Дуальность Шура – Вейля

На прошлой лекции выяснили как R матричное представление $H_n(q)$ – $\rho_R : H_n(q) \longrightarrow End(V^{\otimes n})$ раскладывается на неприводимые.

А именно:

для R-матриц (см стр 4 лекция 4), действующих на пространстве V размерности N

$$\rho_R = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mu_\lambda \rho_\lambda \quad \text{, где}$$

$\lambda \vdash n$ – всевозможные диаграммы Юнга с n клетками высоты не более, чем N (т.е. $\leq N$ клеток в $\forall$ столбце)

ρ_λ – соотв. неприводимое представление $H_n(q)$

μ_λ – число, мультиплетность – сколько раз ρ_λ присутствует в ρ_R.

Правила вычисления μ_λ см на стр 8 лекции 4

Следствие: $\dim \rho_R = \dim V^{\otimes n} = N^N = \sum_{\lambda \vdash n} \mu_\lambda \dim \rho_\lambda$

Обозначим t_λ — некий примитивный идемпотент в алгебре $H_n(q)$, отвечающий диаграмме Юнга $\lambda \vdash n$. (t_λ — какой-то полином из JM элементов, мы его научились строить на лекции 2)

Заметим, что

1) $\rho_\mu(t_\lambda) = 0$ для $\forall\ \lambda \vdash n,\ \mu \vdash n : \lambda \neq \mu$

т.е. t_λ, ~~вы~~ $\in H_n(q)$, вычисленный в неприводимом представлении $\mu \neq \lambda$, равен 0.

2) $\operatorname{rank} \rho_\lambda(t_\lambda) = 1$. в представлении ρ_λ t_λ является проектором на 1-мерное подпространство

Следовательно

$$\boxed{\operatorname{rank} \rho_R(t_\lambda) = \mu_\lambda}$$

Обозначим $V_{t_\lambda} = \operatorname{Im} \rho_R(t_\lambda)$

$$V_{t_\lambda} \subset V^{\otimes n} \qquad \dim V_{t_\lambda} = \mu_\lambda$$

Что это за подпространство V_{t_λ} и какие операторы в нём действуют?

Ясно, что если $X \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$:

$$X\, \rho_R(t_\lambda) = \rho_R(t_\lambda)\, X \text{, то}$$

X оставляет V_{t_λ} инвариантным.

В частности <u>централизатор действия $H_n(q)$ в $V^{\otimes n}$ оставляет инвариантными все подпространства V_{t_λ} ($\forall \lambda$, $\forall t_\lambda$)</u>

<u>Def</u>: Централизатор действия алгебры $\mathcal{A}$ в пространстве W — это линейная подалгебра $C_{\mathcal{A}} \subset \mathrm{End}\, W$ эндоморфизмов пространства W таких, что

$$\forall\, x \in C_{\mathcal{A}},\ \forall\, a \in \mathcal{A} : \ a x = x a$$

Каков централизатор действия $\mathbb{C}[S_n] = H_n(1)$ в $V^{\otimes n}$?

На $V^{\otimes n}$ действует группа $GL(N)$ обратимых матриц размера $N \times N$

$$g \in GL(N) \text{ это } N \times N \text{ матрица}$$

Её <u>векторное представление</u> определено на пр-стве V $\forall\, v \in V$ под действием $g \in GL(N)$ переходит в gv — свертка матрицы и столбца.

Действие $g \in GL(N)$ на $V^{\otimes n}$ это

$$v_1 \otimes v_2 \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n} \xmapsto{\ g\ } (gv_1) \otimes (gv_2) \otimes \ldots \otimes (gv_n)$$

В случае $\mathbb{C}[S_n]$ наше R-матричное представление становится представлением S_n матрицами перестановки $s_i \mapsto P_{i\,i+1}$

$$P_{12}(u\otimes v) = v\otimes u$$

Замечаем: $P_{12}((gu)\otimes(gv)) = (gv)\otimes(gu) =$

$= g(v\otimes u) = g(P_{12}(u\otimes v))$ для $\forall g\in GL(N)$

то есть действие симметрической группы на $V^{\otimes n}$ перестановочно с действием $GL(N)$ там же.

