$\boxed{\text{Лекция 3}}$

<u>Что мы имеем</u>: используя элементы JM – $J_1, \dots, J_n$ мы построили пирсовское разложение единицы в $H_n(q)$

При этом:

- примитивный идемпотент <=> стандартная таблица Юнга
- собственное значение J_i на идемпотенте <=> контент клетки $\boxed{i}$ в соответствующей таблице

$\boxed{\text{Зам}}$ Фактически набор собственных значений J_i, $i=1\dots n$ полностью задаёт вид стандартной таблицы. Стандартная таблица – лишь удобная форма записи собств значений J_i.

- Стандартные таблицы одной формы <=> идемпотенты одного матричного блока

<u>Вывод:</u>

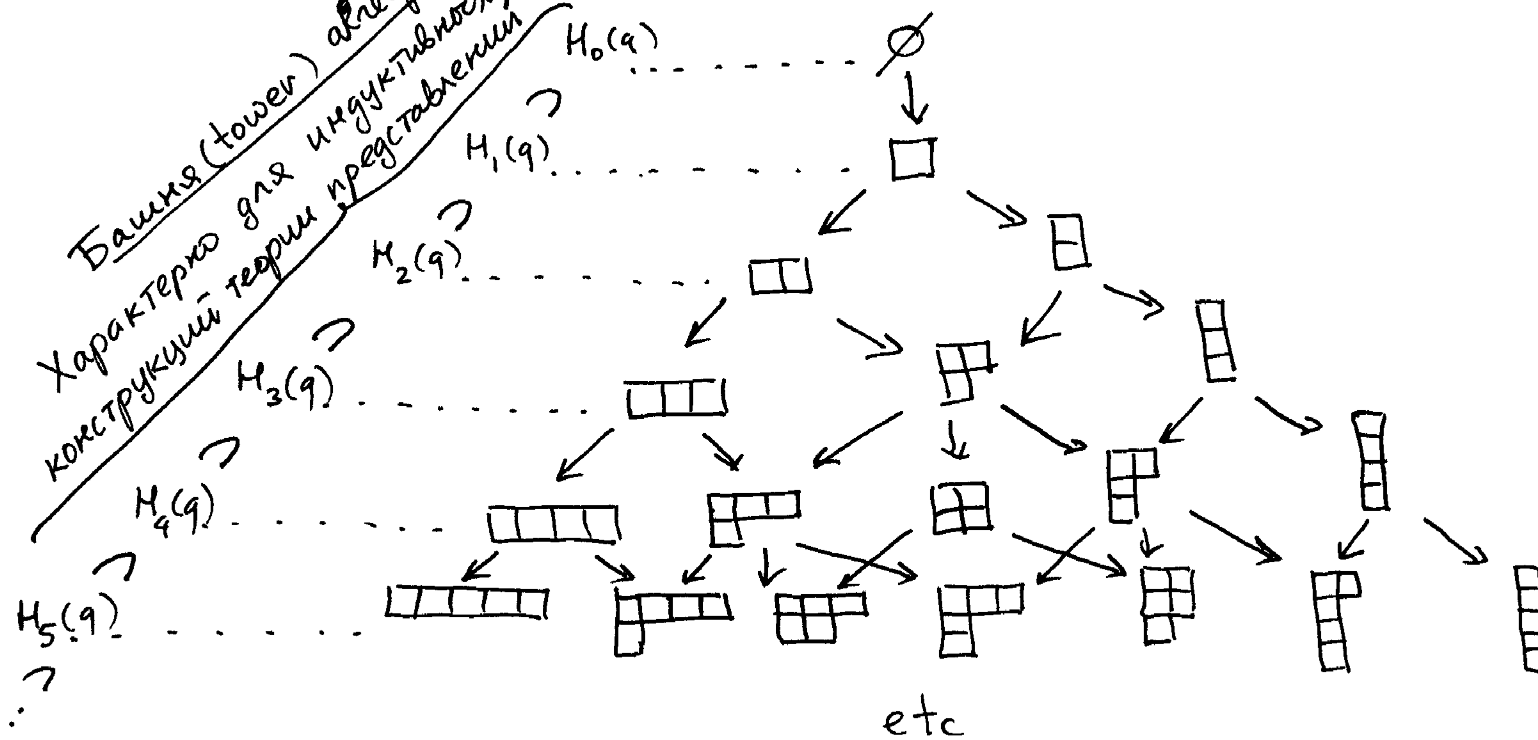
Размер матричного блока λ, то есть размерность соответствующего ему неприводимого представления равны числу стандартных таблиц формы λ.

