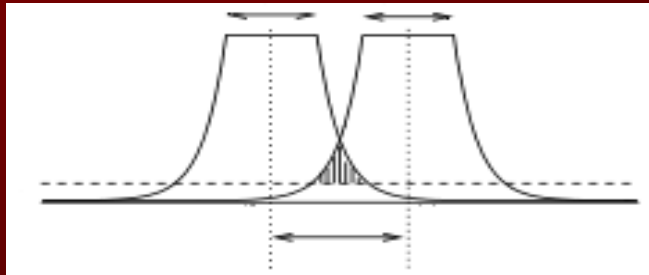
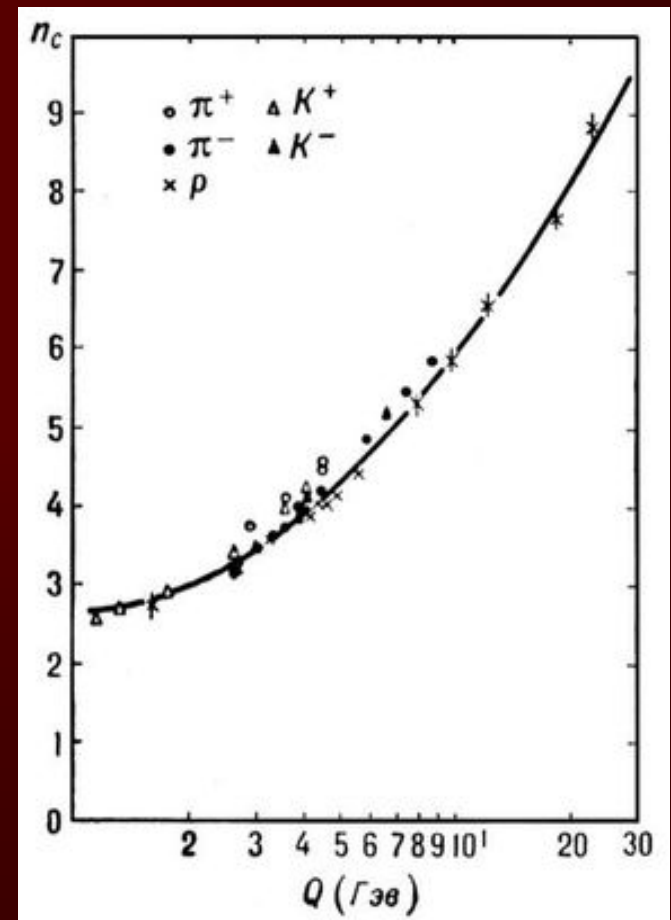


Saturation of the Froissart bound and Shock-wave fireball production

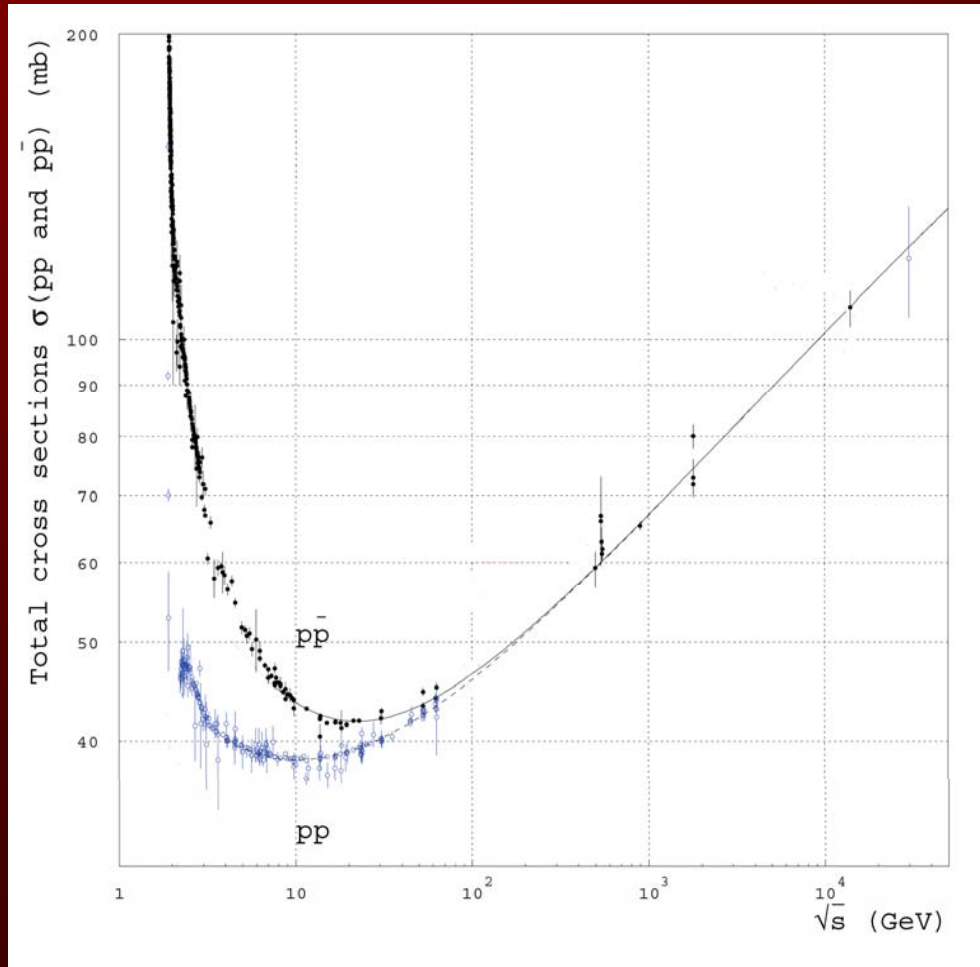


Oleg V. Pavlovsky
(ITPM MSU, Moscow)



- Introduction: what we know about?
- Heisenberg picture of the hadronic scattering
- Born-Infeld Theory: integrability, duality, singular solutions
- Shock-wave solutions of Chiral Born-Infeld Theory
- Conclusion

“Expected” decreasing and “unexpected” increasing



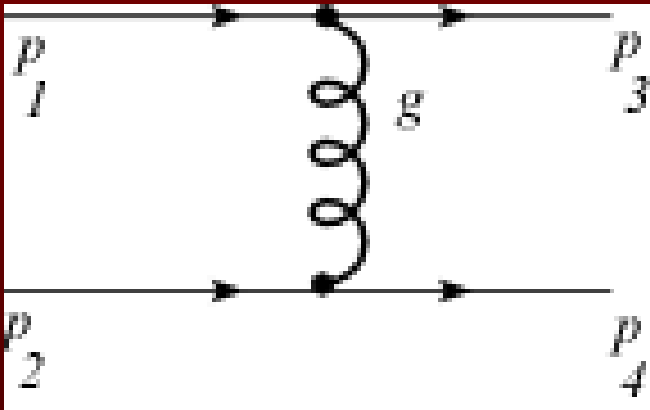
Unitarily in scattering
at large S:

$$\sigma_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Log}^2 s$$

Froissart ' 1962

“Expected” decreasing

Point-like particles exchange: depends on Spin of the particle!



