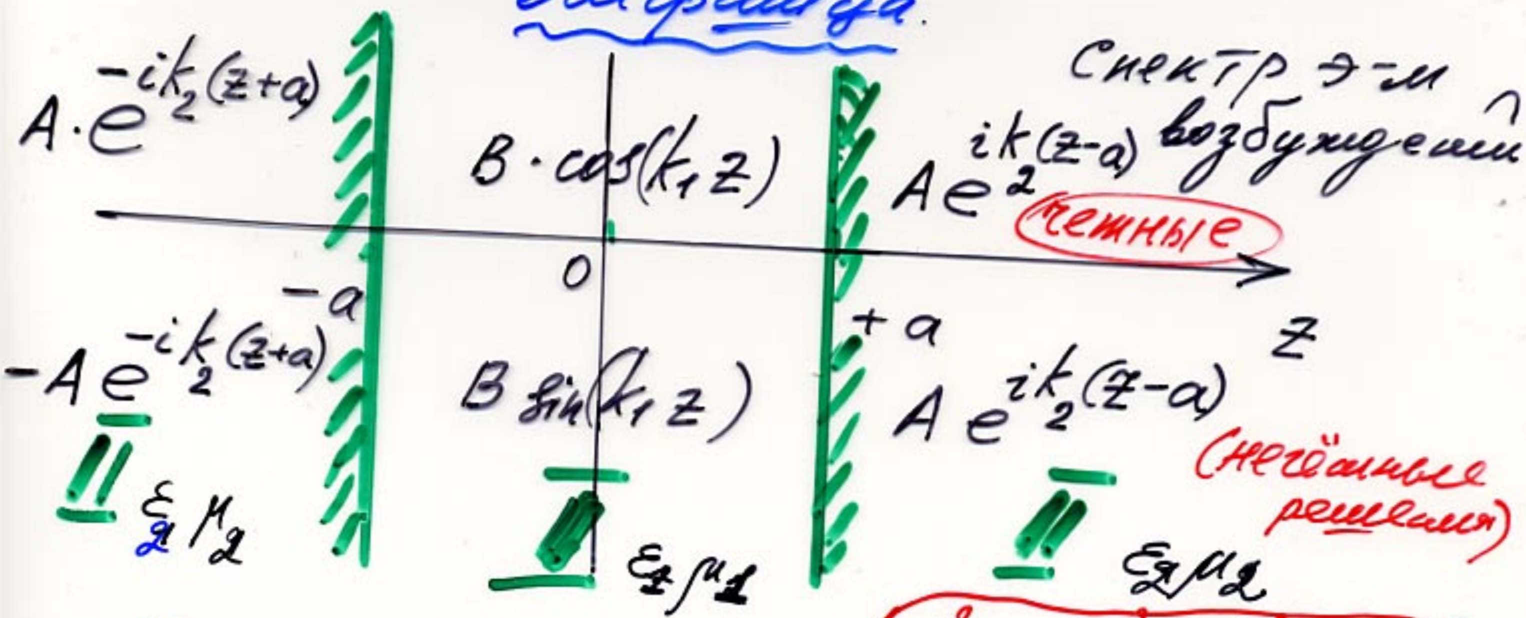
Вывод формулы Лифшица



Граничные условия:

$$k_i^2 = \frac{\omega^2}{c_i^2} - k_\parallel^2,\quad i=1,2$$
$$c_i^2 = c^2/\varepsilon_i\mu_i$$

ТМ-моды: $[\phi'(\pm a)] = 0,\ [\varepsilon(\pm a)\phi(\pm a)] = 0$

ТЕ-моды: $[\psi'(\pm a)] = 0,\ [\mu(\pm a)\psi(\pm a)] = 0$

Обозначение

$$[f(\pm a)] \equiv f(a+0) - f(a-0) \text{ (скачок)}$$

ТМ моды переходят в ТЕ заменой

$\varepsilon \to \mu$!