Базисные вектора неприводимого представления $H_n(q)$, отвечающего диаграмме Юнга λ можно нумеровать стандартными таблицами формы λ

Индуктивная процедура построения прим. идемпотентов отражается на <u>диаграмме Брателли (Bratelli)</u>

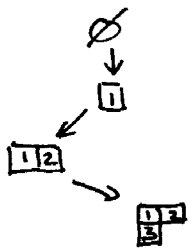
<u>Башня</u> (tower) алгебр

Характерно для индуктивных конструкций теории представлений

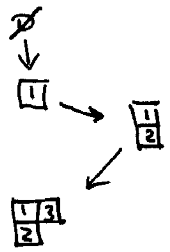


<u>Заметим</u>: пути на диаграмме Брателли отмечают разные способы построения стандартных таблиц.

Например:

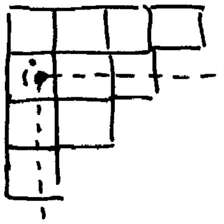


, и другой путь



<u>Следовательно</u>: размерность представления λ = числу путей, приводящих к λ на диаграмме Брателли.

Def: Длина крюка с вершиной в клетке $\boxed{i}$



крюк

Длина крюка h_i – это число клеток диаграммы, которые он пересёк.

В этом случае $h_i = 5$

Формула Фробениуса для определения размерности неприводимого представления λ:

$$\underset{(\lambda \vdash n)}{\dim \lambda} = \frac{n!}{h_1!\, h_2! \dots h_k!} \prod_{1 \le i < j \le k} (h_i - h_j),$$

где $h_1, h_2, \dots, h_k$ — длины крюков с вершинами в первом столбце.

Более удобная формула крюков:

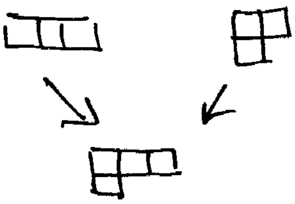
$$\boxed{\underset{(\lambda \vdash n)}{\dim \lambda} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} h_i}}$$

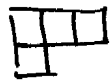
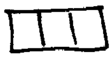
произведение берётся по всем крюкам диаграммы λ.

Диаграмма Братели рассказывает ещё о:

1) Разложении неприводимого представления $H_n(q)$ в прямую сумму неприводимых представлений подалгебры $H_{n-1}(q)$

Например:



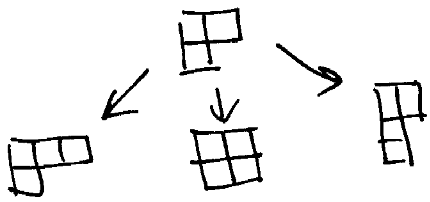
сообщает: предст. $H_4(q)$  = предст. $H_3(q)$  $\oplus$ 

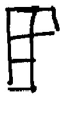
dim = 3   dim = 1   dim = 2

(Это наглядно видно далее, при явном построении представлений)

2) Индуцировании представлений $H_{n+1}(q)$ из неприводимых представлений подалгебры $H_n(q)$

Например:



сообщает, что из неприводимого представления  $H_3(q)$ индуцируются представления ,  и  $H_4(q)$.

Как это происходит: вы имеете 2-мерное представление  с базисными векторами, скажем, v_1, v_2. Как на них действуют $\sigma_1, \sigma_2 \in H_3(q)$ – известно.

В алгебре $H_4(q) \supset H_3(q)$ есть еще σ_3, действие которого на $v_{1,2}$ неизвестно. Полагаете, что это новые вектора

$$u_{1,2} = \sigma_3 v_{1,2}$$

Далее аналогично вводите новые вектора.

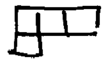
$$w_{1,2} = \sigma_2 \sigma_3 v_{1,2} \qquad t_{1,2} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 v_{1,2}.$$

Все, индукция кончилась, новых ~~вектора~~ неизвестных векторов не будет. Действие $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на векторах $u_{1,2}, v_{1,2}, w_{1,2}, t_{1,2}$ выражается через них же.