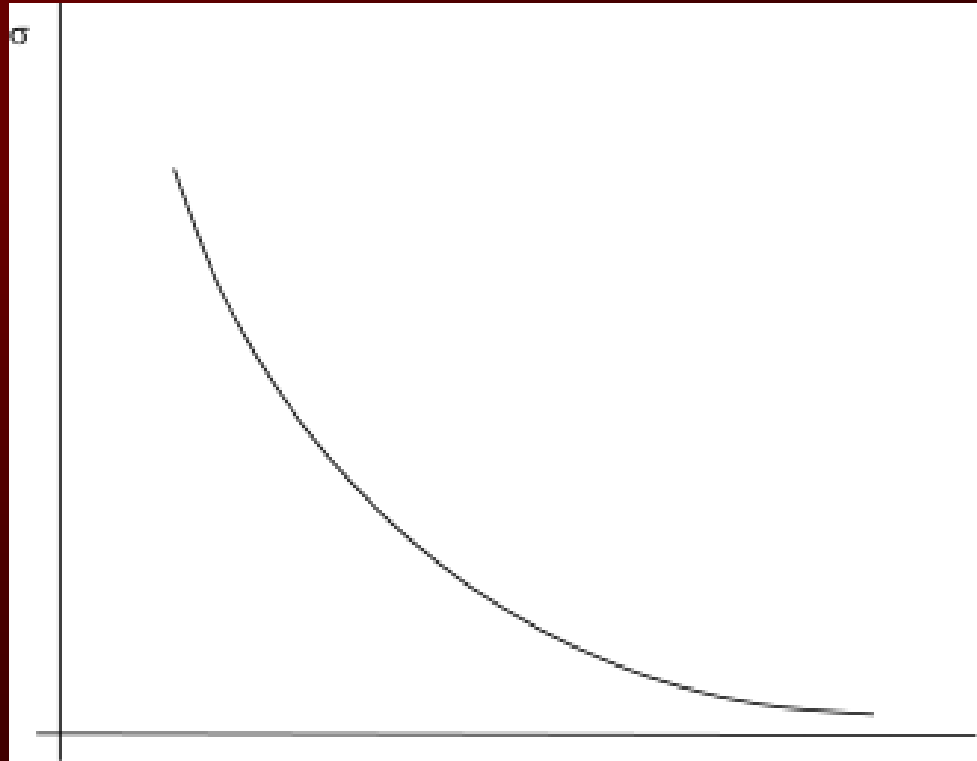
$$\sigma_{s \rightarrow \infty} \sim S^{2(\text{Spin}-1)}$$

“Expected” decreasing

Point-like particles exchange: depends on Spin of the particle!

If **Spin = 0** :

$$\sigma_{s \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

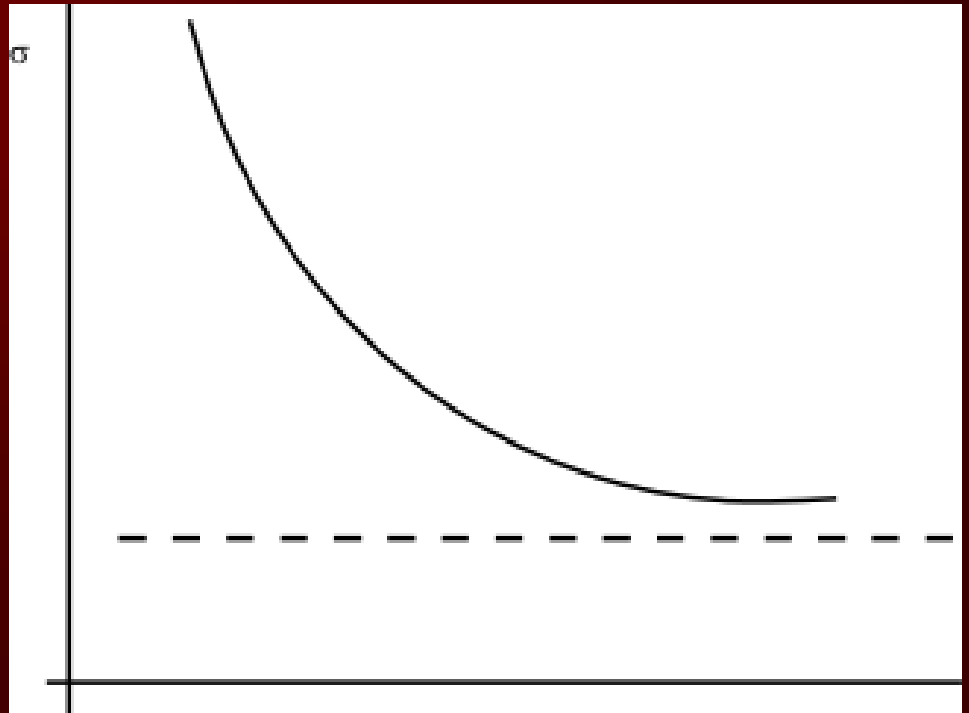


“Expected” decreasing

Point-like particles exchange: depends on Spin of the particle!

If **Spin = 1** :

$$\sigma_{s \rightarrow \infty} \rightarrow \textit{const}$$



“Expected” decreasing

Point-like particles exchange: depends on Spin of the particle!

If **Spin > 1** :

This is catastrophe!

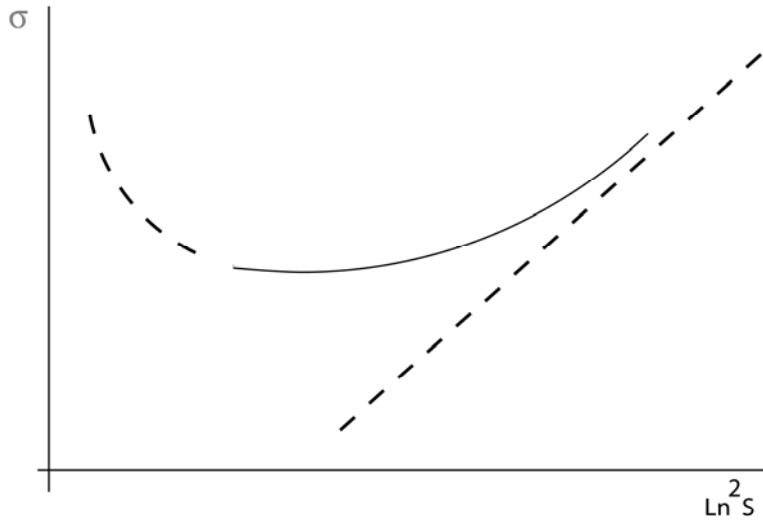
$$\sigma_{s \rightarrow \infty} \rightarrow s^{const}$$

No Unitarity =

No Renormalizability =

NO PHYSICS!

“Unexpected” increasing



BUT!