Достаточно рассмотреть только ТМ.

- Симметрич. решения ($z \to -z$) – чётные
- Асимм. решения (при $z \to -z$ меняют зн.) нечётные

Общий временной множитель выбран в виде $e^{-i\omega t}$

$[\Phi'(\pm a)]=0$ $\quad [\varepsilon\Phi]=0$ (2

чётн. $\quad z=+a \quad ik_2A=-k_1B\sin(ak_1);\quad \varepsilon_2A=\varepsilon_1B\cos k_1$

$z=-a \quad Bk_1\sin ak_1=-ik_2A;\quad B\varepsilon_1\cos k_1a=$
$=\varepsilon_2A$

Частотное ур-ие

$$i\frac{k_2}{\varepsilon_2}=-\frac{k_1}{\varepsilon_1}\,tg(k_1a) \qquad (*)$$

$[\Phi']=0 \qquad [\varepsilon\Phi]=0$

нечётн. реш-ия $\quad z=a \quad ik_2A=Bk_1\cos(ak_1);\quad \varepsilon_2A=\varepsilon_1B\sin(k_1a$

$z=-a \quad k_1B\cos(k_1a)=ik_2A;\quad \varepsilon_1B\sin(k_1a)=$
$=\varepsilon_2A$

Частотное уравнение

$$i\frac{k_2}{\varepsilon_2}=\frac{k_1}{\varepsilon_1}\,ctg(k_1a) \qquad (**)$$

Частотные ур-ия (*) и (**) надо рассматривать по отдельности.

Все решения этих двух уравнений содержатся в решениях следующего одного уравнения

$$tg(2ak_1)=-\frac{2i\alpha}{1+\alpha^2},\quad \alpha=\frac{\varepsilon_1k_2}{\varepsilon_2k_1}.$$

Чтобы доказать предыдущее утверждение, необходимо воспользоваться формулами:

$$\mathrm{tg}(2x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x} = \frac{2\,\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}^2 x - 1} \quad (***)$$