<u>Утв</u>: действия $GL(N)$ и S_n на $V^{\otimes n}$ взаимно централизуют друг друга

$$\mathrm{End}\, V^{\otimes n} = \rho_P(S_n)\otimes \mathrm{Vect}^{\otimes n}(GL(N))$$

это продолжение векторного представления $GL(N) \subseteq V$ на $V^{\otimes n}$

<u>Следствие</u>: Подпространства $V_{t_\lambda} = \mathrm{Im}\,\rho_P(t_\lambda)$ — есть неприводимые относительно действия $GL(N)$ подпространства

$\rho_P(t_\lambda)$ — проекторы на неприводимые представления $GL(N)$ в $V^{\otimes n}$

Разные t_λ и t'_λ, отвечающие одной λ порождают проекторы ρ_P на эквивалентные представления $GL(N)$:

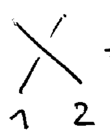
$$\boxed{V_{t_\lambda} \cong V_{t'_\lambda} \overset{\text{def}}{=}: V_\lambda}$$

Мультиплетность V_λ в $V^{\otimes n}$ — это размерность $d_\lambda \overset{\dim}{=} \rho_\lambda(H_n(q))$ — неприводимого представления λ алгебры Гекке $H_n(q)$

Что в общем случае $H_n(q)$?

В случае $q=1$ взаимная централизуемость действия S_n и $GL(N)$ на $V^{\otimes n}$ следовала из свойства

$$P^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}\, g^{k_1}_{j_1} g^{k_2}_{j_2} = g^{j_1}_{i_1} g^{j_2}_{i_2}\, P^{k_1 k_2}_{j_1 j_2}, \text{ т.е.}$$

$P^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} =$  $= \delta^{j_2}_{i_1} \delta^{j_1}_{i_2}$

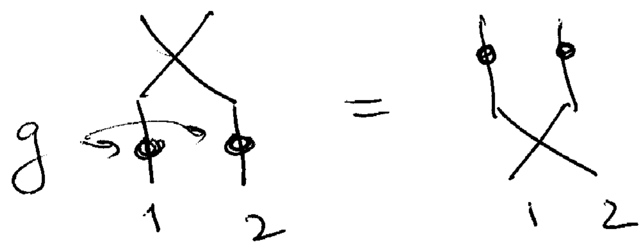
из утверждения

$$g^{k_1}_{i_2} g^{k_2}_{i_1} = g^{k_2}_{i_1} g^{k_1}_{i_2}$$

В компактных "матричных" обозначениях:

$$P_{12}\, g_1 g_2 = g_1 g_2\, P_{12} \Leftrightarrow g_1 g_2 = g_2 g_1$$

В картинках



g_i^j — координаты элемента $g \in GL(N)$ в каком-то базисе (выбрали базис в V). То есть

g_i^j — координатные функции на $GL(N)$

(тут i и j - фиксированы)

$$g_i^j \in \mathrm{Fun}(GL(N))$$

Грубо говоря, $\forall$ функция на $GL(N)$ может быть построена как полином по g_i^j.

Если формально запишем при $q \neq 1$

$$R_{12}\, g_1 g_2 = g_1 g_2 R_{12}$$

то такие g_i^j — координатные функции на "квантовой группе $GL_q(N)$" или квантование (= деформация) абелевой алгебры функций на $GL(N)$. g_j^i — действительно уже не коммутируют между собой.

Например для $R = \left(\begin{array}{cc|cc} q & & & \\ & \lambda & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ & & & q \end{array}\right)$ $(\dim V = 2)$

обозначив $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеем:

$\boxed{\text{Это } GL_q(2)} \longrightarrow$

$ab = qba$, $ac = qca$
$bd = qdb$, $cd = qdc$
$bc = cb$, $ad - da = (q - q^{-1})bc$

Квантовые алгебры $GL_q(N)$, а в большей степени квантовые алгебры функций на кокасательном расслоении $GL(N)$ используются при построении квантовых интегрируемых моделей теор. физики — аналогов классических интегрируемых моделей на $T^*GL(N)$

Матрицы g; ~~удовлетворяющие~~ чьи компоненты удовлетворяют перестановочным соотношениям вида

$$R_{12}\, g_1 g_2 = g_1 g_2\, R_{12}$$

называются "квантовыми матрицами".

