, получающихся из Лагранжиана L_{STT}.

0.4.2 Лагранжиан и метрика в картине Эйнштейна

В картине Эйнштейна Лагранжиан ОТО со скалярным полем в качестве источника материи имеет вид

$$L_E = \overline{R} + \epsilon \partial^\nu \phi \partial_\nu \phi - 2V(\phi), \tag{3}$$

где $\overline{R}$ – скалярная кривизна, соответствующая метрике $\overline{g}_{\mu\nu}$,

ϕ – скалярное поле,

$\epsilon = \pm 1$; при $\epsilon = +1$ скалярное поле является нормальным (или не-фантомным), при $\epsilon = -1$ – фантомным (его кинетическая энергия меньше нуля).

$V(\phi)$ – потенциал скалярного поля.

Метрику в картине Эйнштейна возьмём в виде, аналогичном йордановской метрике :

$$ds_E^2 = \overline{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = A(\rho)dt^2 - A^{-1}(\rho)d\rho^2 - r^2(\rho)d\Omega^2. \qquad (4)$$

где ρ – радиальная координата.

Метрические функции $A(q)r(q)$, а также скалярное поле $\phi(q)$ находятся в результате решения уравнения поля, получающихся из Лагранжиана L_E.

Таким образом, каждая (йордоновская, эйнштейновская) картина определяется:

– заданием Лагранжиана (и, следовательно, получающихся из него уравнений поля);

– заданием некоторого общего вида метрики и скалярного поля как функций от пространственно-временных координат.

При решении уравнений поля находятся конкретные значения метрических функций и скалярное поле как функция от x^i.

В случае метрики вида (4) горизонт чёрной дыры может быть представлен сферой $\rho = \rho_h$, на которой $A = 0$, а все алгебраические инварианты кривизны конечны.

В картине Эйнштейна на горизонте, т.е. на сфере радиуса ρ_h (без потери общности полагаем, что центр сферы совпадает с началом координат) метрическая функция $A(\rho) = 0$. Вблизи горизонта $A(\rho)$ ведет себя как

$$A \sim (\rho - \rho_h)^k,$$

где k – порядок горизонта. Так,

$k = 1$ соответствует простому горизонту типа Шварцшильда,

$k = 2$ – двойному горизонту, как у экстремальной (т.е. такой, у которой заряд равен её массе) черной дыры Райснера-Нордстрема и т.д.

(Аналогичную роль в картине Йодана играет функция $\mathcal{A}(q)$ в метрике s_J).

Отметим также, что продолжение метрики в область за горизонт возможно лишь тогда, когда $k \in \mathbb{N}$ (т.е. горизонт целочисленного порядка). В случае, когда k является дробным, метрика не может быть продолжена за горизонт в связи с её неаналитичностью на горизонте.

0.4.3 Конформное преобразование от картины Йордана в картину Эйнштейна

Конформное преобразование величин СТТ $(g_{\mu\nu}, \psi, U)$ в соответствующие величины $(\overline{g}_{\mu\nu}, \phi, V)$ в ОТО имеет вид

$$\overline{g}_{\mu\nu} = F g_{\mu\nu}, \tag{5}$$

$$\frac{d\phi}{d\psi} = \pm\frac{\sqrt{|l(\psi)|}}{f(\psi)}, \qquad l(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} fh + \frac{1}{2}(\frac{df}{d\psi})^2, \tag{6}$$

$$V(\phi) = |f|^{-2}(\psi)\, U(\psi). \tag{7}$$

где конформный множитель есть функция, обратная функции неминимальной связи

$$F = |f(\psi)|^{-1}, \tag{8}$$

Указанное конформное преобразование переводит Лагранжиан $L_{\rm STT}$ (заданный в картине Йордана), в Лагранжиан L_E (соответствующий картине Эйнштейна).

