Графен: от квантовой теории поля до эффекта Фарадея

Василевич ДВ, **Фиалковский ИВ**
СПбГУ, С.-Петербург
USP, Sao Paulo

Содержание

- Квантовая теория поля:
  - Лагранжев формализм, принцип наименьшего действия, принципы построение лагранжиана
  - Функциональный интеграл – формальное определение, связь со стат механикой
  - Взаимодействующие поля, теория возмущений, эффективное действие
- Фермионы для описания систем конденсированного состояния
  - линейный спектр, структура атомной решетки, число «степеней свободы»
  - Лагранжиан, взаимодействие с (внешним) электромагнитным полем
  - эффективное действие в первом приближении
- Уравнения Максвелла
  - вариация эфф действия, поляризационный оператор как ток
  - дельта потенциал и условия сшивки
  - решение задачи рассеяния с пол оператором общего вида

Введение

Квантовая механика:
принцип соответствия, нерелятивистское время, гамильтонов формализм. **Уравнение Шредингера, как описание динамики**

$$H\Psi = i\hbar\ \partial_t \Psi$$

Число частиц – сохраняется!

Квантовая теория поля:
КМ + теория относительности + превращения частиц
Каноническое квантование:
гамильтонов формализм + принцип соответствия: частицы – поля (скобка Пуассона – коммутатор).

Лагранжев подход: функционал действия и интеграл по путям.

Поле – как переносчик взаимодействия,
Кванты его возбуждения – как частицы.

Лагранжев подход

Принцип наименьшего действия:
существует такая функция времени и динамических переменных *L(x)*, которая определяет всю (классическую) динамику системы через функционал действия *S*

$$S = \int dx_0 d\vec{x}\, \mathcal{L}\left(x_0, \vec{x}\right)$$

$$\delta S = 0$$

Уравнения Лагранжа-Эйлера

Принципы построения лагранжиана/действия
- порождает уравнения движения не выше второго порядка
- сохраняет симметрии задачи (теорема Нетер)

- релятивистская инвариантность (относительно группы Пуанкаре)
- локальность (функция полей и их производных в одной точке)
- вещественность (эрмитовость)

Проще говоря – описывает реальность!

Релятивистский Лагранжиан I

<u>**Представления группы Пункаре = свободные поля**</u>

- скалярное (бозонные частицы спина 0)

$$\mathcal{L}=\tfrac{1}{2}\ \partial^\mu\varphi\ \partial_\mu\varphi-m^2\varphi^2$$

- векторное (бозонные частицы спина 1)

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu, \qquad F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$$

- спинорное (фермионные частицы спина 1/2)

$$\mathcal{L}=\overline{\psi}\ \ i\partial^\mu\gamma_\mu-m\ \ \psi, \qquad \gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$$

Представления с высшими спинами, приводимые представления.

Универсальные обозначения:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\phi\ \mathcal{K}\ \phi$$

K – дифференциальный оператор

ϕ – рассматриваемые поля

Релятивистский Лагранжиан II

Взаимодействие полей строится из тех же принципов

Самодействие:

$$a\,\varphi^3, \quad b\,\varphi^4, \quad c\,\left(A^\mu A_\mu\right)^2, \quad \dots$$

Взаимодействие:

$$d\,\partial^\mu\varphi\,A_\mu, \quad e\,\overline{\psi}\,\varphi\,\psi, \quad f\,\overline{\psi}\,A^\mu\gamma_\mu\,\psi, \quad \dots$$

Оказывается, что в квантовом мире не все взаимодействия хороши, есть дополнительное требование **перенормируемости.** Определяется размерностью **констант связи (*a, b, c,* ...).**

Итого: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{inter}$

<u>Все это хорошо только если мы опишем уже известные частицы!</u>

<u>Какое отношение к квантовому миру? Пока никакого.</u>

Интеграл по путям I: Квантовая механика

Квантовый мир:
- нет классических траекторий (движения частиц)
- есть вероятности перехода (между состояниями)
- **наиболее вероятные конфигурации – близкие к классическим**

Интеграл по путям:

$$\langle q | q' \rangle = N \int \mathcal{D}q \; \exp\left(iS[q]/\hbar \right)$$

«интеграл» по всем возможным «путям» из состояния ***q*** в состояние ***q'***. Главный вклад там, где δS **близко к нулю:**

$$\hbar = 6{,}5821 \cdot 10^{-16} \mathrm{eV}$$

Предел $\hbar \to 0$ восстанавливает классические уравнения движения.