Знание алгебры $H_n(q)$ и ее R-матричных представлений позволяет определить понятия следа, степени матрицы, её "спектра" и доказать аналог теоремы Гамильтона - Кэли для квантовых матриц.

Все это — арсенал в исследовании квантовых интегр. моделей.

Спиновые цепочки, алгебра Гекке и их R-матричные представления

Рассмотрим простейшее R-матричное представление $H_n(q)$ в V, $\dim V = 2$

$$R_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} q & & & \\ & \lambda & 1 & \\ \hline & 1 & & \\ & & & q \end{array}\right) \end{array}$$

действует на $V \otimes V$ – 4-мерном пространстве

$$\boxed{\lambda := q - q^{-1}}$$

Представление $\rho_R : \quad \sigma_i \mapsto R_{i\,i+1}$

Перепишем R в терминах базиса матриц Паули

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\{\mathbb{I}, \sigma^x, \sigma^y, \sigma^z\}$ – базис в $\mathrm{End}(V)$

$$\boxed{R = \frac{1}{2}\left\{\sigma^x \otimes \sigma^x + \sigma^y \otimes \sigma^y + \frac{q+q^{-1}}{2}\sigma^z \otimes \sigma^z\right\} + \frac{q-q^{-1}}{4}\left(\sigma^z \otimes 1 - 1 \otimes \sigma^z\right) + \left(q - \frac{q+q^{-1}}{4}\right)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}}$$

Замечаем: при $q = 1$

$$\sum_{i=1}^{N-1} R_{i\,i+1} = \rho_R\left(\sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\vec{\sigma}_i \otimes \vec{\sigma}_{i+1} + \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}\right) -$$

— это (с точностью до сдвига на единицу) гамильтониан цепочки Гейзенберга — цепочки взаимодействующих спинов ($s=\frac{1}{2}$). N - число спинов в цепочке

При $q\neq 1$ имеем XXZ цепочку — неоднородную цепочку с выделенным направлением Z (см. коэффициент при $\sigma^z\otimes\sigma^z$) и параметром анизотропии $\Delta := \frac{q+q^{-1}}{2}$ (коэфф. при $\sigma^z\otimes\sigma^z$)

Её гамильтониан:

$$H_{XXZ} := \rho_R\left(\sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left\{\sigma_i^x\otimes\sigma_i^x+\sigma_i^y\otimes\sigma_i^y+\Delta\sigma_i^z\otimes\sigma_i^z\right.$$

$$\underbrace{+\frac{q-q^{-1}}{4}\left\{\sigma_1^z - \sigma_N^z\right\}}_{\text{граничные члены}} + (\sim \mathbb{1}\ \text{неинтересный член})$$

Это, так называемая, $U_q sl(2)$ (или $SL_q(2)$) симметричная цепочка. То есть ее гамильтониан коммутирует с действием квантовой группы $SL_q(2)$ на пространстве спинов $V^{\otimes N}$

(В случае $q=1$ действие $SL(2)$ задается операторами квадрата полного спина $\vec{S}^2 = \sum_{i=1}^{N}\vec{\sigma}_i^{\,2}$, и его проекций $S^{x,y,z} = \sum_{i=1}^{N}\sigma_i^{x,y,z}$. При $q\neq 1$ формулы немного q-деформируются)

Первое следствие наших знаний про $H_n(q)$:

Пространство $V^{\otimes N}$, на котором действует H_{XXZ} разбивается в прямую сумму инвариантных (и неприводимых) подпространств, нумеруемых диаграммами Юнга λ с ≤ 2 строчками и N клетками.

Каждое из этих подпространств λ имеет мультиплетность μ_λ в $V^{\otimes N}$. В каждом из них надо отдельно считать спектр H_{XXZ}. Очевидно μ_λ — числа, задающие вырождения собственных значений H_{XXZ} в $V^{\otimes N}$.