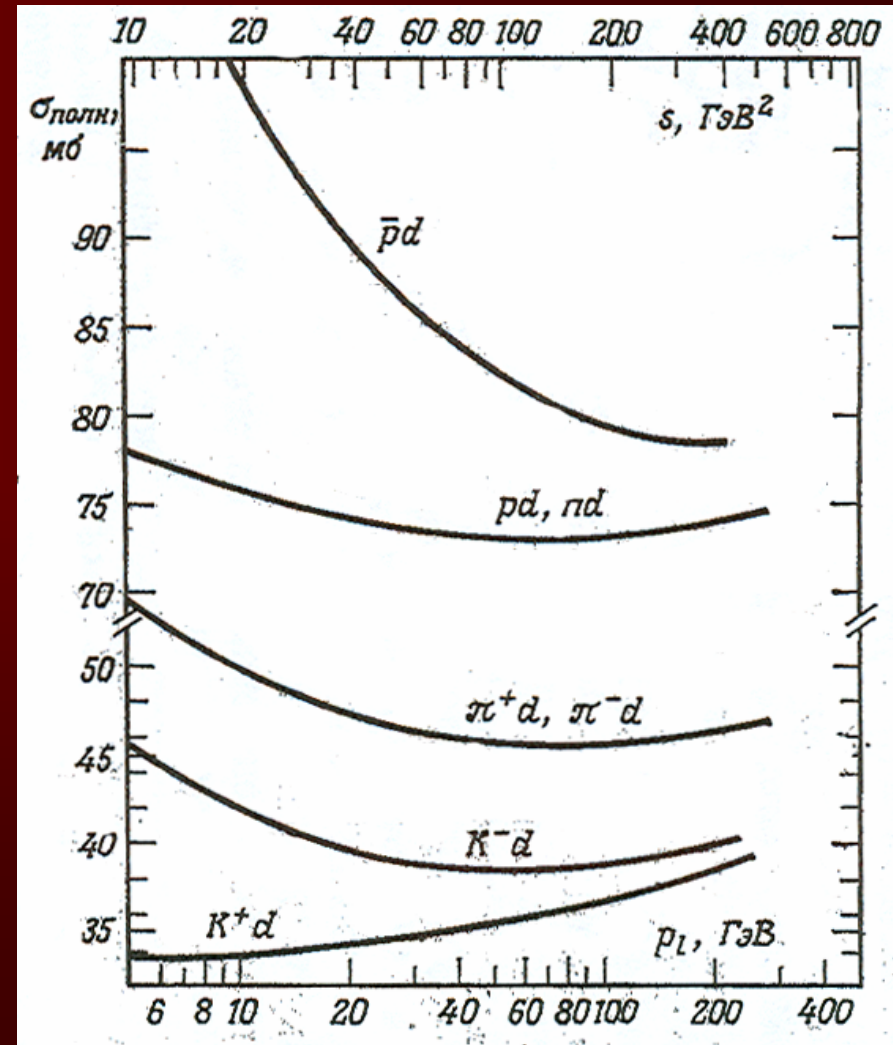
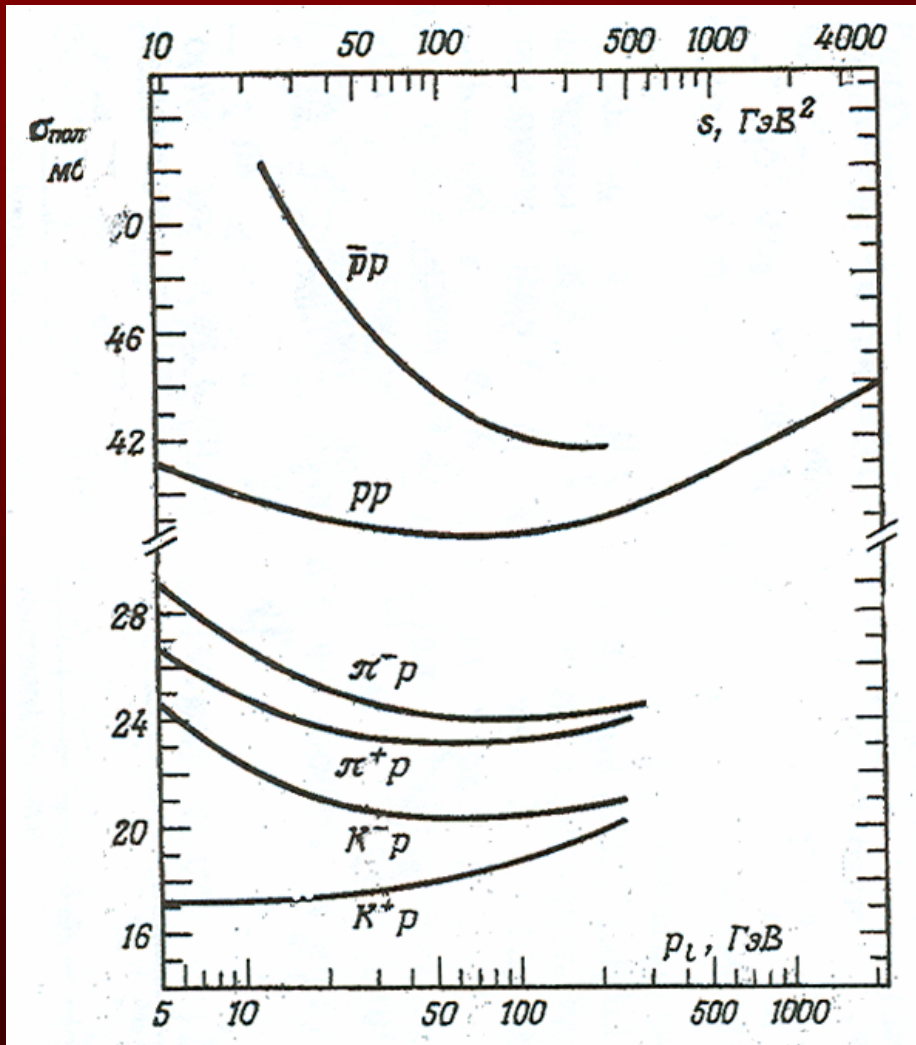
In nature the cross-section increases as quick as possible!

$$\sigma_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Log}^2 s$$

Facts about HE hadron scattering

2. Universality

Universality of the Froissart Bound



Heisenberg picture of the HE hadronic scattering (1952!!!)

Mesonenerzeugung als Stoßwellenproblem.

Von

W. HEISENBERG.

Mit 6 Figuren im Text.

(Eingegangen am 5. Mai 1952.)

Die Erzeugung vieler Mesonen beim Zusammenstoß zweier Nukleonen wird als ein Stoßwellenvorgang beschrieben, der von einer nichtlinearen Wellengleichung dargestellt wird. Die quantentheoretischen Züge des Vorgangs können dabei näherungsweise nach dem Korrespondenzprinzip berücksichtigt werden, da es sich um einen „Vorgang hoher Quantenzahl“ handelt. Aus der Diskussion der Lösungen der nichtlinearen Wellengleichung ergeben sich Aussagen über die Energie- und Winkelverteilung der verschiedenen Mesonensorten.

Die in den letzten Jahren gewonnenen experimentellen Erfahrungen über die Entstehung der π -Mesonen haben es sehr wahrscheinlich gemacht, daß beim Stoß zweier Nukleonen hoher Energie häufig viele Mesonen mit einem Schlag erzeugt werden. Daß eine starke Wechselwirkung der Nukleonen mit den Mesonen, und insbesondere der Mesonen untereinander zu einer solchen Vielfacherzeugung führen kann, ist schon vor längerer Zeit festgestellt worden [4]. Zu einer quantitativen Abschätzung kann man die Energiedissipation im Mesonenfeld mit der Turbulenz in Strömungsfeldern vergleichen [5], oder man kann, wie FERMI [3] es getan hat, an ein im Moment des Zusammenstoßes sich einstellendes Temperaturgleichgewicht denken, aus dem dann die energetische Verteilung der Mesonen zu berechnen ist.

Die folgenden Betrachtungen sollen jedoch das Problem von dem Standpunkt aus wieder aufgreifen, der vom Verfasser im Zusammenhang mit der YUKAWASchen Theorie im Jahre 1939 dargelegt worden ist [4]. Die Mesonenerzeugung soll als ein Stoßwellenvorgang aufgefaßt werden, der durch eine nichtlineare Wellengleichung beschrieben wird, und es soll gezeigt werden, daß man bei einer solchen Behandlung zu quantitativen Ergebnissen für die spektrale und die räumliche Verteilung der verschiedenen Mesonensorten kommen kann.

I. Anschauliche Beschreibung der Stoßwelle.

Im folgenden soll die Mesonenerzeugung stets im Schwerpunktsystem beschrieben werden. Die Transformation ins Laboratoriumssystem kann nachträglich ohne Schwierigkeiten vorgenommen werden und ist schon in früheren Arbeiten durchgeführt worden, sie braucht also hier nicht erörtert zu werden [5].

a) Im Schwerpunktsystem bewegen sich die beiden Nukleonen von entgegengesetzter Richtung kommend aufeinander zu (Fig. 1), bis sie in einem gewissen (in Fig. 1 schraffierten) Gebiet überlappen, in dem eine starke Wechselwirkung einsetzt. Die Nukleonen sind als flache Scheiben gezeichnet, deren Dicke wegen der LORENTZ-Kontraktion um den Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ (β = Schwerpunktgeschwindigkeit) kleiner ist als

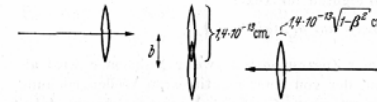


Fig. 1.

ihre Durchmesser, den man von der Größenordnung der COMPTON-Wellenlänge des Mesons, d.h. von der Ordnung $1,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ annehmen kann. Im Moment des Zusammenstoßes

verändert sich die Geschwindigkeit der Nukleonen, so daß in ihrem gesamten Gebiet Energie ans Mesonenfeld übertragen wird. Im ersten Augenblick der Stoßwelle ist also die ganze Energie des Mesonenfeldes in der dünnen ebenen Schicht konzentriert, die im Moment des Stoßes von den beiden Nukleonen erfüllt war.