Получили индуцированное 8-мерное представление $H_4(q)$

Оно разлагается на 3 неприводимых

 – dim 2

 – dim 3

 – dim 3

все dim

<u>Комментарий</u>: индуцирование — это следующий шаг в серии

1) множества $A, B \longrightarrow A \times B$ – прямое произведение

2) линейные пространства $A, B \longrightarrow A \otimes B$ – тензорное произведение

3) $X \subset A$, X – подалгебра A, B – левый A-модуль (представление A) $\longrightarrow A \otimes_X B$ – тензорное произведение A на B над X

Тут A рассматривается как свой собственный левый и правый (регулярный) A-модуль

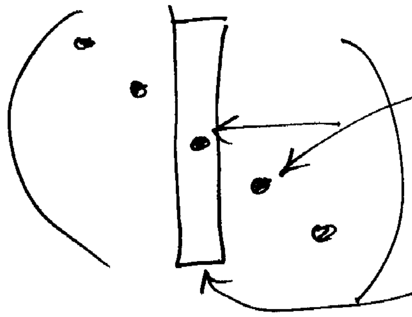
И тогда $A \otimes_X B$ – левый A-модуль

В нашем примере: $A = H_4(q)$, $X = H_3(q)$, $B =$  ~~модуль~~.

Начнём строить представления.

Для начала построим базисные вектора в пространстве представления.

Это — ~~вектор~~ ~~столбцы~~ элементы одного столбца в матричном блоке



prime idempotents — диагональные матричные единицы E_{ii}

Нам нужны и недиагональные матр. единицы

Базисные вектора представления $v_i = E_{ij}$ ← $\forall$ фиксир. индекс

$V = \mathrm{Span}\{v_i\}$ $\qquad i = 1, \dots, \dim V$

E_{ii} в нашем случае — собственные вектора элементов JM.

Неважно, действуют элементы JM слева или справа, т.к. E_{ii} из элементов JM и построены, а те образуют коммут. подалгебру.

E_{ij} будем искать как собственные вектора элементов JM, но с разными наборами собственных значений, относительно левого или правого действия элементов JM

(Так и ведут себя недиагональные матричные единицы E_{ij} относительно действия диагональных матриц)

$\Uparrow$

max. коммут. подалгебра в матричном блоке

Рассмотрим как действуют генераторы $H_n(q)$ — σ_k, $k=1,\dots,n-1$ на собственные вектора элементов JM $J_1,\dots,J_n$.

— $\sigma_k J_\ell = J_\ell \sigma_k$, если $\ell \neq k, k+1$

— σ_k, J_k, J_{k+1} образуют аффинную алгебру Гекке $\tilde{H}_2(q)$ (диаграмма $\overset{J_k}{\circ}\!=\!=\!=\!\overset{\sigma_k}{\circ}$).

Опуская несущественный индекс: $\sigma_k \to \sigma$, $J_k \to J$, $J_{k+1} \to J'$

имеем:
$$\begin{cases} \sigma^2 = 1 + \lambda\sigma & (\lambda := q - q^{-1}) \\ J' = \sigma J \sigma & \\ J J' = J' J & \Longleftrightarrow \quad \boxed{\sigma J \sigma J = J \sigma J \sigma} \end{cases}$$

так называемое, уравнение отражения (Reflection equation)

Алгебра $\tilde{H}_2(q)$ бесконечномерна, (если не накладывать условий на J)

Её неприводимые конечномерные представления имеют размерность 1 или 2.

Процедура построения:

а) Базис в представлении — собственные вектора J и J'

Пусть ψ — такой вектор:
$$\begin{cases} J\psi = a\psi \\ J'\psi = b\psi \end{cases}$$

б) Если $\sigma\psi \sim \psi$, то представление 1-мерно.
При этом в силу условия Гекке для σ

$$\sigma\psi = \pm q^{\pm 1}\psi \text{ , откуда}$$

$$\boxed{b = q^{\pm 2} a} \quad (J' = \sigma J \sigma)$$

1-мерное представление возможно только в этом случае

в) Если $\sigma\psi \not\sim \psi$, то считаем

$\psi' = \sigma\psi$ вторым базисным вектором представления

Больше независимых векторов не построить,
(проверьте действие J, J', σ на ψ и ψ')
поэтому представление 2-мерно. В базисе ψ, ψ' имеем

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -\lambda b & b \end{pmatrix}, \quad J' = \begin{pmatrix} b & 0 \\ \lambda b & a \end{pmatrix}$$

Матрицы J и J' являются жордановыми клетками, т.е. недиагонализуемы, если $a = b$. Такое 2-мерное представление не вполне приводимо, что противоречит нашим предположениям. Вынуждены считать $\boxed{a \neq b}$
Тогда J и J' диагонализуются действием

$$X = X^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{\lambda b}{a-b} & 1 \end{pmatrix}$$

$$XJX^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad XJ'X^{-1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Мы видим, что действием σ мы можем переставить собств. значения J и J'.