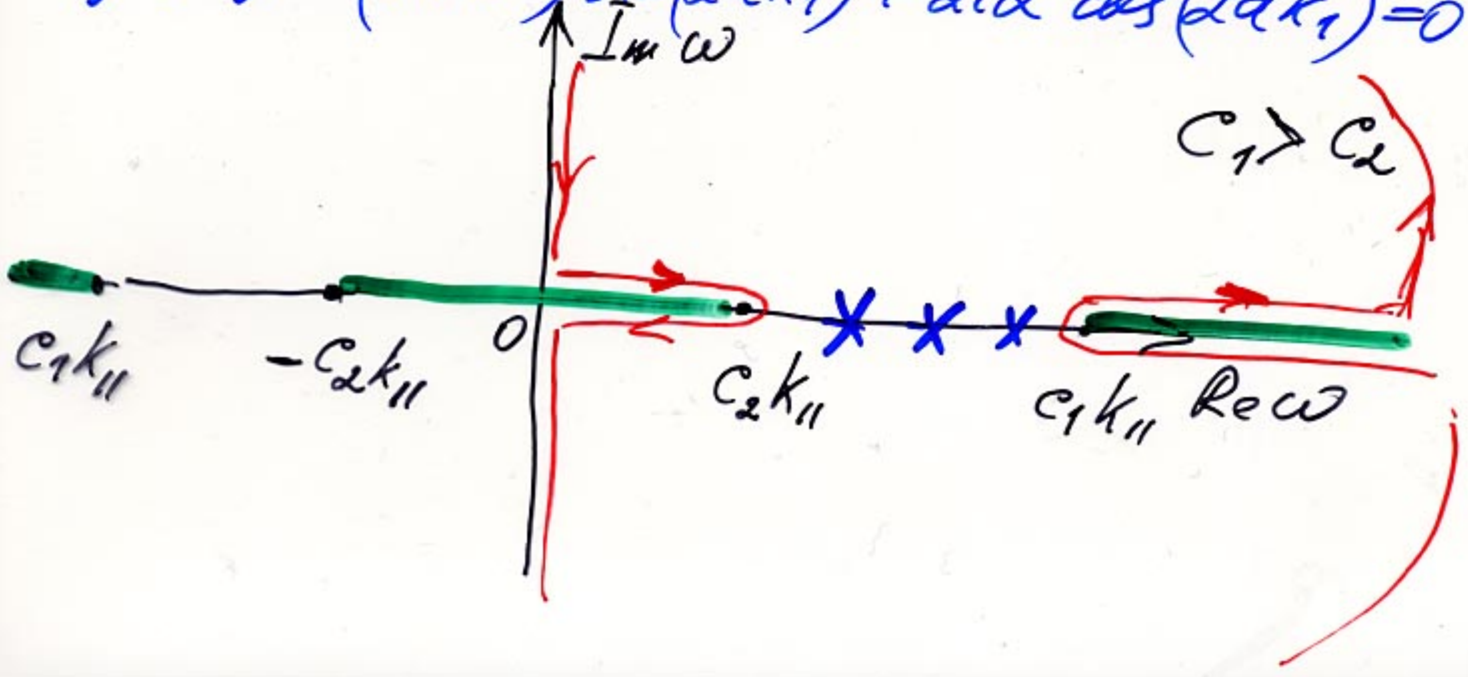
Выход в комплексную плоскость частоты ω

Для суммирования по корням ур-ия (***) воспользуемся принципом аргумента из комплексн. анализа

$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int \omega\, d\omega \frac{d}{d\omega}\ln f(\omega),$$

где $f(\omega)$ – частотное ур-ие (***)

$$f(\omega) = (1+\alpha^2)\sin(2ak_1) + 2i\alpha\cos(2ak_1) = 0$$



Модель плазменной оболочки

Рассматривается бесконечно тонкий слой плазмы, которая описывается в гидродинамическом приближении.

В этом приближении плазма рассматривается как электронная жидкость на фиксированном однородном положительном фоне.

Вся система (фон + эл. жидкость) — эл. нейтральна, т.е. электронная плотность ($-en_0$) в точности сокращается плотн. положит. заряда фона.

Пусть $\dot{\vec{\xi}}(\vec{x},t)$ — скорость электронов в точке $\vec{x}$, тогда для плотности эл-ов $\vec{n}(\vec{x},t)$ уравнение непрерывности запишется так

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(n\vec{\xi})=0$$

Рассматриваем линейный ответ.

Величины первого порядка:

i) индуцированная плотность заряда

$$\sigma(\vec{x},t) \equiv -e\,(n(\vec{x},t)-n_0)$$

ii) скорость эл-ов $\vec{\xi}(\vec{x},t)$

iii) поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$

Произведения этих величин будут отбрасываться.

Ур-ие непрерывности в линейном приближении:

$$\dot{\sigma}-en_0\vec{\nabla}_{\parallel}\cdot\dot{\vec{\xi}}=0, \text{ или } \sigma=en_0\vec{\nabla}_{\parallel}\cdot\vec{\xi}$$

Индуцированный ток

$$\vec{J}=-en_0\dot{\vec{\xi}}=ie\omega n_0\vec{\xi}.$$

Временная зависимость у всех величин $\sim e^{-i\omega t}$.