b) Wenn man von der Wechselwirkung der Mesonen absehen könnte, so würden sie sich von diesem ersten Augenblick ab nach der Wellengleichung

$$\square \varphi - \kappa^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

ausbreiten (oder nach einer komplizierteren linearen Wellengleichung, die die verschiedenen Mesonensorten enthält). Die spektrale und die Winkelverteilung der Mesonenwelle würde sich dann im Verlauf der Wellenausbreitung nicht mehr ändern, sie könnte also durch eine FOURIER-Entwicklung der Welle im ersten Moment bestimmt werden. Man findet, daß die zwischen den Frequenzen k_0 und $k_0 + dk_0$ enthaltene Energie der Mesonenwelle (k_0 entspricht also der Energie des einzelnen Mesons) von k_0 nahezu unabhängig wäre bis zu Frequenzen, deren zugehörige Wellenlänge von der Größenordnung der Dicke der Schicht, in der der Stoß stattfindet, d.h. von der Ordnung $\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\kappa}$ (κ Mesonenmasse) ist; für $k_0 > k_{0m} = \frac{\kappa}{\sqrt{1-\beta^2}}$ wird die Intensität als Funktion von k_0 rasch abnehmen.

$$d\varepsilon = \text{const} \cdot dk_0 \quad \text{für} \quad k_0 \leq k_{0m}. \quad (2)$$

Für die Anzahl der Mesonen im Intervall dk_0 erhält man entsprechend

$$dn = \text{const} \frac{dk_0}{k_0} \quad \text{für} \quad k_0 \leq k_{0m}. \quad (3)$$

In Fig. 2 ist der Verlauf von φ auf der Achse senkrecht zur Emissions-ebene (kurz nach dem Emissionsakt), ferner $d\varepsilon/dk_0$ und dn/dk_0 unter

Heisenberg picture of the HE hadronic scattering (1952!!!)

Mesonenerzeugung als Stoßwellenproblem. 69

Die Lösung der nichtlinearen Wellengleichung kann, wenn man sich zunächst nur für die spektrale und nicht für die Richtungsverteilung interessiert, durch einige Vereinfachungen erleichtert werden: Man denkt sich die Ebene, in der die Emission stattfindet, unendlich ausgedehnt, die Schicht unendlich dünn. Dann kann, wegen der LORENTZ-Invarianz der Wellengleichung, φ nur von $s = l^2 - x^2$ abhängen; die partielle Differentialgleichung geht also in eine gewöhnliche Differentialgleichung über, deren Lösung man leichter diskutieren kann.

Als Beispiele sollen zwei nichtlineare Wellentheorien behandelt werden:

1. Die von SCHIFF [10] und THIRRING [12] im Zusammenhang mit den Kernkräften erörterte Gleichung:

$$\square \varphi - \kappa^2 \varphi - \eta \varphi^3 = 0. \quad (4)$$
2. Eine Wellengleichung, die nach dem Vorbild früherer Arbeiten BORN'S [1] aus der LAGRANGE-Funktion

$$L = l^{-4} \sqrt{1 + l^4 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right)^2 + \kappa^2 \varphi^2 \right]} \quad (5)$$
 hervorgeht. BORN hat schon vor langer Zeit darauf hingewiesen, daß nichtlineare Theorien dieses Typus in geringerem Grad singuläre Lösungen als die linearen haben. Das wurde damals für die Selbstenergie der Elektronen ausgenutzt, trifft aber auch für die Mesonenerzeugung zu. Die LAGRANGE-Funktion (5) ist schon den früheren Untersuchungen über die Mesonenerzeugung zugrunde gelegt worden [4].

Zu 1. Die erste dieser beiden Gleichungen geht für $\varphi = \varphi(s)$ über in:

$$4 \frac{d}{ds} \left(s \frac{d\varphi}{ds} \right) + \kappa^2 \varphi + \eta \varphi^3 = 0. \quad (4a)$$

Für $\eta = 0$ kommt man zur linearen Wellengleichung (1) zurück und die Lösung lautet dann

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= a J_0(\kappa \sqrt{s}) & \text{für } s > 0, \\ \varphi &= 0 & \text{für } s < 0, \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

a ist eine Integrationskonstante; vgl. dazu auch Fig. 2. Für $\eta \neq 0$ kann man eine Potenzreihenentwicklung bei $s = 0$ angeben:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= a \left[1 - (\kappa^2 + \eta a^2) s + \frac{1}{2} (\kappa^2 + 3\eta a^2) (\kappa^2 + \eta a^2) s^2 - \dots \right] & \text{für } s > 0 \\ &= 0 & \text{für } s < 0. \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

Man erkennt unmittelbar, daß es sich bei (4) um eine „schwache“ Wechselwirkung handelt, die an der Unstetigkeit der Wellenfunktion an der Stoßwellenfront nichts ändert. Dies hängt damit zusammen,

76 W. HEISENBERG:

Aus (30) folgt:

$$\sigma = \frac{\pi}{\kappa^2} \lg^2 \gamma_{\min} \quad (31)$$

und

$$\bar{\gamma} = \frac{2}{\lg^2 \gamma_{\min}} (1 - \gamma_{\min} + \gamma_{\min} \lg \gamma_{\min}). \quad (32)$$

Es muß betont werden, daß die in den Gl. (28) bis (32) enthaltene Abschätzung für die Häufigkeitsverteilung der γ -Werte von den vorhergehenden Betrachtungen über die Stoßwellenausbreitung unabhängig ist und als weniger zuverlässig anzusehen ist. Bisher liegt auch noch nicht genügend viel Beobachtungsmaterial vor, um die Häufigkeitsverteilung von γ experimentell zu bestimmen.

Die folgende Tabelle 1 gibt den totalen Wirkungsquerschnitt, die Erwartungswerte von γ , n_π und n_κ (Anzahl der π - bzw. κ -Mesonen),

Tabelle 1.

E	10	10 ²	10 ³	10 ⁴	BeV
σ	0,18	0,49	0,85	1,3	10^{-24} cm^2
$\bar{\gamma}$	0,34	0,19	0,13	0,09	
\bar{n}_π	$3,6 \pm 0,7$	$4,2 \pm 0,8$	$5,2 \pm 0,8$	$8,0 \pm 1$	
\bar{n}_κ	—	$0,9 \pm 0,2$	$2,0 \pm 0,4$	$3,4 \pm 0,6$	
$\bar{k}_{0\pi}$	$0,25 \pm 0,04$	$0,36 \pm 0,04$	$0,50 \pm 0,05$	$0,67 \pm 0,06$	BeV
$\bar{k}_{0\kappa}$	—	$1,0 \pm 0,2$	$1,4 \pm 0,15$	$2,0 \pm 0,18$	BeV
$\gamma = 1$	$10,7 \pm 2$	$22,1 \pm 4$	$40,3 \pm 6$	89 ± 12	
$\left\{ \begin{array}{l} \bar{n}_\pi \\ \bar{n}_\kappa \end{array} \right.$	—	$4,7 \pm 1$	15 ± 6	38 ± 6	

deren mittlere Energie und schließlich die Mesonenzahlen im Grenzfall $\gamma = 1$ als Funktion der Primärenergie E (im Laboratoriumssystem). Andere Mesonenarten als π - und κ -Mesonen sind nicht berücksichtigt; ferner ist willkürlich $g_\kappa = 2g_\pi$, d.h. $g_\pi = \frac{1}{3}$, $g_\kappa = \frac{2}{3}$ gesetzt, um der nach den neueren Messungen in Bristol gefundenen relativ großen Häufigkeit der κ -Mesonen Rechnung zu tragen. Diese Zahlen müssen später auf Grund genauerer Messungen revidiert werden. Für die Masse des κ -Mesons ist 0,61 BeV eingesetzt. Um die Ungenauigkeit der theoretischen Abschätzung zum Ausdruck zu bringen, wird jeweils (mit Ausnahme der ersten beiden Zeilen) aus den mit Hilfe von (16), (17) oder (18) bis (20) gewonnenen Werten das Mittel genommen und die halbe Differenz als Fehler angeführt.

d) Die Winkelverteilung der emittierten Mesonen ergibt sich aus den anschaulichen Überlegungen in I. Zwar werden die Einzelheiten der Winkelverteilung noch von der Stoßwellengleichung abhängen. Aber ganz allgemein wird der Impuls der Mesonen senkrecht zur Primärrichtung die Größe κ nur selten erheblich überschreiten können. Mesonen der Energie k_0 werden in der Regel in einem Winkelbereich der Ordnung

der Voraussetzung (1) graphisch dargestellt. Das Spektrum (3) entspricht dem bekannten Röntgenbremsspektrum der Elektronen und führt auch dann, wenn ein erheblicher Teil der Nukleonenergie auf das Mesonenfeld übertragen würde, niemals zu einer größeren Anzahl emittierter Mesonen, da die Energie des einzelnen Mesons im Mittel $\approx \frac{1}{2} k_{0m}$ wäre.