Это не все:

$$X\sigma X^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda b}{a-b} & -1 \\ \dfrac{(a-q^2b)(a-q^{-2}b)}{(a-b)^2} & \dfrac{\lambda a}{a-b} \end{pmatrix}$$

Эта матрица треугольна если $\boxed{b = q^{\pm 2} a}$

Тогда представление ~~...~~ перестаёт быть неприводимым: вектор ψ' станет инвариантным 1-мерным подпространство

<u>Итак</u>: 2-мерное неприводимое ~~...~~ представление ~~...~~ реализуется если $b \neq \{a, q^{\pm 2} a\}$

Диагональный J, J' — базис в 2-мерном представлен

$$\psi : \quad J\psi = a\psi, \quad J'\psi = b\psi$$

$$\boxed{\tilde{\psi} = \left(\sigma + \frac{\lambda b}{a-b}\right)\psi} : \quad J\tilde{\psi} = b\tilde{\psi}, \quad J'\tilde{\psi} = a\tilde{\psi}$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ J_k и J_{k+1} могут обмениться собств. значениями если $b \neq \{a, q^{\pm 2} a\}$. Эти исключенные точки:

$\begin{array}{|c|c} \hline k & \multicolumn{1}{|c|}{} \\ \hline & \multicolumn{1}{|c|}{k+1} \\ \hline \end{array}$ $\leftarrow$ $b = a$ такое вообще невозможно

$\begin{array}{|c|c|} \hline k & k+1 \\ \hline \end{array}$ $\leftarrow$ в этом случае обмен $k \leftrightarrow k+1$ даёт <u>нестандартную</u> таблицу Юнга

$\begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline k+1 \\ \hline \end{array}$ $\leftarrow$

Обратим внимание на элемент

$$\boxed{\sigma_k(a,b) := \sigma_k + \frac{\lambda b}{a-b}\mathbb{1}}$$

который делает ~~из~~ ~~~~ $\psi \to \tilde{\psi}$.

Это т.н. бакстеризованные генераторы (Baxterized

Они, как мы показали, переставляют собственные значения J_k и J_{k+1} и не трогают собств. значения остальных J_i $i \neq k, k+1$.

Их свойства:

1) $\sigma_k(a,b)$ обратим если $b \neq q^{\pm 2} a$

$\sigma_k(a, q^2 a) \sim A$ ~~~~ $= \dfrac{q-\sigma_k}{q+q^{-1}}$ ⟵ проекторы

$\sigma_k(a, q^{-2} a) \sim S = \dfrac{q^{-1}+\sigma_k}{q+q^{-1}}$ ⟵

2) $\sigma_k(a,b)\,\sigma_k(b,a) = \dfrac{qa - q^{-1}b}{a-b}\cdot\dfrac{qb-q^{-1}a}{b-a}\cdot\mathbb{1}$

↑ т.н. "унитарность"

3) $\boxed{\sigma_k(a,b)\,\sigma_{k+1}(a,c)\,\sigma_k(b,c) = \sigma_{k+1}(b,c)\,\sigma_k(a,c)\,\sigma_{k+1}(a,b)}$

↑ т.н. уравнение Янга-Бакстера со спектральными параметрами a, b, c. (Yang-Baxter eq.)

Эти свойства требуются для непротиворечивости действия $\sigma_k(a,b)$, $\sigma_{k+1}(a,c)$.. ~~~~ перестановками собств значений операторов JM: J_k, J_{k+1}, J_{k+2} (проверьте!)

Очевидно, $\sigma_k(a,b)$ зависит лишь от отношения a/b. Переопределим:

$$\boxed{\sigma_k(\ell) := \sigma_k + \frac{q^{-\ell}}{[\ell]_q}}\,, \quad [\ell]_q := \frac{q^{\ell}-q^{-\ell}}{q-q^{-1}}$$

$\sigma_k(\ell) = \sigma_k(a,b)$ при $\frac{a}{b} = q^{2\ell}$

q-числа Эйлера

$[\ell]_q \xrightarrow{q\to 1} \ell$

Рассмотрим пример: прим. идемпотенты $\left\lceil\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}\right.$ и $\left\lceil\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}\right.$ в $H_3(q)$ принадлежат одному матричному блоку размера 2×2. $\sigma_2(\ell)$ – может менять местами собственные значения J_2 и J_3 (надо только ℓ подобрать)

В частности:

$\boxed{\sigma_2(\ell=2)\left\lceil\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}\right.}$ — ведет себя как $\left\lceil\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}\right.$ слева (т.е. $J_2=q^{-2}$, а $J_3=$ … на нём) и как $\left\lceil\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}\right.$ справа.