Уравнения поля, получающиеся из Лагранжиана L_{STT}, после подстановки в них вместо $(g_{\mu\nu}, \psi, U)$ величины $(\overline{g}_{\mu\nu}, \phi, V)$ преобразуются в уравнения поля, соответствующие Лагранжиану L_E.

Отметим, что метрические функции и радиальные координаты в йордановской ds_{STT} и эйнштейновской ds_E метриках связаны следующими соотношениями:

$$A(q) = F\mathcal{A}(\rho), \qquad r^2(q) = F{r_*}^2(\rho), \qquad dq = \pm F d\rho. \tag{9}$$

0.5 Конформные преобразования холодных черных дыр

0.5.1 Решение анти-Фишера в картине Эйнштейна

Пусть в картине Эйнштейна задана ОТО со скалярным полем (но с нулевым потенциалом скалярного поля, т.е. скалярное поле безмассовое) с Лагранжианом

$$L_{\mathrm{E}} = \overline{R} + \epsilon \partial^{\nu} \phi \partial_{\nu} \phi - V(\phi)]. \tag{10}$$

В случае $\varepsilon = +1$ (т.е. когда скалярное поле нормальное, не фантомное) решение соответствующих уравнений поля (при условии статичности и сферической симметрии пространства-времени) было найдено Фишером. Это так называемое решение Фишера, оно описывает ОТО с безмассовым скалярным полем в статическом сферически-симметричном пространстве-времени и имеет вид

$$ds_{\mathrm{E}}^2 = \mathrm{e}^{-2mu}dt^2 - \frac{k^2\,\mathrm{e}^{2mu}}{\sinh^2(ku)}\Big[\frac{k^2du^2}{\sinh^2(ku)} + d\Omega^2\Big], \qquad \phi = Cu, \quad (11)$$

где постоянные m (масса), C (скалярный заряд), $k > 0$ являются константами интегрирования. При этом постоянные они связаны соотношением:

$$k^2 = m^2 + C^2/2. \quad (12)$$

В случае $\varepsilon = -1$ соответствующее решение можно назвать решением анти-Фишера, по аналогии с решениями де Ситтера и анти-де Ситтера. Это решение было впервые найдено Бергманом и Лейпником. Однако эти авторы использовали координаты, которые оказались не очень подходящими для изучения свойств найденного решения, и, возможно, поэтому они не дали ясной интерпретации решения.

Решение анти-Фишера имеет вид :

$$ds_E^2 = \mathrm{e}^{-2mu} dt^2 - \frac{\mathrm{e}^{2mu}}{s^2(k,u)} \left[\frac{du^2}{s^2(k,u)} + d\Omega^2 \right], \qquad \phi = Cu, \quad (13)$$

где константы интегрирования m (масса), C (скалярный заряд) и k связаны соотношением

$$2k^2 \operatorname{sign} k = 2m^2 - C^2. \quad (14)$$

Как видно из этого, теперь (в отличие от решения Фишера) константа k не обязательно должна быть положительной, а может быть также отрицательной или равной нулю. Причём вид функция $s(k,u)$ зависит от знака k :

$$s(k,u) = \begin{cases} k^{-1} \sinh ku, & k > 0 \\ u, & k = 0 \\ k^{-1} \sin ku, & k < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Поэтому свойства решения анти-Фишера (будучи зависящими от знака k) более разнообразны и интересны, чем у решения Фишера.

Причём холодные чёрные дыры соответствуют решению с $r > 0$, поэтому ниже мы рассматриваем лишь свойства решения анти-Фишера при $k > 0$.

Координата u определена на полупрямой $u > 0$ для $k \geq 0$ и в интервале $0 < u < \pi/|k|$ для $k < 0$. Значение $u = 0$ соответствует плоской пространственной бесконечности.