Интеграл по путям II: Квантовая теория поля

Утверждается, что с помощью «производящего функционала»

$$Z\left[J\right] = N\int\mathcal{D}\varphi\,\exp\left[iS\left[\varphi\right] + J\varphi\right]$$

можно описать всю физику квантовых частиц (полей).
Здесь ***J*** – некоторый внешний «источник».

Определение (гауссова) интеграла

$$\int\mathcal{D}\phi\,\exp\left[i\int dx\,\frac{1}{2}\phi\,\mathcal{K}\,\phi\right] \equiv \left[\mathrm{Det}\mathcal{K}\right]^{-1/2}$$

любое квадратичное действие интегрируется заменой переменных

$$\int\mathcal{D}\phi\,e^{i\int dx\left(\frac{1}{2}\phi\mathcal{K}\phi + J\phi\right)} \equiv \left[\mathrm{Det}\mathcal{K}\right]^{-1/2} e^{\frac{1}{2}J\mathcal{K}^{-1}J}$$

Детерминант оператора – произведение всех его собственных чисел

Интеграл по путям IIа: применение

Пропагатор (функция распространения, она же «коррелятор»)

$$D(x,y) = \mathcal{K}^{-1}(x,y)$$

$\mathcal{K}$**– дифференциальный оператор** $\Longrightarrow$ ***D* –** (просто) **функция Грина, а их много: запаздывающая, опережающая, <u>фейнмановская</u>**

Энергия вакуумного состояния (свободная энергия)

$$E = -\frac{1}{2T}\,\mathrm{Ln}\,Z[0]$$

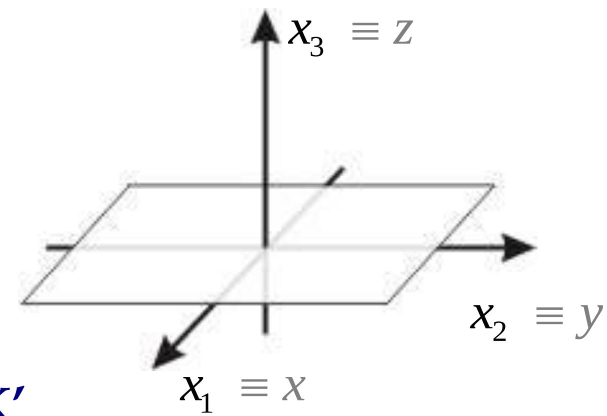
При наличии изменяемых внешних параметров системы *E* дает энергию Казимир.

Далее: теория возмущений, диаграммы, перенормировки

Есть аналогия:
***Z*[*J*] - статсумма классической статистической механики**

Рамон, П. Теория поля. Современный вводный курс
Цвелик, А. Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния

Графен: релятивистский лагранжиан



Элементарные возбуждения в графене – релятивистские «2+1»-мерные фермионы. Кто же они?

8 степеней свободы:

- **два заряда (две энергии)** $\pm e$
- **два спина** $\pm 1/2$
- **две точки K и K′**

своя скорость «света» v_F

$$\mathcal{L}_0 = \delta \;\; x_3 \sum_{\lambda=\uparrow,\downarrow}^{N} \bar{\psi}_\lambda \;\; i\partial_a \tilde{\gamma}^a - m \;\; \psi_\lambda, \qquad a = 0, 1, 2$$

$$\tilde{\gamma} = \;\; \sigma_3, \; v_F i\sigma_1, \; v_F i\sigma_2 \;\; \otimes \sigma_3$$

ψ – четырехкомпонентный Дираковский спинор, $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \tilde{\gamma}_0$

Khveschenko, PRL 87 (2001) 246802, Sharapov, Gusynin, PRB 69 (2004) 075104

Но этого мало – нет взаимодействия с «внешним миром»!

$$\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^{1,2} = v_F \begin{pmatrix} i\sigma_{1,2} & 0 \\ 0 & -i\sigma_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Графен: производящий функционал