II-й закон Ньютона для электронов

$$m\ddot{\vec{\xi}}(\vec{x},t)=-e\vec{E}_{\parallel}(\vec{x},t), \quad \vec{x}\in\Sigma$$

$$\vec{\xi}=\frac{e}{m\omega^2}\vec{E}_{\parallel}$$

Таким образом, плотности зарядов и токов, индуцированные в плазменной оболочке, определяются тангенциальной компонентой эл. поля

$$\sigma = \frac{e^2 n_0}{m\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{J} = i \frac{e^2 n_0}{m\omega} \vec{E}_{\parallel}.$$

Ур-ия Максвелла

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} - i\omega \vec{H}/c = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} + i\omega \vec{E}/c = 0, \quad \vec{x} \notin \Sigma$$

Гр. условия:

$$[\vec{E}_{\parallel}] = 0 \quad [\vec{E}_{\perp}] = \frac{2q c^2}{\omega^2} \vec{\nabla}_{\parallel} \cdot \vec{E}_{\parallel}$$

$$[H_{\perp}] = 0, \quad [H_{\parallel}] = -\frac{2qc}{\omega} \vec{n} \times \vec{E}_{\parallel}$$

$$q = \frac{2\pi n e^2}{mc^2} -$$

— характерн. волновой вектор.

$$[\phi(0)] = -2q \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \phi'(0) \quad [\phi'(0)] = 0$$

$$[\psi(0)] = 0, \quad [\psi'(0)] = 2q\,\psi(0)$$

$$\frac{\omega_{sp}^2}{c^2} = \frac{q}{2}\left(\sqrt{q^2 + 4k^2} - q\right) \geq 0$$

Spectral Geometry and open systems

V. V. Nesterenko
(JINR, Dubna, Russia)

Well posed spectral problem

$$\hat{L} f_n(x) = \lambda_n f_n(x) \mapsto \hat{L}\,|n\rangle = \lambda_n |n\rangle$$

$$\hat{I} = \sum_n |n\rangle\langle n|;$$

$$L^{-1} = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{\lambda_n}$$

$\hat{L}$ is a diff. ellip. oper $\hat{L} = -\Delta + \ldots$

Compact manifold M (with boundary ∂M or without boundary)

$$L^{-s} = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{\lambda_n^s}$$

Local spectral ζ-function

$$\zeta_L(s;x) = \sum_n \frac{\langle x|n\rangle\langle n|x\rangle}{\lambda_n^s} = \sum_n \lambda_n^{-s} f_n^*(x) f_n(x)$$

$$\langle 0|T_{00}(x)|0\rangle = \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n^{1/2} f_n^*(x) f_n(x) = \frac{1}{2}\zeta_L\left(-\frac{1}{2};x\right)$$

Global spectral ζ-function

$$\zeta_{\hat{L}}(s) = \int dx\, \zeta_L(s;x)$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\zeta_{\hat{L}}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Finite dimensional case $n = 1, 2, \ldots, N$

$$\hat{L} \to L_{nm}, \quad 1 \leq n,m \leq N, \quad L_{nm} - \lambda\delta_{nm} = 0$$

$$\det(L_{nm} - \lambda\delta_{nm}) = 0 \to \lambda_n \quad P_L(\lambda) = \prod_{n=1}^{N}(\lambda - \lambda_n); \text{ H-C th. } P_L(L) = 0$$

Another spectral function is 	(2)

Heat kernel

$$K_L(x,y;t)=\sum_n e^{-\lambda_n t} f_n^*(x) f_n(y)$$

It is the Green's function for the 'heat conduction' equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-L_x\right) K(x,y;t)=0, \quad K(x,y;0)=\delta(x,y)$$

Integrated heat kernel 	(+ES)

$$\mathrm{Tr}\, K(x,y;t)=\int dx\, K(x,x;t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} (4\pi t)^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} t^{n/2} a_n$$

The heat kernel coefficients a_n are responsible for divergences in relevant QFT.

$$\lambda_n \underset{n\to\infty}{=} C_1 n^2 + C_0 + \frac{C_{-1}}{n^2} + \frac{C_{-2}}{n^4} + \dots$$

$$\{a_n\} \longleftrightarrow \{C_n\}$$

a_n are determined by the geometrical invariants of M and ∂M

$$a_0 = V, \quad a_{1/2} = S, \quad \underset{n\geq 1}{a_n} = a_n(\underbrace{g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\lambda\rho}}_{M}, \underbrace{h^\alpha_{\mu\nu}, \dots}_{\partial M})$$