При $k > 0$ удобно перейти от радиальной координаты u к новой радиальной координате ρ с помощью преобразования

$$\mathrm{e}^{-2ku} = 1 - 2k/\rho \equiv P(\rho). \tag{16}$$

Тогда решение анти-Фишера принимает вид

$$ds_E^2 = P^a dt^2 - P^{-a} d\rho^2 - P^{1-a} \rho^2 d\Omega^2, \qquad \phi = -\frac{C}{2k} \ln P(\rho), \quad (17)$$

с константами, связанными соотношениями

$$a = m/k, \qquad a = \pm\sqrt{1 + C^2/2}. \quad (18)$$

Так как $C^2 > 0$, то из второго соотношения следует

$$|a| > 1$$

.

Необходимым условием горизонта при некотором $\rho = \rho_h$ является $P(\rho_h) = 0$. Из вида функции $P(\rho)$ следует, что она равна нулю при $\rho = 2k$.

Однако будет или нет иметь место горизонт при $\rho = 2k$ зависит от значения константы a. Т.е. в зависимости от этой константы возможны следующие случаи:

a$<$**1**(и, следовательно, масса $m < 0$). В этом случае при $\rho = 2k$ имеем отталкивающую сингулярность.

1$<$**a**$<$**2**. Тогда при $\rho = 2k$ будет притягивающая сингулярность (т.к. $m > 0$).

a $\geq$ **2**. В этом случае поведение решения анти-Фишера зависит от того, является a целым или нет:

1) **a – целое**, $a = 2,\ 3,\ \ldots$. Кривизна при $\rho = 2k$ конечна. Метрика имеет горизонт порядка a при $\rho = 2k$, т.е. вблизи горизонта $P(\rho) \sim (\rho - 2k)^a$. При этом возможно аналитическое продолжение метрики за горизонт, т.е. во внутреннюю область, где $\rho > 2k$. Особенностью таких горизонтов является их бесконечная площадь (т.к. сферический радиус r стремится к бесконечности

при $\rho \to 2k$). Они были названы горизонтами типа B, в отличие от обычных (типа A) горизонтов конечной площади. Асимптотически плоские конфигурации с горизонтами B-типа названы холодными чёрными дырами, так как все они имеют нулевую температуру Хокинга.

2) **a – не целое**. Кривизна при $\rho = 2k$ опять конечна. Метрика при $\rho \to 2k$ качественно ведёт себя так же, как вблизи горизонта B-типа, однако продолжение метрики за него невозможно из-за неаналитичности метрической функции $P^a(\rho)$ при $\rho = 2k$. В данном случае у нас при $\rho = 2k$ пространственно-временная сингулярность, называемая сингулярным горизонтом (т.к. в отличие от обычной сингулярности – сингулярности кривизны – инварианты кривизны на нём не бесконечны).

Таким образом, решение анти-Фишера описывает холодные чёрные дыры, если в нём $a \geq 2$ и является целым. Глобальные геометрические и причинные свойства пространства-времени с холодной чёрной дырой различны в зависимости от того, чётное или нет a:

а – нечётное. Тогда горизонт нечётного порядка. основные глобальные геометрические и причинные свойства пространства-времени совпадают со свойствами шварцшильдовской метрики. Так, при $\rho < 2k$ (т.е. во внутренней области холодной чёрной дыры) ρ является временной координатой, а t – пространственной; само пространство-время однородно и анизотропно, что соответствует анизотропной космологии типа Кантовского-Сакса. Сингулярность при $\rho = 0$ (где $P(\rho) \to \infty$) пространственноподобная (космологическая) и достигается всеми временноподобными геодезическими за конечный временной интервал после пересечения горизонта.

a – чётное. Тогда горизонт нечётного порядка. Основные глобальные геометрические и причинные свойства пространства-времени в основном совпадают со свойствами экстремального пространства-времени Райснера-Нордстрема, однако физический смысл внутренней области (с $\rho < 2k$) другой. Так как там $P(\rho) < 0$, то метрика имеет сигнатуру $(+ - + +)$ вместо $(+ - - -)$ при больших ρ. Следовательно, временной координатой в области $\rho < 2k$ является ρ, так как $g_{\rho\rho} < 0$, тогда как другие диагональные компоненты тензора $g_{\mu\nu}$ положительны. Таким образом, как и в случае нечётных a, при значениях $\rho < 2k$ имеем космологию типа Кантовского-Сакса с пространственноподобной (космологической) сингулярностью при $\rho = 0$ $(r = 0)$. Направление стрелы времени может там быть произвольным, так как временноподобные геодезические, продолжающиеся из статической области, становятся там пространственноподобными (для них нельзя сказать, где прошлое, а где будущее) и могут даже не достигать сингулярности.