$\frac{\text{с.з. } J_2}{\text{с.з. } J_3} = \frac{a}{b} = q^4$

$\boxed{\left\lceil\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}\right.\sigma_2(\ell=-2)}$ — ведет себя так же как $\left\lceil\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}\right.$ слева и как $\left\lceil\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}\right.$ справа

$\frac{a}{b} = q^{-4}$

У нас 2 кандидата на одну и ту же недиагональную матричную единицу. Но она одна.

Выход единственный

$$\sigma_2(2)\left\lceil\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}\right. = \mathrm{const}\left\lceil\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}\right.\sigma_2(-2)$$

Нетрудно убедиться, что const = 0 или 1.

$\boxed{\text{Упр}}$ Проверьте это, умножив соотношение (*) справа на идемпотент $\big|^{12}_{3}$, и учтя формулу $\big|^{13}_{2}\cdot\big|^{12}_{3} = 0$ и левое обращение для $\sigma_2(-2)$

Const = 1, если $\sigma(\ell)$, участвующее в соотношении обратимо $(\ell \neq \pm 1)$. В нашем примере это так:

$$\boxed{\sigma_2(2)\,\big|^{12}_{3} = \big|^{13}_{2}\,\sigma_2(-2) =: \big|^{12}_{3}\big|\big|^{13}_{2}}$$

Так обозначим построенную нами недиагональную матричную единицу. Левая и правая таблицы Юнга — это фактически индексы матр. единицы E_{ij}, $i \neq j$

Аналогично строится другая недиагональная матричная единица:

$$\boxed{\big|^{12}_{3}\,\sigma_2(2) = \sigma_2(-2)\,\big|^{13}_{2} =: \big|^{12}_{3}\big|\big|^{13}_{2}}$$

Итак, мы построили весь 2×2 матричный блок: на диагонали $\big|^{12}_{3}$ и $\big|^{13}_{2}$, вне диагонали $\big|^{12}_{3}\big|\big|^{13}_{2}$ и $\big|^{13}_{2}\big|\big|^{12}_{3}$.

Недиагональные единицы, правда, ненормированы:

$$\big|^{12}_{3}\big|\big|^{13}_{2}\bullet\big|^{13}_{2}\big|\big|^{12}_{3} = \left(\sigma_2(2)\,\big|^{13}_{2}\right)\left(\big|^{13}_{2}\,\sigma_2(2)\right) = \sigma_2(2)\,\big|^{13}_{2}\,\sigma_2(2) =$$

$$= \big|^{12}_{3}\,\sigma_2(-2)\,\sigma_2(2) = \big|^{12}_{3}\left(1 - \frac{1}{[2]_q^2}\right) = \underbrace{\frac{[1]_q\cdot[3]_q}{[2]_q^2}}_{\text{нетривиальная нормировка}}\big|^{12}_{3}$$

$\boxed{3}$ Отнормировать матричные единицы можно было перейдя от к

$$\sigma_k(\ell) \longrightarrow \frac{[\ell]_q}{[\ell+1]_q}\,\sigma_k(\ell) = \sigma_k^{\text{новое}}(\ell)$$

Но это уже несущественные детали.

не работает лишь в точке вырождения $\ell = -1$

Более существенная деталь: бывает ли случай, когда const в $(*)$ (стр 11) $= 0$?

Да, когда $\ell = \pm 1$, то есть когда клетки $\boxed{k}$ и $\boxed{k+1}$ — соседи в одном столбце или в одной строке стандартной таблицы. Их тогда нельзя менять местами. В нашем примере (и всегда) это случается с клетками $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$:

это $\sim A = \dfrac{q-\sigma_1}{q+q^{-1}}$

$$\begin{cases} \sigma_1(-1)\ \begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}\ \sigma_1(-1) = 0 \\ \sigma_1(1)\ \begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}\ \sigma_1(1) = 0 \end{cases}$$

это $\sim S = \dfrac{q^{-1}+\sigma_1}{q+q^{-1}}$

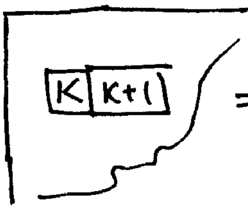
Все эти формулы "перестановки" и "зануления" бакстеризованных генераторов на стандартных таблицах (они же — прим. матр. идемпотенты)

<u>однозначно</u> <u>определяют</u> <u>представление</u>

все матрицы для всех генераторов σ_k.