If $a_2=0$ then ζ regularization gives finite value for E_0.

$$K_{\hat{L}}(t) \longleftrightarrow \zeta_{\hat{L}}(s)$$

Mellin transform

conformal anomaly $\longrightarrow a_2 \neq 0$

III High temperature behaviour of the Casimir thermodynamic functions

$$K(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{n=0,1,2} a_n t^n + ES$$

$$\zeta_T(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_k \left(\Omega_m^2 + \omega_k^2\right)^{-s}$$

$$\zeta_T(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\Omega_m^2 t} \underbrace{\sum_k e^{-\omega_k^2 t}}_{= K(t)}$$

$$\zeta_T(s) = \zeta(s) + \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n=0,1,2} a_n \left(\frac{\hbar}{2\pi T}\right)^{2s-3+2n} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(s-3/2+n)}{\Gamma(s)} \zeta_R(2s+2n-3) \quad (T \to \infty)$$

$$F = -\frac{T}{2} \zeta_T'(0) \text{ - free energy}$$

$$F(T) \underset{T\to\infty}{=} -\frac{T}{2}\zeta'(0) - a_0 \frac{T^4}{\hbar^3} \frac{\pi^2}{90} - a_{1/2} \frac{T^3 \zeta_R(3)}{4\pi^{3/2} \hbar^2} -$$

$$- \frac{a_1}{24} \frac{T^2}{\hbar} + \frac{a_{3/2}}{(4\pi)^{3/2}} T \ln\frac{\hbar}{T} - a_2 \frac{\hbar}{16\pi^2} \left[\ln\frac{\hbar}{4\pi T} + \gamma\right]$$

$$- \frac{a_{5/2}}{(4\pi)^{3/2}} \frac{\hbar^2}{24 T} - T \sum_{n\geq 3} \frac{a_n}{(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{\hbar}{2\pi T}\right)^{2n-3} \Gamma\!\left(n-\frac{3}{2}\right) \zeta_R(2n-3$$

Phys. Rev. D 65, 045011 (2002)
JMP, 40, 6254 (1999)

(2)

Conducting sphere:

$a_0 = 0,\ a_{1/2} = 0,\ a_1 = 0,\ a_{3/2} = 2\pi^{3/2},\ a_2 = 0$

$a_{5/2} = \frac{\pi^{3/2} c^2}{20 R^2},\quad a_j = 0,\ j = 3,4,5$

$\zeta'(0) = \frac{\gamma}{2} + \ln 2 + \frac{7}{16}\zeta_R(3) - \frac{9}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{R}{c}$

$= 0.38265 + \frac{1}{2}\ln\frac{R}{c}$

$F(T) = -\frac{T}{4}\left(\ln\left(\frac{RT}{\hbar c}\right) + 0.76858\right) - \left(\frac{\hbar c}{R}\right)^2 \frac{1}{3840 T} + O\left(\frac{1}{T^3}\right)$

$S(T) = 0.44215 + \frac{1}{4}\ln\frac{RT}{\hbar c} - \frac{1}{3840}\left(\frac{\hbar c}{RT}\right)^2 + O(T^{-4})$

$-\partial F/\partial T$

Conducting cylindrical shell

$a_0 = a_{1/2} = a_1 = a_2 = 0,\ \frac{a_{3/2}}{(4\pi)^{3/2}} = \frac{3}{64R},\ \frac{a_{5/2}}{(4\pi)^{3/2}} = \frac{153}{8192}\frac{c^2}{R^3}$

$\zeta'(0) = \frac{0.45847}{R} + \frac{3}{32R}\ln\frac{R}{2c}$

$F(T) \underset{T\to\infty}{\simeq} -0.22924\frac{T}{R} - \frac{3T}{64R}\ln\frac{RT}{2\hbar c} - \frac{51}{65536}\frac{\hbar^2 c^2}{R^3 T} + O\left(\frac{1}{T^3}\right)$

classical term

Dilute dielectric ball $\quad a_0 \simeq 8\pi\frac{R^3}{c^3}(\Delta n + 2\Delta n^2)$?