0.5.2 Конформное преобразование решения с холодной чёрной дырой в картину Йордана

Решение (анти-)Фишера, будучи статическим, сферически-симметричн решением в картине Эйнштейна с безмассовым скалярным полем, имеет конформно соответствующие решения в картине с произвольной СТТ.

Рассмотрим случай, когда в картине Йордана задана СТТ частного вида, а именно СТТ Бранса-Дикке. Последняя соответствует следующему выбору функций в Лагранжиане L_{STT} (описывающем СТТ общего вида):

$$f(\psi) = \psi, \qquad h(\psi) = \omega/\psi, \tag{19}$$

где ω – константа связи Бранса-Дикке. Будем рассматривать безмассовый вариант теории, то есть с потенциалом $U(\psi) \equiv 0$.

Тогда Лагранжиан у нас будет иметь вид

$$L_{\mathrm{STT}} = \psi R + \omega/\psi\ \partial^\nu\psi\partial_\nu\psi. \tag{20}$$

Ограничимся рассмотрением лишь тех решений уравнений поля, которые содержат холодные чёрные дыры – т.е. константу k будем $k > 0$.

В картине Йордана при таких условиях на константы интегрирования решение может быть записано в виде

$$ds_J^2 = P^{-\xi}\, ds_E^2 = P^{a-\xi}dt^2 - P^{-a-\xi}d\rho^2 - P^{1-\xi-a}\rho^2 d\Omega^2, \tag{21}$$

$$\psi = \exp\left[\phi/\sqrt{|\omega + 3/2|}\ \right] = P^\xi, \tag{22}$$

где мы обозначили конформный множитель $F = f(\psi) = \psi \equiv P^\xi$. Параметр ξ связан с a и ω соотношением

$$(3 + 2\omega)\xi^2 = 1 - a^2. \tag{23}$$

Аналогично тому, как в картине Эйнштейна холодные чёрные дыры существовали лишь при определённых условиях на константу a, в рассматриваемой здесь картине Йордана холодные чёрные дыры существуют при определённых условиях на константы a, ξ. Эти условия были найдены в работе (K.A.Bronnikov, G. Clément, C.P. Constantindis and J.C. Fabris, *Grav. & Cosmol.* **4**, 128 (1998)) и (K.A. Bronnikov, G. Clément, C.P. Constantinidis and J.C. Fabris, *Phys. Lett.* **243A**, 121 (1998)). Было показано,что решения с холодной чёрной дырой в СТТ Бранса-Дикке существует только тогда, когда параметры a и ξ подчиняются следующим условиям "квантования":

$$a = \frac{m+1}{m-n}, \qquad \xi = \frac{m-n-1}{m-n}, \tag{24}$$

где m и n – положительные целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$m - 2 \geq n \geq 0. \tag{25}$$

Константа связи ω также может иметь лишь дискретный набор значений:

$$2\omega + 3 = -\frac{2m(n+1) - n^2 + 1}{(m-n-1)^2} < 0. \tag{26}$$

Так как для теории Бранса-Дикке $l(\varphi) = \omega + 3/2$, то получаем, что, как и в картине Эйнштейна, чёрные дыры могут существовать только при фантомном скалярном поле ($\varepsilon = \operatorname{sign} l = -1$).