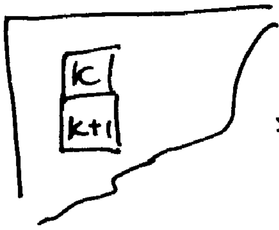
Сейчас это увидим, но прежде запишем общие правила

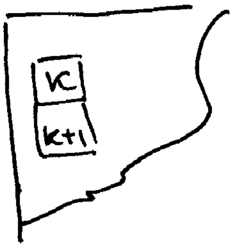
Правила действия $\sigma_k(\ell)$ на таблицах:

$\sigma_k(-1)$ 

$=$ 

$\sigma_k(-1) = 0$

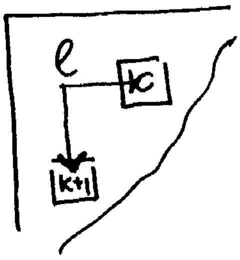
$\sigma_k(1)$ 

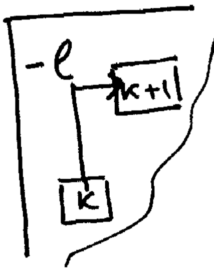
$=$ 

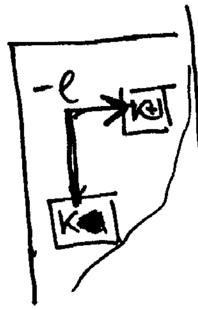
$\sigma_k(1) = 0$

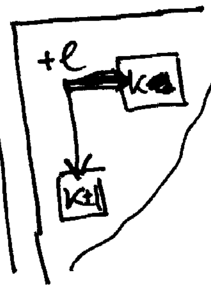
„занулени

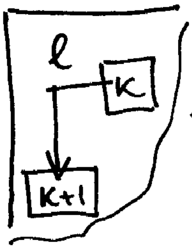
„Перестановка"

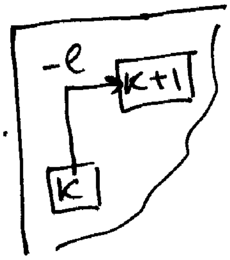
$\sigma_k(\ell)\cdot$ 

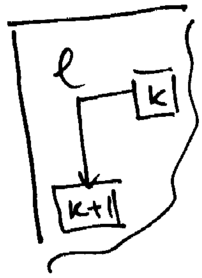
$=$ 

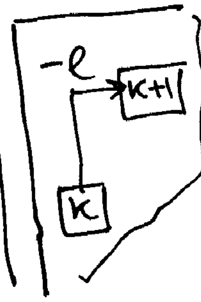
$\cdot\,\sigma_k(-\ell) =$ 





$\cdot\,\sigma_k(\ell) = \sigma_k(-\ell)\cdot$ 

$=$ 



Здесь ℓ – длина крюка соединяющего центры клеток $\boxed{k}$ и $\boxed{k+1}$ в таблице. Она ориентирована: $\ell > 0$, если крюк направлен налево-вниз; $\ell < 0$, если крю[к] направлен вверх-направо. Длина измеряется в единицах размера клетки.

Например:

$$\begin{array}{|lll} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \\ 5 & & \end{array} \Leftarrow \begin{cases} \ell_{1\to 2} = -1 \\ \ell_{2\to 3} = -1, \quad \ell_{3\to 4} = 3, \\ \ell_{4\to 5} = 1, \quad \ell_{5\to 6} = -2 \end{cases}$$

Теперь построим матрицы операторов σ_k в представлениях. Наш пример: $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}_{\,3}$ — двумерное представление $H_3(q)$. Построим 2×2 матрицы для σ_1 и σ_2.

Берём столбец $\underset{X}{\underset{\shortparallel}{\begin{array}{|l}12\\3\end{array}}}$ и $\underset{Y}{\underset{\shortparallel}{\begin{array}{|l}13\\2\end{array}\Bigg|\begin{array}{|l}12\\3\end{array}}}$ из матричного блока.

На X и Y действуем операторами σ_1 и σ_2:

$$\underset{(\sigma_1-q)}{\underset{\shortparallel}{\sigma_1(-1)}}\begin{array}{|l}12\\3\end{array} = 0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_1 X = qX$$

$$\sigma_1(1)\begin{array}{|l}13\\2\end{array}\Bigg|\begin{array}{|l}12\\3\end{array} = 0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_1 Y = -q^{-1}Y.$$

Значит матрица σ_1 : $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1}\end{pmatrix}$ при действии на базисе $\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix}$