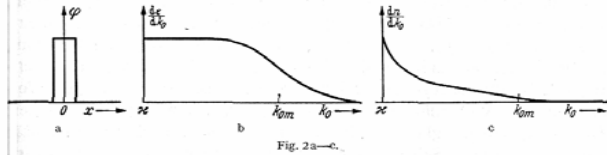


Fig. 2a—c.

c) In Wirklichkeit darf aber von der Wechselwirkung der Mesonen nicht abgesehen werden; die Ausbreitung der Welle erfolgt nach einer nichtlinearen Wellengleichung, die nur im Grenzfall geringer Intensität

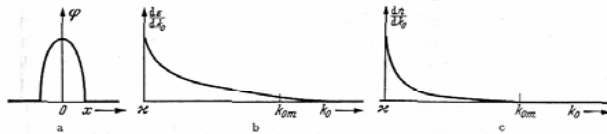


Fig. 3a—c.

näherungsweise in die lineare übergeht. Die Nichtlinearität hat zur Folge, wie später noch nachgerechnet werden wird, daß die Singularität am Kopf der Welle etwas abgerundet wird; infolgedessen wird noch

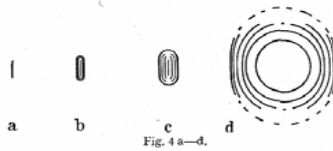


Fig. 4a—d.

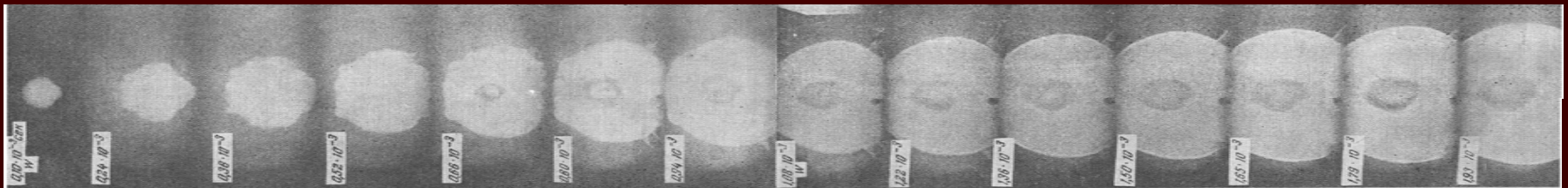
während des Ausbreitungsvorgangs Energie von den kurzen in die langen Wellen überführt und die spektrale Verteilung am Ende des Ausbreitungsvorgangs fällt steiler ab als bei der Gültigkeit von (1). Man erhält also qualitativ die in Fig. 3 dargestellten Verhältnisse.

Die räumliche Ausbreitung wird in den Fig. 4a—d geschildert.

Im Stoßmoment ist die ganze Energie in der Scheibe der beiden Nukleonen konzentriert (a). Dann entfernen sich nach rechts und links

5*

Fireball: analogy with atom-bomb explosion



Born-Infeld Theory for Mesons in 1+1 dim.
Two scenarios of the HE scattering: “quasi-elastic”
and “inelastic” (decreasing and increasing)

$$L = 1 - \sqrt{1 - (\varphi_t^2 - \varphi_x^2)}$$

$$(1 - \varphi_t^2)\varphi_{xx} + 2\varphi_t\varphi_x\varphi_{tx} - (1 + \varphi_x^2)\varphi_{tt} = 0$$

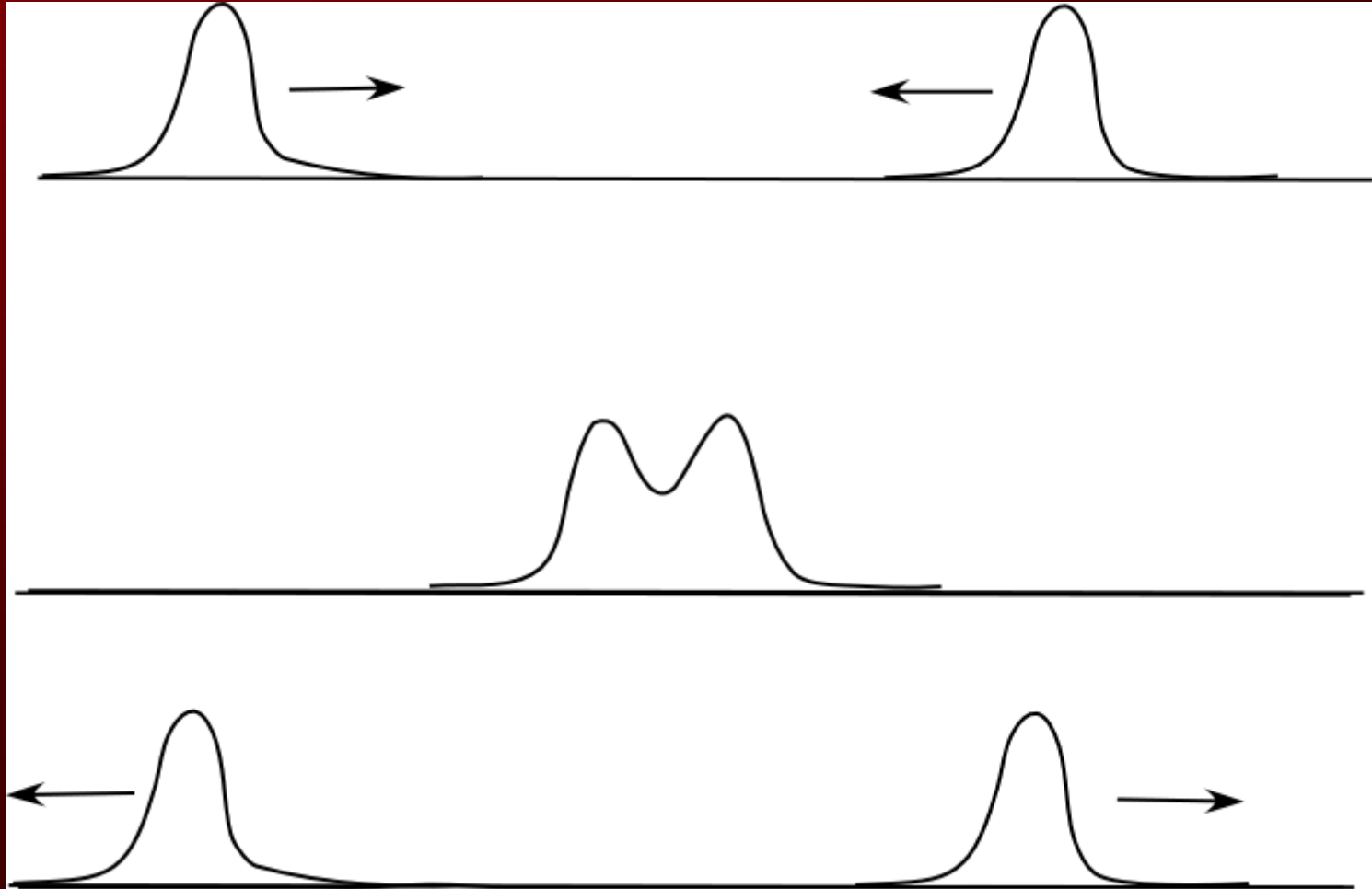
Two type of solitons:

$$\varphi = \Phi(x + t)$$

$$\varphi = \Phi(x - t)$$

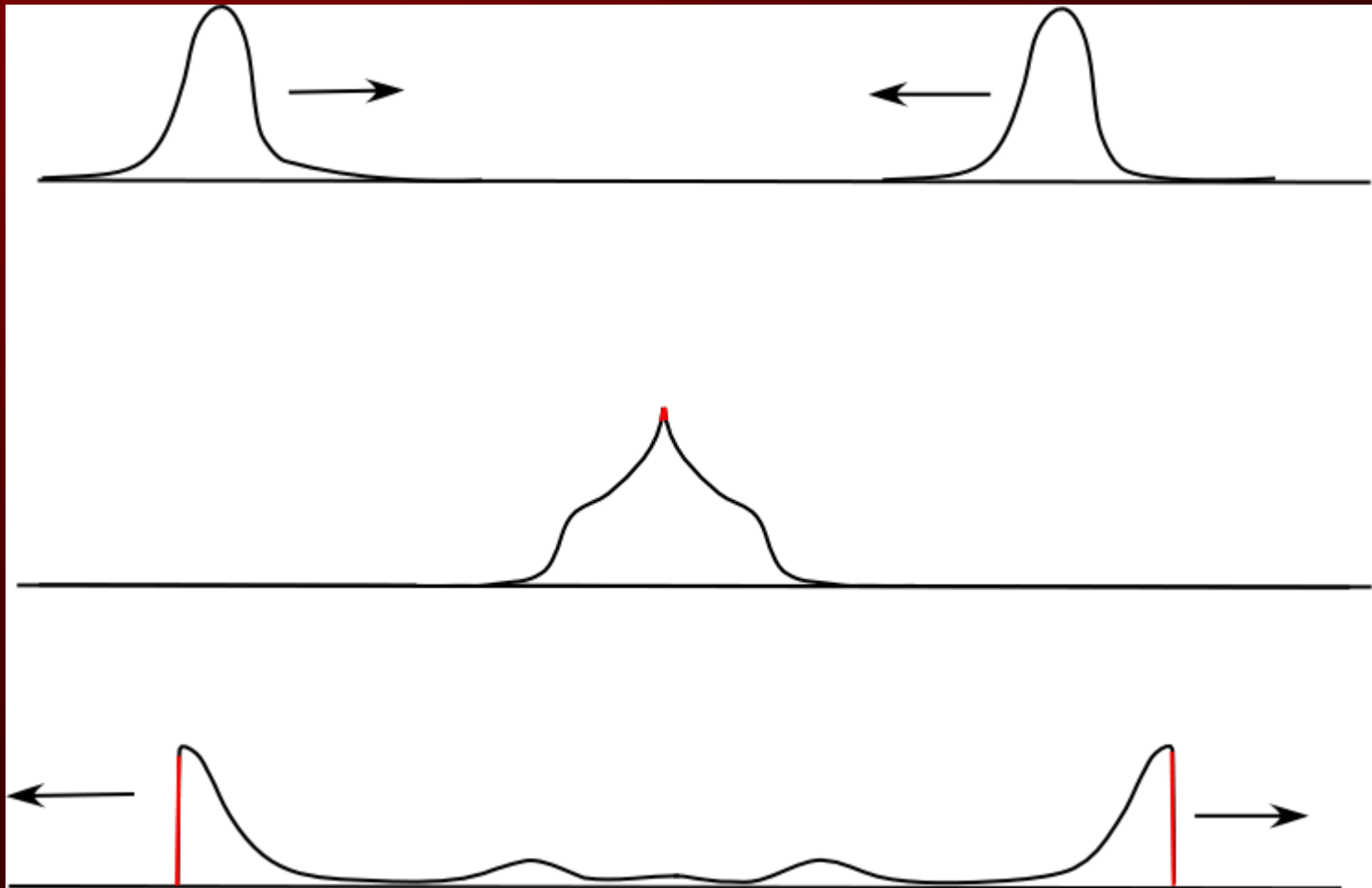
“Quasi-elastic” scenario:

$$1 - (\varphi_t^2 - \varphi_x^2) > 0$$



“Inelastic” scenario:

$$1 - (\varphi_t^2 - \varphi_x^2) < 0$$



Meson BI theory in 1+1 dim: integrability, “hidden” conformal symmetry and String Theory

1) Meson BI theory in 1+1 dim = Theory of Bosonic String

$$L = 1 - \sqrt{1 - (\dot{\varphi}_t^2 - \dot{\varphi}_x^2)}$$

\longrightarrow

$$X^\mu = \begin{pmatrix} t(\tau, \sigma) \\ x(\tau, \sigma) \\ y = \varphi(t(\tau, \sigma), x(\tau, \sigma)) \end{pmatrix}$$

\longleftarrow

$$L = -\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}$$

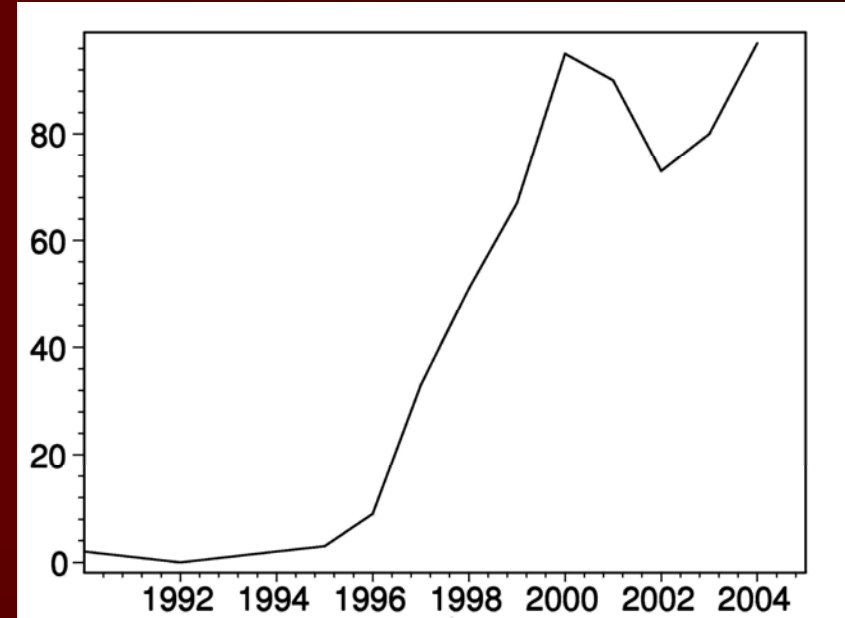
2) Weyl invariance (conformal symmetry) in the String language leads to infinite number of the integral of motion in the meson field Language

3) Infinite number of the integral of motion leads to Integrability. One can find Full Solution.