$a_{1/2} = -4\pi^{3/2}\frac{R^2}{c^2}\Delta n^2$

$F^{mat}(T)$

$a_1 \simeq 0,\ a_{3/2} \simeq \pi^{3/2}\Delta n^2,\ a_2 \simeq 0$

$F(T) \underset{T\to\infty}{\simeq} \boxed{-a_0\frac{T^4}{\hbar^3}\frac{\pi^2}{90} - a_{1/2}\frac{T^3}{4\pi^{3/2}\hbar^2}\zeta_R(3)} + F_{cas}(T);$

$F_{cas}(T) = -\frac{\Delta n^2}{8}T\left(\ln\frac{4TR}{\hbar c} + \gamma - \frac{7}{8}\right) + O\left(\frac{1}{T^2}\right) = F^{e-m}(T)$

Heat kernel coefficients

$$K(t) = \sum_k e^{-\omega_k^2 t} = (4\pi t)^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} t^{n/2} B_{n/2} + ES,$$

ES stands for exponentially small terms as $t \to 0$.

$$\omega_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} C_2 n^2 + C_1 n + C_0 + \frac{C_{-1}}{n} + \frac{C_{-2}}{n^2} + \frac{C_{-3}}{n^3} + \dots$$

$$\{C_2, C_1, C_0, C_{-1}, C_{-2}, \dots\} \longleftrightarrow \{B_0, B_{1/2}, B_1, B_{3/2}, B_2 \dots\}$$

For a region Ω on a plane with smooth boundary curve Γ

$$K(t) \simeq \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{12\pi}\int_\Gamma k(s)\,ds + \frac{\sqrt{\pi t}}{256\pi}\int_\Gamma k^2(s)\,ds +$$

$$+ \frac{t}{315\pi}\int_\Gamma k^3(s)\,ds + \sqrt{\pi t^3}\left[\frac{37}{2^{15}\pi}\int_\Gamma k^4(s)\,ds - \frac{11}{2^{11}\pi}\int_\Gamma (k')^2\,ds\right] + O(t^2)$$

In general case

$$B_0 = V, \quad B_{1/2} = -\sqrt{\pi}\,\frac{S}{2}.$$

$d = 3$ $\quad B_2$

$d = 2$ $\quad B_{3/2}$

V.V.N. I.G. Pirozhenko, J. Dittrich
CQG, 20, 431 (2003)