<u>Зам.</u> В нашей реализации σ_1 всегда будет представлен диагональной матрицей. $\sigma_1 = \sqrt{J_2} = \dfrac{J_2 - 1}{\lambda}$

$$\underset{\left(\sigma_2 + \frac{q^{-2}}{[2]_q}\right)}{\underset{\shortparallel}{\sigma_2(2)}}\begin{array}{|l}12\\3\end{array} = \begin{array}{|l}13\\2\end{array}\Bigg|\begin{array}{|l}12\\3\end{array} \quad\Rightarrow\quad \sigma_2 X = -\frac{q^{-2}}{[2]_q}X + Y$$

$$\underbrace{\sigma_2(-2)}_{\left(\sigma_2-\frac{q^2}{[2]_q}\right)} \begin{array}{|ll|}1&3\\2&\end{array}\begin{array}{|ll}1&2\\3&\end{array} = \underbrace{\sigma_2(-2)\,\sigma_2(2)}_{\frac{[3]_q}{[2]_q^2}}\begin{array}{|ll}1&2\\3&\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_2 Y = \frac{q^2}{[2]_q} Y + \frac{[3]_q}{[2]_q^2} X$$

Значит матрица σ_2:

$$\begin{pmatrix} -\frac{q^{-2}}{[2]_q} & 1 \\ \frac{[3]_q}{[2]_q^2} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix} \leftarrow \text{при действии на базисе } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

<u>Замечание</u>: Обычно определяют действие операторов <u>не на базисных векторах</u> пространства $\{X, Y\}$, а на <u>коэффициентах разложения</u> $\{\alpha_X, \alpha_Y\}$ произвольного вектора этого пространства по базису

$$\Psi = \alpha_X X + \alpha_y Y$$

Операторы σ_1, σ_2 действуют на $\begin{pmatrix}\alpha_X \\ \alpha_Y\end{pmatrix}$ <u>транспонированными матрицами</u>

Более удобное правило вычисления матриц $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ в представлениях:

представьте, что вы протаскиваете оператор $\sigma_k(\ell)$ слева-направо сквозь станд. таблицу и вычисляете его справа на "вакуумном" векторе

$$\sigma_k(\ell)\,|0\rangle = \left(\sigma_k + \frac{q^{-\ell}}{[\ell]_q}\right)|0\rangle =$$

$$= \left(q + \frac{q^{-\ell}}{[\ell]_q}\right)|0\rangle = \frac{[\ell+1]_q}{[\ell]_q}\,|0\rangle$$

(можно было заменить σ_k не на q, а на другое его собственное значение $-q^{-1}$).

Действуем в нашем примере. Базис: $\left(\begin{array}{l} \tilde{X} = \begin{array}{|ll} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}\,|0\rangle \\ \tilde{Y} = \begin{array}{|ll} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}\,|0\rangle \end{array}\right)$

$$\underset{\left(\sigma_2 + \frac{q^{-2}}{[2]_q}\right)}{\underset{\parallel}{\sigma_2(2)}} \begin{array}{|ll} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}\,|0\rangle = \begin{array}{|ll} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}\,\sigma_2(-2)\,|0\rangle = \begin{array}{|ll} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}\,\frac{[1]_q}{[2]_q}\,|0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_2 \tilde{X} = -\frac{q^{-2}}{[2]_q}\tilde{X} + \frac{1}{[2]_q}\tilde{Y}$$

$$\underset{\left(\sigma_2 - \frac{q^{2}}{[2]_q}\right)}{\underset{\parallel}{\sigma_2(-2)}} \begin{array}{|ll} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}\,|0\rangle = \begin{array}{|ll} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}\,\sigma_2(2)\,|0\rangle = \begin{array}{|ll} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}\,\frac{[3]_q}{[2]_q}\,|0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_2 \tilde{Y} = \frac{q^{2}}{[2]_q}\tilde{Y} + \frac{[3]_q}{[2]_q}\tilde{X}$$

Итак:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} -\frac{q^{-2}}{[2]_q} & \frac{1}{[2]_q} \\ \frac{[3]_q}{[2]_q} & \frac{q^{2}}{[2]_q} \end{pmatrix} \text{ в базисе } \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что $\sigma_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}$ в этом базисе.