Однако условия существования холодных чёрных дыр различны в эйнштейновой и йордановской картинах, и глобальные структуры всего пространства-времени, продолженного за горизонт, также различны (они подробно рассмотрены в указанных работах). В частности, во внутренней области холодных чёрных дыр в картине Эйнштейна всегда существует сингулярность кривизны. Между тем, многие холодные чёрные дыры в СТТтеории Бранса-Дикке (в картине Йордана) несингулярны, а некоторые из них имеют вторую плоскую асимптотику за горизонтом.

Согласно соотношениям (24), холодные чёрные дыры йордановской картины образуют дискретное семейство с двумя целочисленными параметрами m и n, удовлетворяющими неравенствам (25), в то время как семейство холодных чёрных дыр эйнштейновской картины зависит только от одного целочисленного параметра $a \geq 2$. В результате этого, конформное отображение, которое связывает две картины, в некоторых случаях переводит холодные чёрные дыры в холодные чёрные дыры, а именно, когда $m + 1$ кратно a; выражая с помощью (24) параметр n тогда получаем:

$$n = m - (m+1)/a.$$

В общем случае, однако, конформное преобразование (**??**) отображает холодные чёрные дыры в $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$ в конфигурации с сингулярным горизонтом или обычной сингулярностью (сингулярностью кривизны) в $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$, и наоборот.

Приведём несколько примеров:

1. В случае $n = 0$, $m = 2, 3, \ldots$ из (24) находим $a = (m+1)/m$, и, следовательно, метрика в $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$ имеет сингулярность кривизны при $\rho = 2k$.
2. В случае $m = 4$, $n = 2$ получаем $a = 5/2$, то есть метрика (17) в $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$ имеет сингулярный горизонт при $\rho = 2k$.
3. Задавая $a = 2$, что соответствует холодной чёрной дыре в

$\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$, и $m = 2, 4, 6, \ldots$, получаем полуцелое значение n, то есть сингулярный горизонт при $\rho = 2k$ в $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$.

Во всех этих примерах и других подобных случаях конформное отображение устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками многообразия $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$ и многообразия $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$ только в области $\rho > 2k$, которая совпадает с целым многообразием $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$, но только с частью многообразия $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$ в примерах 1 и 2 и наоборот в примере 3. Таким образом, по определению, имеют место конформные продолжения. Однако такие конформные продолжения отличаются от рассмотренных конформных продолжений типов I и II, т.к. в данном случае сфера перехода $\mathbb{S}_{\mathrm{trans}}$ представляет собой горизонт бесконечной площади в одном из многообразий (в многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$ в примерах 1 и 2 и в многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$ в примере 3). Назовём этот новый тип конформных продолжений типом III.

Таким образом, в данной главе рассмотрены конформные продолжения нового типа. Их особенности следующие:

– они существуют только в аномальных (фантомных) СТТ,

– в качестве поверхности перехода $\mathbb{S}_{\rm trans}$в них выступает горизонт бесконечной площади,

– эти конформные продолжения могут иметь место не только из $\mathbb{M}_{\rm E}$ в $\mathbb{M}_{\rm J}$(как в примерах 1 и 2), но также и из $\mathbb{M}_{\rm J}$ в $\mathbb{M}_{\rm E}$(как в примере 3).

0.6 Конформные преобразования чёрной дыры в кротовую нору

0.6.1 Понятие кротовой норы

Как и чёрные дыры, кротовые норы являются конфигурациями сильных полей, в которых кривизна проявляет себя в глобальных свойствах пространства-времени. В то время как чёрные дыры считаются неизбежной конечной стадией эволюции (гравитационного коллапса)достаточно тяжёлых тел и уже много лет являются объектом различных астрофизических наблюдений, кротовые норы только недавно начали активно обсуждаться.

Причина того, что в прошлые годы физики мало занимались изучением кротовых нор: кротовые норы (по крайней мере в ОТО) для своего существования нуждаются в очень необычной материи, нарушающей нулевое энергетическое условие

$$T_{\mu\nu}u_{\mu}u_{\nu} \geq 0,$$

где $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса, $u_{\mu}0$ – любой нулевой вектор.