(Бывают и случайные вырождения, но в точке общего положения q имеем лишь μ_λ-вырождения)

Наинизшее (основное) собственное значение H_{XXZ} h_0 лежит в одном из неприводимых подпространств

Ферромагнитный режим: $\Psi_{h_0} \in$ 

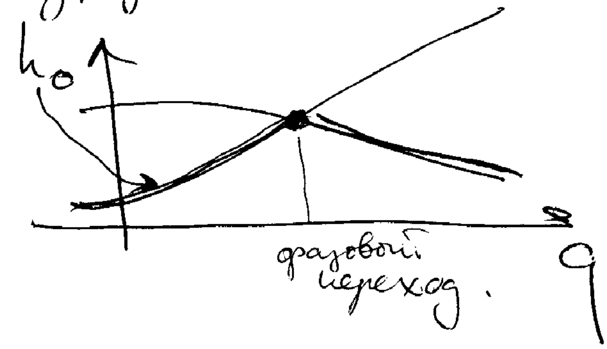
N кл.

Антиферромагнитный режим $\Psi_{h_0} \in$ 

$N/2$ (если N-чё

собств. вектор, отвечающий основному собств. значению h_0

Переход $h_0(q)$ из одного неприводимого подпространства в другое с изменением q — фазовый переход



Более нетривиальные результаты о цепочках:

XXZ цепочка — интегрируемая модель $\Leftrightarrow$ в ней есть достаточно много интегралов движения, коммутирующих с H_{XXZ}

Ее гамильтониан — $\rho_R\left(\sum_{i=1}^{N} \sigma_i\right)$, значит видимо $\sum_{i=1}^{N} \sigma_i$ в $H_N(q)$ имеет много ~~...~~ коммутирующих элементов. Будем их искать, т.к. правильная стратегия в решении интегр. моделей: искать совместные собственные вектора для всего набора интегралов движения, т.е. максимального учитывать симметрию модели.

Кстати так мы и делали при построении представлений и идемпотентов в алгебре Гекке.
(набор JM элементов)

Мы знаем JM набор в алгебре Гекке порождает max. commut. подалгебру.

Но $\sum_i \sigma_i$ — не лежит в этой подалгебре, $\Rightarrow$ Нужен другой большой (max?) коммут. набор.

Для его построения бакстеризуем элементы J_i (мы уже бакстеризовали генераторы $\sigma_i \to \sigma_i(x)$)

<u>Def</u>: $\begin{cases} J_2(x) := \sigma_1(x)^2 \\ J_{k+1}(x) = \sigma_k(x) J_k(x) \sigma_k(x) \end{cases}$

$J_k(x)$ уже не коммутируют между собой, а удовлетворяют уравнению отражения со спектральным параметром:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_k(x-y) J_k(x) \sigma_k(x+y) J_k(y) = \\ &\quad = J_k(y) \sigma_k(x+y) \sigma_k(x) \sigma_k(x-y) \end{aligned}} \quad (\star)$$

<u>Rem</u>: мы рассматриваем очень частный случай бакстеризации J_i. Можно вводить много параметров x_i; можно работать в большей алгебре — аффинной алгебре Гекке.

Еще одна новая операция, которая нам потребуется — <u>след на алгебрах Гекке</u>

(введен недавно Исаевым, имеет аналоги в представлениях алгебр Гекке: так называемый, q-след Tr_q; Марковский след)

$$tr_{n+1}: \quad H_{n+1}(q) \xrightarrow{tr_{n+1}} H_n(q)$$

эта алгебра порождена $\sigma_1 \ldots \sigma_n$

это подалгебра $H_{n+1}(q)$ порождена $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$

Определяющие свойства отображения следа:

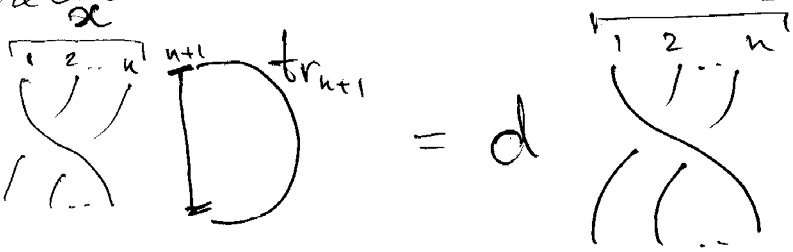
а) Для $\forall x \in H_n(q) \subset H_{n+1}(q)$, имеем

$$\boxed{tr_{n+1}\, x = d \cdot x}$$, где $d \in \mathbb{C}$ — некое число $\neq 0$

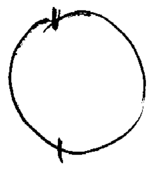
б) Для $\forall x, y \in H_n(q) \in H_{n+1}(q)$ имеем

$$\boxed{tr_{n+1}(x \sigma_n y) = xy}$$

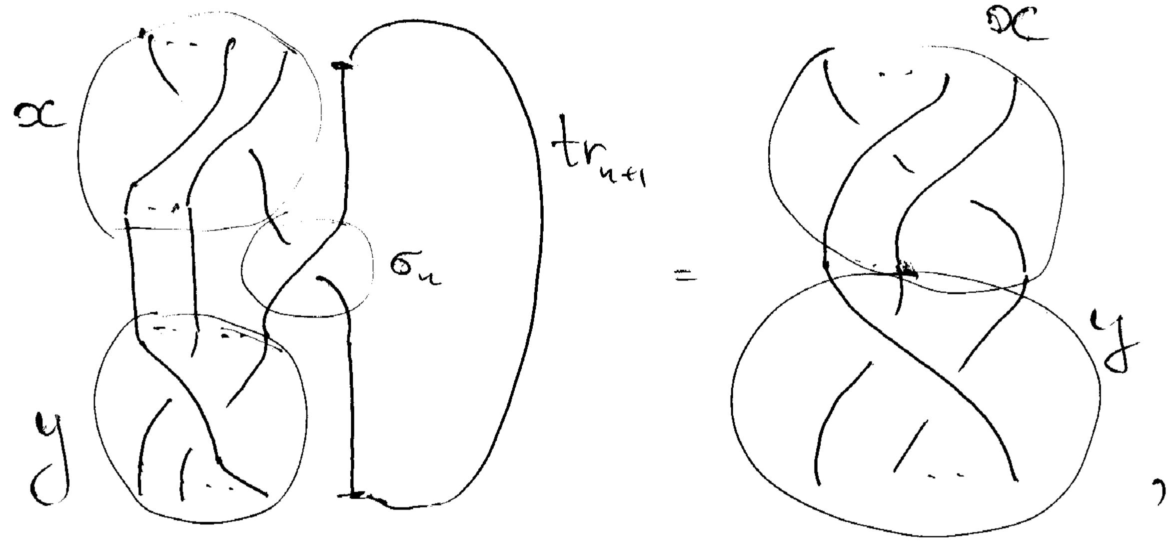
Графически свойство а) выглядит так

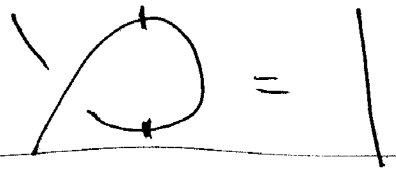


, т.е.



Свойство б) выглядит так:



т. е. 

<u>Rem</u>: Понятно, что след tr_n используется для определения с использованием алгебр Гекке <u>инвариантов узлов</u>.

<u>Rem</u>: Марковский след $Tr_{(\text{марковский})}: H_n(q) \xrightarrow{Tr_{(M)}} \mathbb{C}$

это: $Tr_{(M)} = tr_{(1,2,3\ldots,n)}$ – композиция "Исаевских" следов

Другие свойства следа tr_n:

1) $$tr_{(n+1)}\, \sigma_n^{\pm 1}\, x\, \sigma_n^{\mp 1} = tr_{(n)}\, x$$
для $\forall x \in H_n(q) \subset H_{n+1}(q)$

2) $$tr_{(n,n+1)}\, x\, \sigma_n = tr_{(n,n+1)}\, \sigma_n\, x$$
для $\forall x \in H_{n+1}(q)$

Задача: доказать графически и алгебраически.