Очевидно, базисы $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix}$ связаны диагональным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{[2]_q} X \\ Y \end{pmatrix}$$ – смена масштаба базисных векторо

Ещё один пример

Представление $H_4(q)$ отвечающее диаграмме Юнга

$\lambda = \{2, 1, 1\}$ 

$$X = \left| \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & \\ 4 & \end{array} \right. |0\rangle, \quad Y = \left| \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & \\ 4 & \end{array} \right. |0\rangle, \quad Z = \left| \begin{array}{ll} 1 & 4 \\ 2 & \\ 3 & \end{array} \right. |0\rangle$$

$$\sigma_1(-1) \left| \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 3 & \\ 4 & \end{array} \right. = 0$$

$$\sigma_1(1) \left| \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & \\ 4 & \end{array} \right. = \sigma_1(1) \left| \begin{array}{ll} 1 & 4 \\ 2 & \\ 3 & \end{array} \right. = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 X = q X \\ \sigma_1 Y = -q^{-1} Y \\ \sigma_1 Z = -q^{-1} Z \end{cases}$$

$$\sigma_2(2)\begin{array}{|ll}\hline 1&2\\3&\\4&\end{array} = \begin{array}{|ll}\hline 1&3\\2&\\4&\end{array}\sigma_2(-2)$$

$$\sigma_2(-2)\begin{array}{|ll}\hline 1&3\\2&\\4&\end{array} = \begin{array}{|ll}\hline 1&2\\3&\\4&\end{array}\sigma_2(2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_2 X = -\dfrac{q^{-2}}{[2]_q}X + \dfrac{1}{[2]_q}Y \\ \sigma_2 Y = \dfrac{q^2}{[2]_q}Y + \dfrac{[3]_q}{[2]_q}X \\ \sigma_2 Z = -q^{-1}Z \end{cases}$$

$$\sigma_2(1)\begin{array}{|ll}\hline 1&4\\2&\\3&\end{array} = 0$$

$$\sigma_3(1)\begin{array}{|ll}\hline 1&2\\3&\\4&\end{array} = 0$$

$$\sigma_3(3)\begin{array}{|ll}\hline 1&3\\2&\\4&\end{array} = \begin{array}{|ll}\hline 1&4\\2&\\3&\end{array}\sigma_3(-3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_3 X = -q^{-1}X \\ \sigma_3 Y = -\dfrac{q^{-3}}{[3]_q}Y + \dfrac{[2]_q}{[3]_q}Z \\ \sigma_3 Z = \dfrac{q^3}{[3]_q}Z + \dfrac{[4]_q}{[3]_q}Y \end{cases}$$

$$\sigma_3(-3)\begin{array}{|ll}\hline 1&4\\2&\\3&\end{array} = \begin{array}{|ll}\hline 1&3\\2&\\4&\end{array}\sigma_3(3)$$

Итак, в базисе $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ операторы σ_k $k=1,2,3$ действуют матрицами

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} q & & 0 \\ & -q^{-1} & \\ 0 & & -q^{-1} \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{q^{-2}}{[2]_q} & \dfrac{1}{[2]_q} & 0 \\ \dfrac{[3]_q}{[2]_q} & \dfrac{q^2}{[2]_q} & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} -q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{q^{-3}}{[3]_q} & \dfrac{[2]_q}{[3]_q} \\ 0 & \dfrac{[4]_q}{[3]_q} & \dfrac{q^3}{[3]_q} \end{pmatrix}$$

Заключительные замечания:

1) В пределе $q \to 1$ компоненты матриц σ_i в построенных нами представлениях являются рациональными числами. Это значит, что представления симметрической группы S_n можно определить над полями вещественных и рациональных чисел. Теория представлений не меняется.

2) Для более сложных диаграмм недиагональные матричные единицы строятся с привлечением большего (чем 1) числа бакстеризованных элементов.

Например:

$$\begin{array}{|lll}\hline 1&2&3\\ 4&&\\ 5&&\end{array}\ \Bigg\|\ \begin{array}{|lll}\hline 1&2&5\\ 3&&\\ 4&&\end{array} = \begin{array}{|lll}\hline 1&2&3\\ 4&&\\ 5&&\end{array}\ \sigma_3(3)\,\sigma_4(4) =$$

$$= \sigma_3(-3)\begin{array}{|lll}\hline 1&2&4\\ 3&&\\ 5&&\end{array}\ \sigma_4(4) = \sigma_3(-3)\,\sigma_4(-4)\begin{array}{|lll}\hline 1&2&5\\ 3&&\\ 4&&\end{array}$$

Напомним:

$$\begin{array}{|lll}\hline 1&2&3\\ 4&&\\ 5&&\end{array} = \frac{J_2-q^{-2}}{q^2-q^{-2}}\cdot\frac{J_3-q^{-2}}{q^4-q^{-2}}\cdot\frac{J_4-q^6}{q^{-2}-q^6}\cdot\frac{J_5-q^6}{q^{-4}-q^6}\cdot\frac{J_5-1}{q^{-4}-1}$$