Нулевое энергетическое условие нарушается для такой материи, у которой отношение давления к энергии $\omega = p/e < -1$.

После открытия ускоренного расширения Вселенной в качестве его гипотетического источника стала рассматриваться темная энергия, которая в то же время является подходящим материалом для построения кротовых нор, т.к., согласно современным данным, тёмная энергия должна иметь $\omega < -1$.

Кротовую нору можно наглядно представить себе как мост или туннель, соединяющий две большие или даже бесконечные области пространства-времени. Эти области могут принадлежать как одной и той же вселенной, так и разным вселенным. Если кротовые норы могут быть достаточно боьшими и стабильными, то они могут служить в качестве "короткого пути"между удалёнными частями Вселенной или в качестве машины времени. Более того, кротовые норы могут приводить к множеству наблюдаемых астрофизических эффектов.

В настоящее время в теориях гравитации найдено много решений, описывающих кротовые норы. Некоторые из этих решений найдены в предположении о присутствии во Вселенной различных видов фантомной энергии (например, фантомного скалярного поля с отрицательной кинетической энергией), посредством квантовых макроскопических эффектов, в обобщениях (например, многомерных) эйнштейновской ОТО. Однако поиск реалистичных решений с более привычными и доступными источниками , обеспечивающих существование кротовых нор,всё ещё актуален.

В работе К.А. Бронникова и А.А. Старобинского (JETP Letters 85, 1 (2007); gr-qc/0612032) была исследована возможность существования кротовых нор в некоторых классах СТТ, в частности, в тех СТТ, которые, будучи не фантомными по характеру (то есть с положительной кинетической энергией скалярного поля), способны привести к фантомноподобному поведению в космологии в определённую эпоху. Было показано, что, даже в присутствии электромагнитного поля, если функция неминимальной связи $f(\psi)$ везде положительна (т.е. СТТ изначально не является фантомной), то решения с кротовыми норами отсутствуют, и этот результат справедлив как для картины Йордана (где скалярное поле неминимально связано с гравитацией), так и для картины Эйнштейна (с минимально связанным скалярным полем). Однако было также обнаружено, что если функция $f(\psi)$ остаётся неотрицательной, но может обращаться в нуль при некотором значении скалярного поля ψ, то кротовые норы могут существовать.

0.6.2 Чёрные дыры в картине Эйнштейна

Рассмотрим картину Эйнштейна, где задана ОТО с (не-фантомным) скалярным и электромагнитным ($F_{\mu\nu}$) полями в качестве материальных источников. Лагранжиан имеет вид

$$L_E = \overline{R} + \partial^\nu \phi \partial_\nu \phi - 2V(\phi) - F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \qquad (27)$$

Как и прежде, метрика пространства-времени

$$ds_E^2 = A(\rho)dt^2 - A^{-1}(\rho)d\rho^2 - r^2(\rho)d\Omega^2. \qquad (28)$$

В статическом сферически-симметричном случае ненулевыми компонентами тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ являются $F_{01} = -F_{10}$. Эти компоненты определяются с помощью уравнений Максвелла, которые в данном случае сводятся к уравнению

$$(\sqrt{|g|}F^{10})_\rho = 0. \tag{29}$$

Его решение:

$$F^{10} = Q/{r_*}^2, \tag{30}$$

где Q – электрический заряд.

Метрические функции и скалярное поле находятся из следующих уравнений поля:

$$(A'r^2)' = -2r^2V + 2Q^2/r^2; \tag{31}$$

$$2r''/r = -{\phi'}^2; \tag{32}$$

$$A(r^2)'' - r^2A'' = 2 - 4Q^2/r^2, \tag{33}$$

где штрих означает $d/d\rho$. При заданном потенциале $V(\phi)$ эти уравнения образуют систему уравнений для неизвестных $r(\rho),\ A(\rho),\ \phi($

Для нахождения примеров точных решений с чёрными дырами будем использовать метод обратной задачи. А именно, зададим функцию $r(\rho)$, а затем последовательно будем находить $A(\rho)$ из уравнения (33), $\phi(\rho)$ из уравнения (32) и потенциал $V(\rho)$ из уравнения (31).