Эти свойства частично оправдывают название "след".

Следствие:

3) Для бакстеризованных элементов $\sigma_n(x)$ и для $\forall h \in H_n(q) \subset H_{n+1}(q)$

$$\boxed{tr_{(n+1)}\, \sigma_n(x)\, h\, \sigma_n(y) = tr_{(n)} h + \frac{[x+y]_q + q^{-x-y} d}{[x]_q [y]_q}\, h}$$

Следовательно, для $\forall x \in \mathbb{C}\ \exists\, y(x) \in \mathbb{C}$:

$$tr_{(n+1)}\, \sigma_n(x)\, h\, \sigma_n(y(x)) = tr_n h \quad \forall h \in H_n(q)$$

y - решение уравнения $\boxed{[x+y]_q + q^{-x-y} d = 0}$

Определим, так называемую, трансфер-матрицу

$$\boxed{\tau_n(x) = tr_{n+1} J_{n+1}(x) \in H_n(q)}$$

$\tau_n(x)$ – образующая функция коммутативного набора в $H_n(q)$, т.е. если ее разложить по переменной x, то коэффициенты разложения коммутируют между собой. Иными словами:

$$\boxed{[\tau_n(x), \tau_n(y)] = 0 \quad \forall n, \forall x, y}$$

Док-во:

Рассмотрим $\boxed{U := tr_{(n,n+1)} J_n(x)\, \sigma_n(x+y) J_n(y) \sigma_n(z)}$, где

$$z = z(x,y) \; : \quad [x+y+z]_q + q^{-x-y-z} d = 0$$

По свойству 3) со стр 15:

$$U = tr_{(n)} J_n(x) \cdot tr_{(n)} J_n(y) = \tau_n(x)\, \tau_n(y)$$

С другой стороны, применим сначала уравнение (☆) со стр 12 для перестановки $J_n(x)$ и $J_n(y)$:

$$U = tr_{(n,n+1)} \underbrace{\sigma_n^{-1}(x-y) J_n(y) \sigma_n(x+y) J_n(x) \sigma_n(x-y) \sigma_n(z)}_{\text{свойство 2) стр 15}} =$$

$$= tr_{(n,n+1)} J_n(y)\, \sigma_n(x+y) J_n(x)\, \cancel{\sigma_n(x-y)}\, \sigma_n(z)\, \cancel{\sigma_n^{-1}(x-y)} =$$

$$= tr_{(n)} J_n(y)\, tr_{(n)} J_n(x) = \tau_n(y)\, \tau_n(x) \leftarrow \underline{\text{доказано.}}$$

Если правильно нормировать $\sigma_n(x)$, то $\sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i$ будет в коммутативном наборе порождаемом $\tau_N(x)$

Нормировка элементов $\sigma_i(x)$:

$$\sigma_i(x) := x\,\sigma_i - \sigma_i^{-1}$$

это новое x, оно $\sim q^{2x}$ из прежней нормировки.

Для таких новых бакстеризованных элементов уравнение Янга-Бакстера имеет вид

$$\boxed{\sigma_i(x)\,\sigma_{i+1}(xy)\,\sigma_i(y) = \sigma_{i+1}(y)\,\sigma_i(xy)\,\sigma_{i+1}(x)}$$

У таких новых элементов есть важное свойство:

$$\sigma_i(1) = \sigma_i - \sigma_i^{-1} = \underset{\substack{\parallel \\ q-q^{-1}}}{\lambda}\,1 \sim 1$$

При такой нормировке $\sigma_i(x)$, определённые по ним $J_i(x)$ и $\tau_n(x)$ имеют свойство

$$\left.\frac{d\,\tau_n(x)}{dx}\right|_{x=1} \sim \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \sim \text{Гамильтониан XXZ цепочки.}$$

Итак: $\tau_N(x)$ порождает набор интегралов движения для XXZ цепочки Гейзенберга. Собственные вектора $\tau_N(x)$ и ее спектр и надо искать для решения модели.