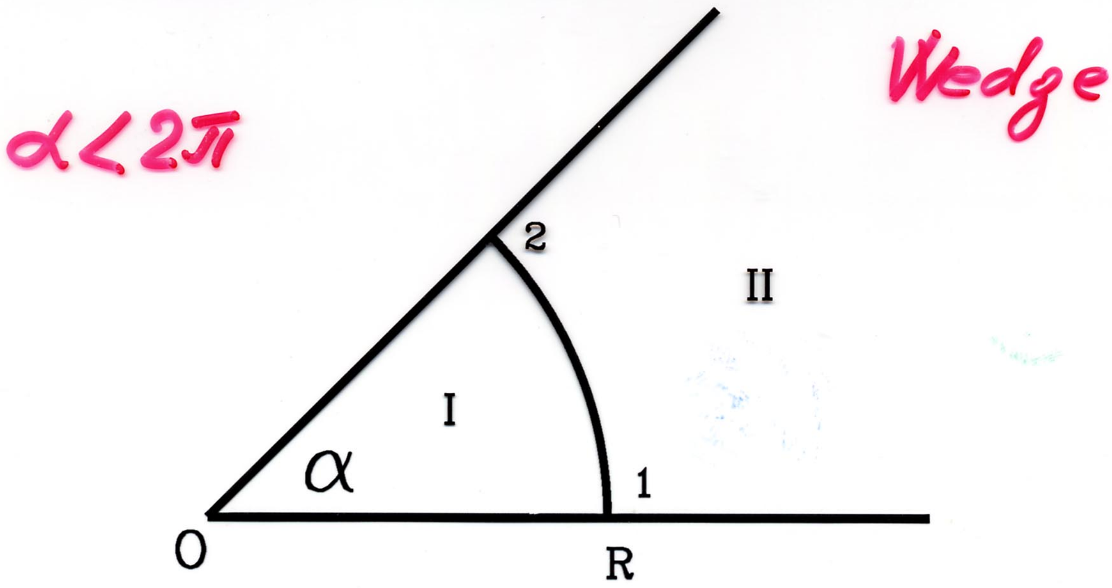


FIG. 1. The cross section of a dihedral angle with circular boundary of radius R inside.

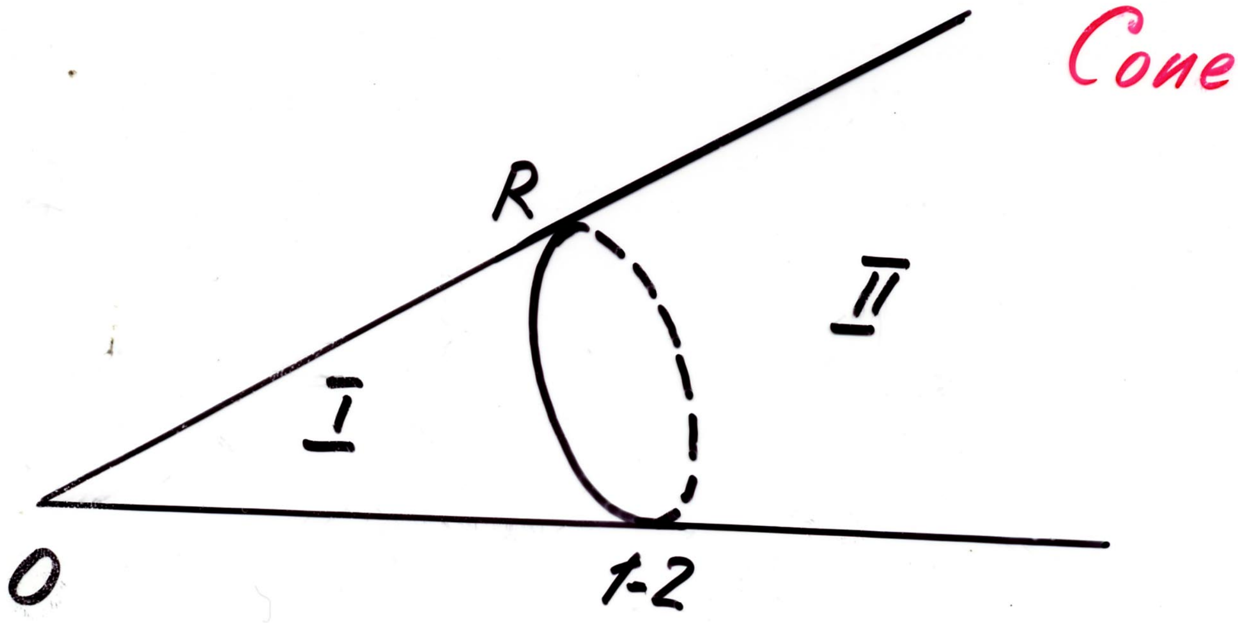


TABLE III. The contributions of different parts of the boundary to heat kernel coefficients; D and N stand for the Dirichlet, Neumann boundary conditions for a wedge, D_C and N_C denote these conditions for a cone; the upper (lower) sign is referred to the internal I (external II) sector.