Таким образом, выберем функцию $r(\rho)$ в виде

$$r(\rho) = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \tag{34}$$

где b – произвольная постоянная.

Тогда из уравнений поля найдём:

$$A(\rho) = B_0 r^2 + 1 + 3m\left[-\frac{\rho}{b^2} + \frac{r^2}{2b^3}\ln\frac{\rho+b}{\rho-b}\right] - \frac{Q^2}{b^4}\left[b^2 - b\rho\ln\frac{\rho+b}{\rho-b} + \frac{r^2}{4}\ln^2\frac{\rho+b}{\rho-b}\right], \tag{35}$$

$$\phi(\rho) = \phi_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\rho+b}{\rho-b}, \tag{36}$$

$$V(\rho) = -\frac{B_0(3\rho^2 - b^2)}{r^2} + \frac{9m\rho r^2 + Q^2(3\rho^2 - 2b^2)}{b^2 r^4} - \frac{3m(3\rho^2 - b^2) + 6Q^2\rho}{2b^3 r^2}\ln\frac{\rho+b}{\rho-b} + \frac{Q^2(3\rho^2 - b^2)}{4b^4 r^2}\ln^2\frac{\rho+b}{\rho-b}, \tag{37}$$

где B_0, m и ϕ_0 – постоянные интегрирования. Без потери общности выберем $\phi_0 = 0$.

При $\rho \to \infty$ метрика становится плоской или (анти-)де ситтеровской, в зависимости от значения постоянной $B_0 = -V(\infty)/3$, где $V(\infty)$ играет роль космологической постоянной при больших

ρ.

В дальнейшем, чтобы иметь плоскую асимптотику при $\rho \to \infty$, будем полагать $B_0 = 0$.

Тогда при больших ρ метрические функции ведут себя как

$$r \approx \rho,$$
$$A \approx 1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{Q^2}{\rho^2} + \dots .$$

Следовательно, метрика приблизительно является метрикой Райснера-Нордстрема.

Другим экстремальным значением является $\rho \to b$, при котором $r \to 0$, то есть имеет место сингулярность.

Возможные горизонты (расположенные при значении координаты $\rho = \rho_h$) описываются нулями функции $A(\rho)$, и точно так же, как в решении Райснера-Нордстрема, число горизонтов может быть:

0 – соответствует конфигурациям с голой сингулярностью,

1 (двойной горизонт, т.е. вблизи них функция A ведёт себя как $A(\rho) \sim (\rho - \rho_h)^2$) – соответствует конфигурациям с экстремальными чёрными дырами,

2 (простых горизонта, т.е. вблизи них функция A ведёт себя как $A(\rho) \sim (\rho - \rho_h)$)– соответствует конфигурациям с неэкстремальными чёрными дырами.

Значения постоянных m и Q, соответствующие двойному горизонту при $\rho = \rho_h$, вблизи которого $A(\rho) \sim (\rho - \rho_h)^2$, могут быть найдены численно: задавая некоторую массу m мы численно находим $Q(m)$ и $\rho_h(m)$. Таким путём нами были получены следующие значения:

$$
\begin{aligned}
&m/b = 0.35, \quad && Q(m)/b \approx 0.08096, \quad && \rho_h(m)/b \approx 1.00116;\\
&m/b = 1, && Q(m)/b \approx 0.9222, && \rho_h(m)/b \approx 1.324;\\
&m/b = 3, && Q(m)/b \approx 2.97409, && \rho_h(m)/b \approx 3.1171;\\
&m/b = 10, && Q(m)/b \approx 9.9922, && \rho_h(m)/b \approx 10.036;\\
&m/b = 40, && Q(m)/b \approx 39.9981, && \rho_h(m)/b \approx 40.01.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Очевидно, при увеличении массы m и заряда Q эти параметры всё больше и больше приближаются к параметрам решения Райснера-Нордстрема. И, в полном соответствии с последним, для заданной массы m при $Q > Q(m)$ система не имеет горизонта, в то время как при $Q < Q(m)$ она имеет два простых горизонта.