Итого, полное действие:

$$\mathcal{S}_{total} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta\;\; x_3 \left[\overline{\psi}_\sigma \;\; i\partial_a \tilde{\gamma}^a - eA_a \tilde{\gamma}^a - m \;\; \psi_\sigma \right] \right)$$

$$\mu = 0,1,2,3, \quad a = 0,1,2, \quad \sigma = \uparrow, \downarrow, \ldots N$$

A_μ **– обычное (четырехмерное) электромагнитное поле**
(обычный электромагнитный потенциал)

Производящий функционал:

$$Z[0] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\overline{\psi} \mathcal{D}\psi \; e^{-\frac{i}{4} F_{\mu\nu}^2 + i\delta(x_3)\overline{\psi}\left(i\not{\partial} - e\not{A} - m\right)\psi}$$

$$\not{\partial} \equiv \partial^a \tilde{\gamma}_a$$

Но такое мы считать не умеем (не учились):
кубическое действие + дельта функция

Графен: эффективное действие

Но мы «умеем» считать

$$e^{i\Gamma\left(A\right)} \equiv \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\; e^{\overline{\psi}\left(i\not\partial - e\not A - m\right)\psi} = \mathrm{Det}\;\; i\not\partial - e\not A - m$$

и тогда

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A\, e^{-\frac{i}{4}F_{\mu\nu}^2 + i\delta(x_3)\Gamma\left(A\right)}$$

по теории возмущений легко сосчитать

$$\Gamma \;\; A \;\; \equiv -i\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}\;\; i\not\partial - e\not A - m$$

$$\approx N + i\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{i\not\partial - m} e\not A\right) + \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{i\not\partial - m} e\not A \frac{1}{i\not\partial - m} e\not A\right) + O(A^3)$$

$$N = \mathrm{Det}(i\not\partial - m), \qquad \mathrm{Ln}\,\mathrm{Det} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}$$

Графен: поляризационный оператор

Попробуем вычислить квадратичный (по ЭМ полю) **порядок**

$$\Gamma(A) = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{i\not{\partial} - m} e\not{A} \frac{1}{i\not{\partial} - m} e\not{A}\right)$$

$$\not{A} \equiv A^a \tilde{\gamma}_a$$

что такое (фукциональный) **след оператора?**

$$\mathrm{Tr}\ \mathcal{K} \ = \sum_{all\ k} \ \psi_k, \mathcal{K}\psi_k$$

в качестве полного набора можно взять плоские волны $\psi_k(x) = e^{ikx}$
а согласно области задания оператора *K* скалярное произведение

$$\varphi, \psi \ \equiv \int d^3x\ \varphi^*(x)\psi(x)$$

тогда получаем

$$\Gamma(A) = \frac{1}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} A_a(k)\Pi^{ab}(k)A_b(-k)$$

Π^{ab} - поляризационный оператор, явно на следующей странице

Графен: поляризационный оператор

Итак

$$\Gamma(A)=\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}A_a(k)\Pi^{ab}(k)A_b(-k)$$

поляризационный оператор

$$\Pi^{ab}(k)=ie^2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{tr}\left(\frac{\not{q}-m}{q^2-m^2}\tilde{\gamma}^a\frac{\not{q}-\not{k}-m}{(q-k)^2-m^2}\tilde{\gamma}^b\right)=3\pm\infty$$

Требуется «перенормировка» - самое интересное в КТП.

- **вводим регуляризацию**
  (тогда все конечно)
- **вычисляем асимптотику**
  (в пределе снятия регуляризации)
- **переопределяем исходные параметры**

$$\int_{-\infty}^{\infty}dp\to\int_{-M}^{M}dp\approx 2M+O(1)$$

$$e\to e(M)\quad \text{так, что}\quad e(M)\int_{-M}^{M}dp=e_0<\infty$$

Киральная аномалия I

В процедуре перенормировки есть проблема, называется – квантовые аномалии:

введение регуляризации нарушает симметрии исходной модели

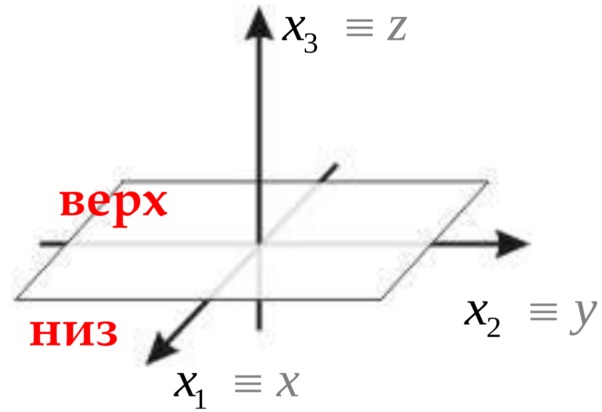
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p+k)dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)dp \qquad \int_{-M}^{M} f(p+k)dp \neq \int_{-M}^{M} f(p)dp$$

Оказывается, что для фермионов, живущих на двумерной плоскости существует «киральная аномалия»:

введение регуляризации нарушает
либо **калибровочную инвариантность**
либо **пространственную четность**

Иными словами, у графена (должен/может) **отличаться «верх» и «низ»**

Киральная аномалия II



При отражении оси *z*
«верх» НЕ ПЕРЕХОДИТ в «низ»!!!

Математически (v=1)

$$\Pi^{ab}(p) = \Psi(p)\left(g^{ab} - \frac{p^a p^b}{p^2}\right) + i\phi(p)\varepsilon^{abc} p_c$$

$$g^{ab} = (1,-1,-1), \qquad \varepsilon^{012} = 1$$

Функции $\Psi(p)$, $\phi(p)$ многократно вычислялись в разных обстоятельствах, с разным количеством параметров

Semenoff G.W., PRL 53 (1984) 2449-2452, Appelquist, T.W., et al., PRD 33 (1986) 3704
Gorbar, E.V., et al., PRB 66 (2002) 045108.

Необходимость введения члена Черна-Саймонса в графене

Beneventano, C.G. et al, arXiv:0901.0396v1 [hep-th]

Модифицированные уравнения Максвелла

Мы получили выражение для производящего функционала

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A\, e^{-\frac{i}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{i}{2}\delta(x_3)A_a\Pi^{ab}A_b}$$

Фактически мы получили квантовую поправку к действию классической электродинамики, а значит и к уравнениям движения:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \delta(x_3)\Pi^{\nu\mu}A_\mu = 0$$

Как решать такие уравнения?

- везде кроме $x_3 = 0$ обычные уравнения Максвелла

- на поверхности – дополнительное условие, получается интегрированием уравнения в окрестности $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx_3 \ \ldots$

Рассеяние плоской волны

Исследуем рассеяние плоской поляризованной волны в такой системе

$$A_a = e^{-i\omega t}\begin{cases} \mathbf{e}_x e^{ik_3 z} + \left(r_{xx}\mathbf{e}_x + r_{xy}\mathbf{e}_y \right) e^{-ik_3 z}, & z<0 \\ \left(t_{xx}\mathbf{e}_x + t_{xy}\mathbf{e}_y \right) e^{ik_3 z}, & z>0 \end{cases}$$

$\mathbf{e}_{x,y}$ **- единичные орты в направлении** ***x,y***

$r_{xx,xy}$ **- коэффициенты отражения**

$t_{xx,xy}$ **- коэффициенты прохождения**

Дополнительное условие, которое мы получили

$$\begin{cases} A_a |_{z=+0} = A_a |_{z=-0} \\ \partial_z A_a \big|_{z=+0} - \partial_z A_a \big|_{z=-0} = \Pi_a{}^b A_b |_{z=0} \end{cases}$$

Рассеяние плоской волны 2

Ответ

$$t_{xx} = \frac{-2\omega(i\alpha\Psi + 2\omega)}{\alpha^2\Psi^2 - 4i\alpha\omega\Psi - (4+\alpha^2\phi^2)\omega^2}$$