		Curvature of the arc 1–2	Right-angled corners at the points 1 and 2	Corner of angle α at the origin
B_1	D	$\pm\frac{\alpha}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$c(\alpha)$ 0
	N	$\pm\frac{\alpha}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$c(\alpha)$ 0
	D_C	$\pm\frac{\alpha}{3}$		$2\,c(\alpha/2)$ 0
	N_C	$\pm\frac{\alpha}{3}$		$2\,c(\alpha/2)$ / 0
$B_{3/2}$	D	$\frac{\sqrt{\pi}}{64}\frac{\alpha}{R}$	$\pm\frac{\sqrt{\pi}}{4R}$	
	N	$\frac{5\sqrt{\pi}}{64}\frac{\alpha}{R}$	$\pm\frac{3}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{R}$	
	D_C	$\frac{\sqrt{\pi}}{64}\frac{\alpha}{R}$		
	N_C	$\frac{5\sqrt{\pi}}{64}\frac{\alpha}{R}$		
B_2	D	$\pm\frac{4}{315}\frac{\alpha}{R^2}$	$\frac{1}{8}\frac{\pi}{R^2}$	
	N	$\pm\frac{4}{45}\frac{\alpha}{R^2}$	$\frac{3}{8}\frac{\pi}{R^2}$	
	D_C	$\pm\frac{4}{315}\frac{\alpha}{R^2}$		
	N_C	$\pm\frac{4}{45}\frac{\alpha}{R^2}$		
$B_{5/2}$	D	$\frac{37\sqrt{\pi}}{8192}\frac{\alpha}{R^3}$	$\pm\frac{25}{96}\frac{\sqrt{\pi}}{R^3}$	
	N	$\frac{269\sqrt{\pi}}{8192}\frac{\alpha}{R^3}$	$\pm\frac{21}{32}\frac{\sqrt{\pi}}{R^3}$	
	D_C	$\frac{37\sqrt{\pi}}{8192}\frac{\alpha}{R^3}$		
	N_C	$\frac{269\sqrt{\pi}}{8192}\frac{\alpha}{R^3}$		

$$c(\alpha)=\frac{\pi^2-\alpha^2}{6\alpha}$$

$$B_2^{e-m}=2\cdot\frac{\pi}{8R^2}+2\cdot\frac{3}{8}\frac{\pi}{R^2}=\frac{\pi}{R^2}\neq 0$$

due corners

$$B_{3/2}=2\cdot\frac{\pi\sqrt{\pi}}{64R}+2\frac{5}{64}\frac{\pi\sqrt{\pi}}{R}=\frac{3}{16}\frac{\pi\sqrt{\pi}}{R}\neq 0$$

due curvature of boundary

Литература

1. Ю.С. Бараш, Силы Ван-дер-Ваальса М.: Наука, 1988.
2. В.М. Мостепаненко, Н.Н. Трунов, эффект Казимира и его приложения, М.: Энергоатомиздат, 1990.
3. K.A. Milton, J. Phys. A 37 (2004) R209.
4. M. Bordag, U. ~~Moh~~ Mohideen, V.M. Mostepanenko, Phys. Reports, 353 (2001) 1.
5. Journal of Phys. A: Math. Theor. Vol. 41, No. 16 (2008)

   Papers of 8th Workshop on Quantum Field Theory Under the Influence of External conditions (QFEXT07) (Leipzig, Germany, 16-21 September 2007)
6. QFEXT05 – J. Phys. A vol. 39, No. 21 (2006)

   hep-th/0503100
7. V.V. Nesterenko, G. Lambiase, G. Scarpetta, La ~~Riv~~ Rivista del Nuovo Cimento, Vol. 27, No 6, p.p. 1-74 (2004) hep-th/0503100