0.6.3 Конформное преобразование в картину Йордана

Лагранжиан общей СТТ с электромагнитным полем $F_{\mu\nu}$:

$$L_{STT} = f(\psi)R + h(\psi)\partial^{\nu}\psi\partial_{\nu}\psi - 2U(\psi), -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{39}$$

Благодаря возможности конформного преобразования, любое решение уравнений поля, получающихся из лагранжиана L_E, включая найденные выше решения с чёрной дырой, имеет конформно соответствующие решения во всех возможных СТТ.

При этом, если конформный множитель везде положителен, то найденное в картине Йордана чёрнодырное решение конформно отображается в аналогичное чёрнодырное решение (причём с горизонтом того же порядка) в СТТ.

Однако если конформный множитель может обращаться в нуль при некотором значении ρ, то может иметь место интересный случай, когда экстремальная чёрная дыра в картине Эйнштейна преобразуется в кротовую нору в картине Йордана. Это возможно лишь для таких конформных множителей, которые переводят двойной горизонт в многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$ во вторую пространственную бесконечность в многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$.

Приведём пример такого конформного преобразования, и полагая, что конформный множитель F зависит от координаты ρ как
$$F = \frac{(\rho - \rho_h)^2}{\rho^2}. \tag{40}$$
Метрика в $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$ тогда будет иметь вид
$$ds_J^2 = \frac{\rho^2}{(\rho - \rho_h)^2}\big[A(\rho)dt^2 - A^{-1}(\rho)d\rho^2 - \rho^2 d\Omega^2\big], \tag{41}$$

где $r(\rho)$, $A(\rho)$ и $V(\rho)$ даются теми же выражениями, как и в картине Эйнштейна.

Таким образом, в многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$ решение описывает кротовую нору и определено в следующем интервале значений ρ:

$$\text{от } \rho = \infty \text{ (пространственная бесконечность)}$$
$$\text{до } \rho = \rho_h > b \text{ (другая пространственная бесконечность).}$$

В многообразии $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$ решение описывает чёрную дыру и определено на большем интервале значений:

$$\text{от } \rho = \infty \text{ (пространственная бесконечность)}$$
$$\text{до } \rho = b \text{ (центральная сингулярность).}$$

Таким образом, в соответствии с определением, имеет место конформное продолжение из картины Йордана (многообразие $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$

в картину Эйнштейна (многообразие $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$. При этом сфера перехода $\mathbb{S}_{\mathrm{trans}}$, являющаяся двойным горизонтом в $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$, соответствует второй пространственной бесконечности в $\mathbb{M}_{\mathrm{J}}$. Это является новой особенностью, так как в описанных в начале доклада конформные продолжения типов I и II регулярные поверхности перехода $\mathbb{S}_{\mathrm{trans}}$ были найдены посредством конформных отображений из сингулярности. Таким образом данное конформное продолжение можно считать конформным продолжением нового типа IV.

0.7 Классификация конформных продолжений

Таким образом, в зависимости от характера сферы перехода $\mathbb{S}_{\text{trans}}$ в конформно продолженном многообразии возможна следующая классификация конформных продолжений:

Конформное продолжение типа I : сингулярность в одном многообразии отображается в обычную регулярную поверхность в другом,

Конформное продолжение типа II : сингулярность в одном многообразии отображается в горизонт конечной площади в другом,

Конформное продолжение типа III : сингулярность в одном многообразии отображается в горизонт бесконечной площади в другом,

Конформное продолжение типа IV : вторая пространственная бесконечность в одном многообразии отображается в горизонт конечной площади в другом.