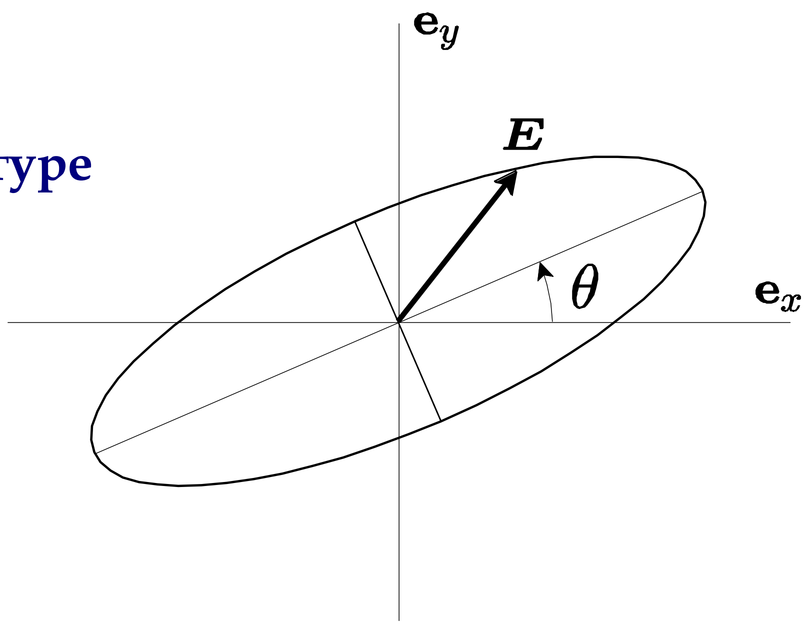
$$t_{xy} = \frac{2\alpha\phi\omega^2}{\alpha^2\Psi^2 - 4i\alpha\omega\Psi - (4+\alpha^2\phi^2)\omega^2}$$

$$r_{xx} = t_{xx} - 1, \quad r_{xy} = t_{xy}$$

Это означает, что при падении линейно поляризованного света на графеновую мембрану может происходить

- **отражение, прохождение и абсорбция**
- **поворот поляризации**
- **появление эллиптической поляризации**

Картинка



В линейном порядке по тонкой структуре

поворот оси поляризации

$$\theta = -\frac{\alpha \operatorname{Re}\phi}{2} + O(\alpha^2)$$

амплитуда прошедшей волны

$$\mathcal{A} = 1 - \alpha \left| \frac{\operatorname{Im}\Psi}{2\omega} \right| + O(\alpha^2)$$

отношение осей эллипса

$$R = -\frac{\alpha \operatorname{Im}\Psi}{2} + O(\alpha^2)$$

Вассилевич, Фиалковский, tbp

Массивные фермионы I

Явные выражения для массивных фермионов

$$\Psi(p) = \alpha N_f \frac{2mp - (p^2 + 4m^2)\operatorname{arctanh}(p/2m)}{2p}$$

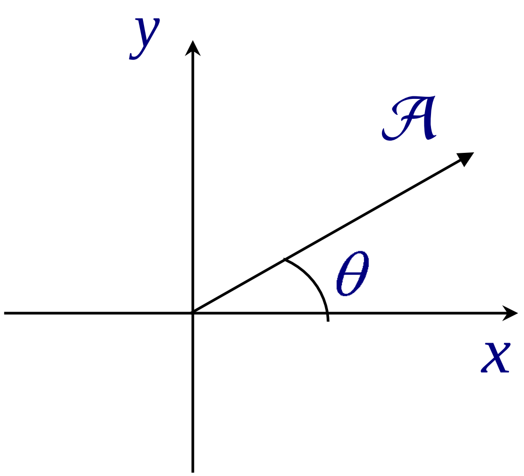
$$\phi(p) = \alpha N_f \left(\frac{2m \operatorname{arctanh}(p/2m)}{p} - 1 \right)$$

$\alpha = 1/137$ **- постоянная тонкой структуры**

N_f **- число «ароматов» фермионов, физический случай =2**

ВАЖНО: при различных значениях *p* есть как вещественная, так и мнимая часть

Массивные фермионы II



В пределе больших частот $\omega >> m$

$$\Psi(p) \approx -i2\pi\alpha\omega, \qquad \phi(p) \approx -4\alpha$$

амплитуда прошедшей волны

$$\mathcal{A} \approx 1 - \alpha\pi$$

поворот оси поляризации

$$\theta \approx -2\alpha$$

отношение осей эллипса

$$R \approx 0$$

Предсказываемое поглощение совпадает с экспериментом.
Поворот поляризации – нужно срочно мерить!

Спасибо!