Born-Infeld Theory and String Theory



Activity in
Born-Infeld
Field



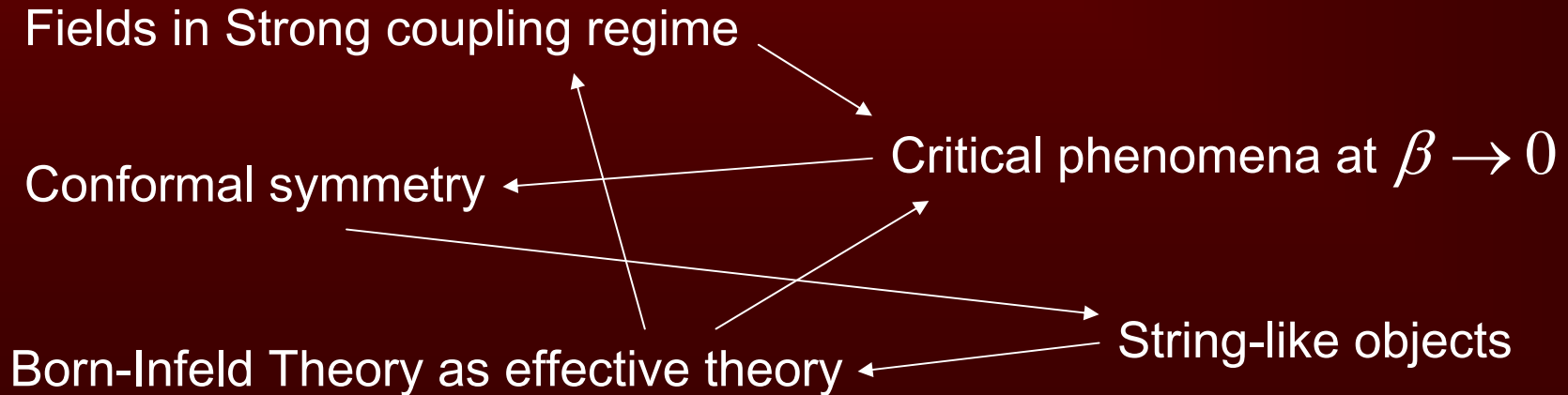
Fields in Strong coupling regime

Conformal symmetry

Born-Infeld Theory as effective theory

Critical phenomena at $\beta \rightarrow 0$

String-like objects



Shock-wave solutions of Chiral Born-Infeld Theory

$$L_{ChBI} = -f_\pi^2 \beta^2 \text{Tr} \left(1 - \sqrt{1 - (L_\mu L^\mu / 2\beta^2)} \right)$$

$$f_\pi \rightarrow 0$$

$$\beta \rightarrow 0$$

$$L_H = 1 - \sqrt{1 - (\varphi_t^2 - \varphi_{\vec{x}}^2)}$$

$$L_W = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} (L_\mu L^\mu)$$

$$L_\mu = U^+ \partial_\mu U$$

$$U = \exp(i\vec{\phi}\vec{\tau} / f_\pi)$$

Shock-wave solutions of Chiral Born-Infeld Theory: Spherically symmetrical field configurations

$$\vec{\phi} = F(r) \vec{n}$$

$$\underline{\left(r^2 - \frac{1}{\beta^2} \sin^2 F\right) F''} + (2rF' - \sin 2F) - \frac{1}{\beta^2} (rF'^3 - F'^2 \sin 2F + 3\frac{1}{r} \sin^2 F - \frac{1}{r^2} \sin 2F \sin^2 F) = 0$$

If $\exists r_0 : \left(r_0^2 - \frac{1}{\beta^2} \sin^2 F(r_0)\right) = 0 \longrightarrow$ Problem

If $r_0 = 0$

else $r_0 \neq 0$

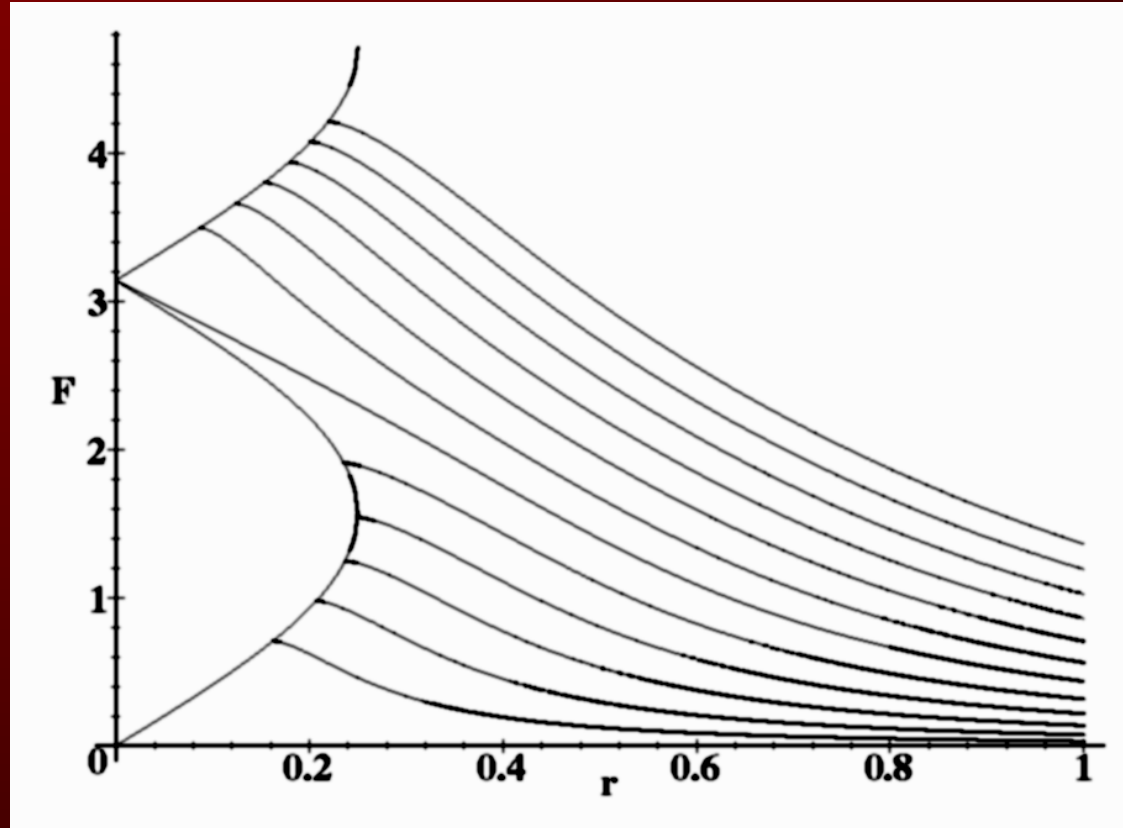
$F'(0) = \text{const}$

It's soliton!

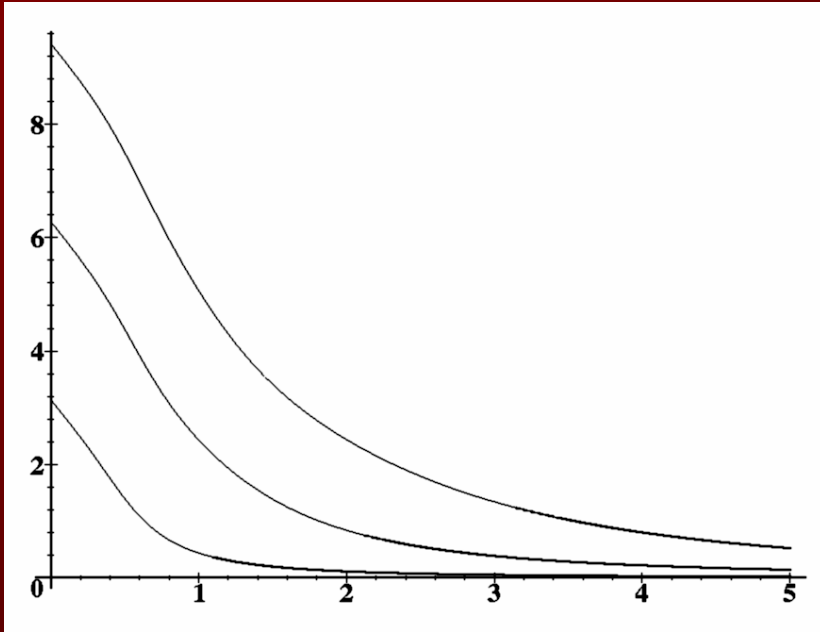
$F'(r = r_0) = 0$

It's Shock-wave profile

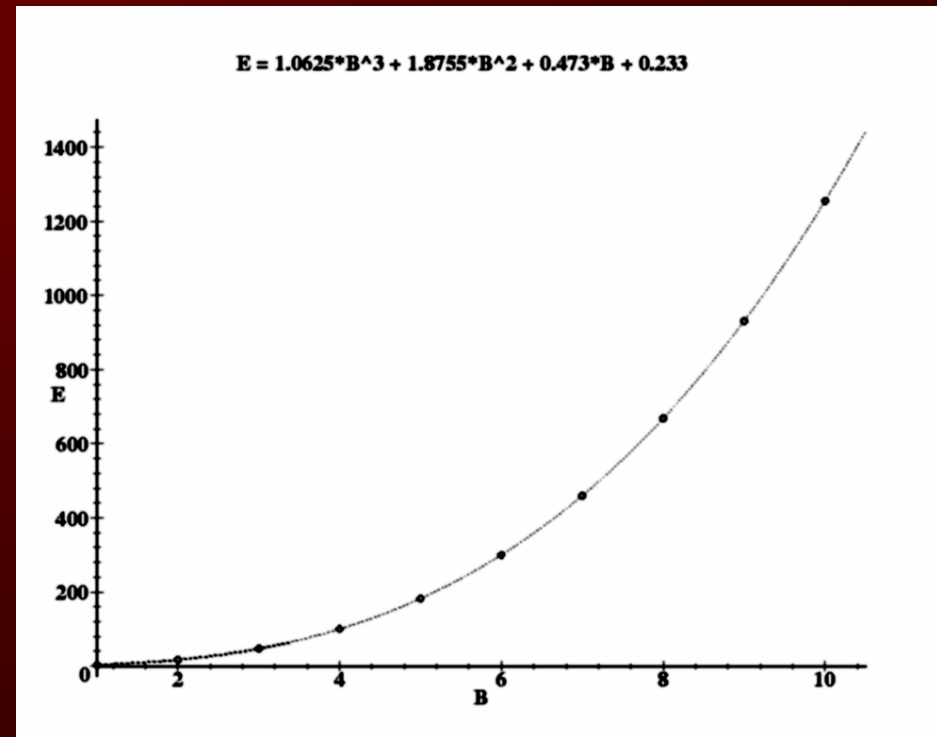
Solutions of Chiral Born-Infeld equation: solitons and shock-waves



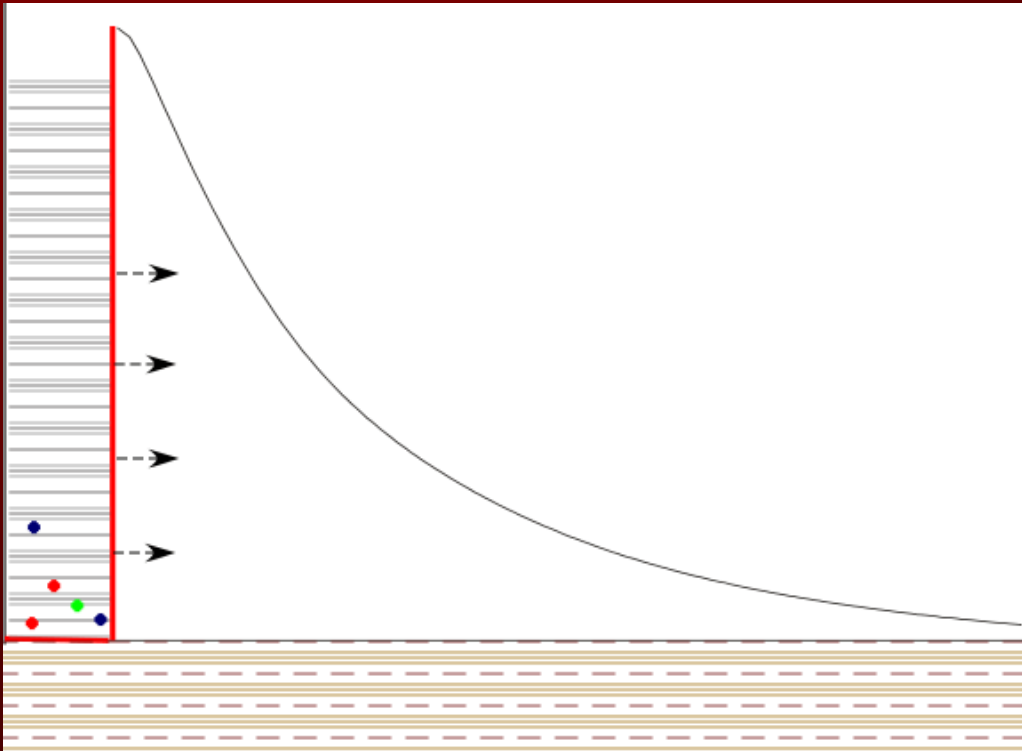
Chiral BI solitons with different topological charges



Solutions with large
Topological Number
Are Very Unstable!

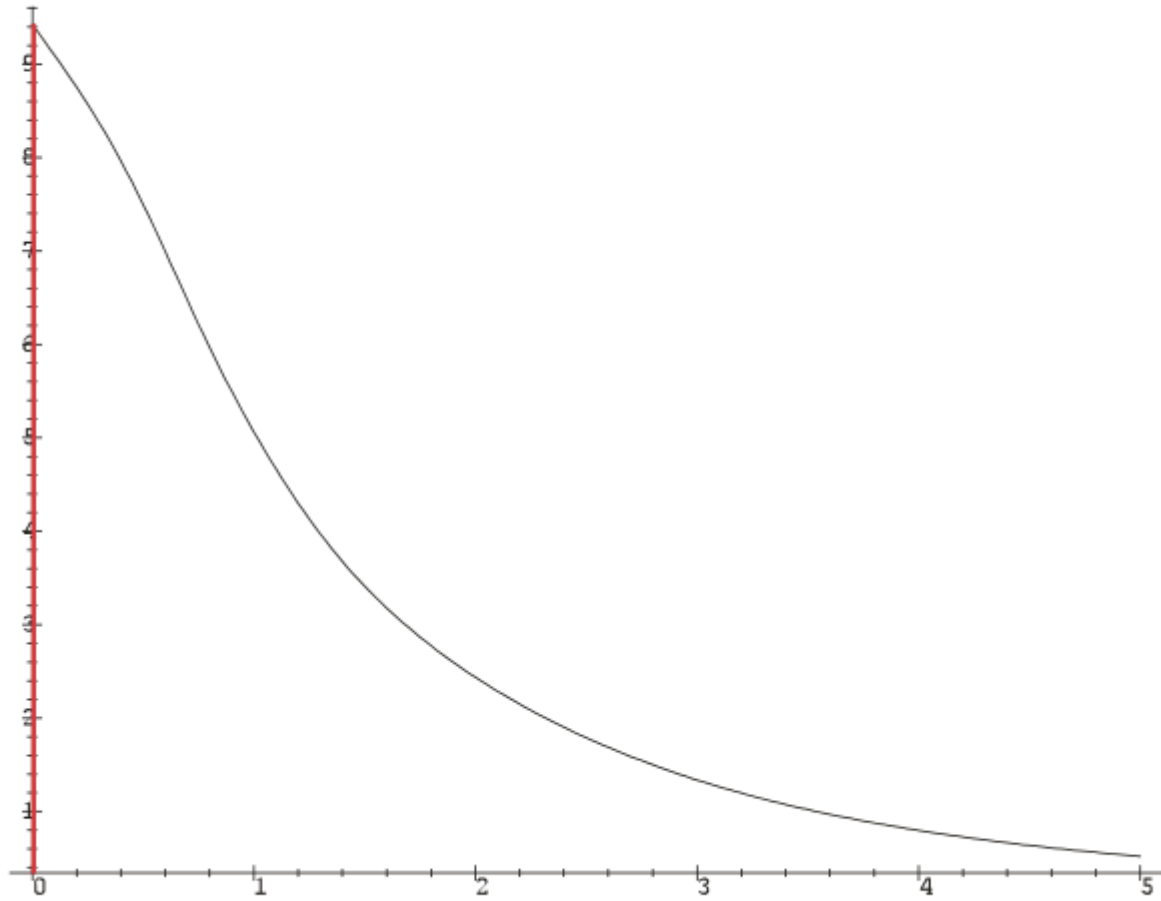


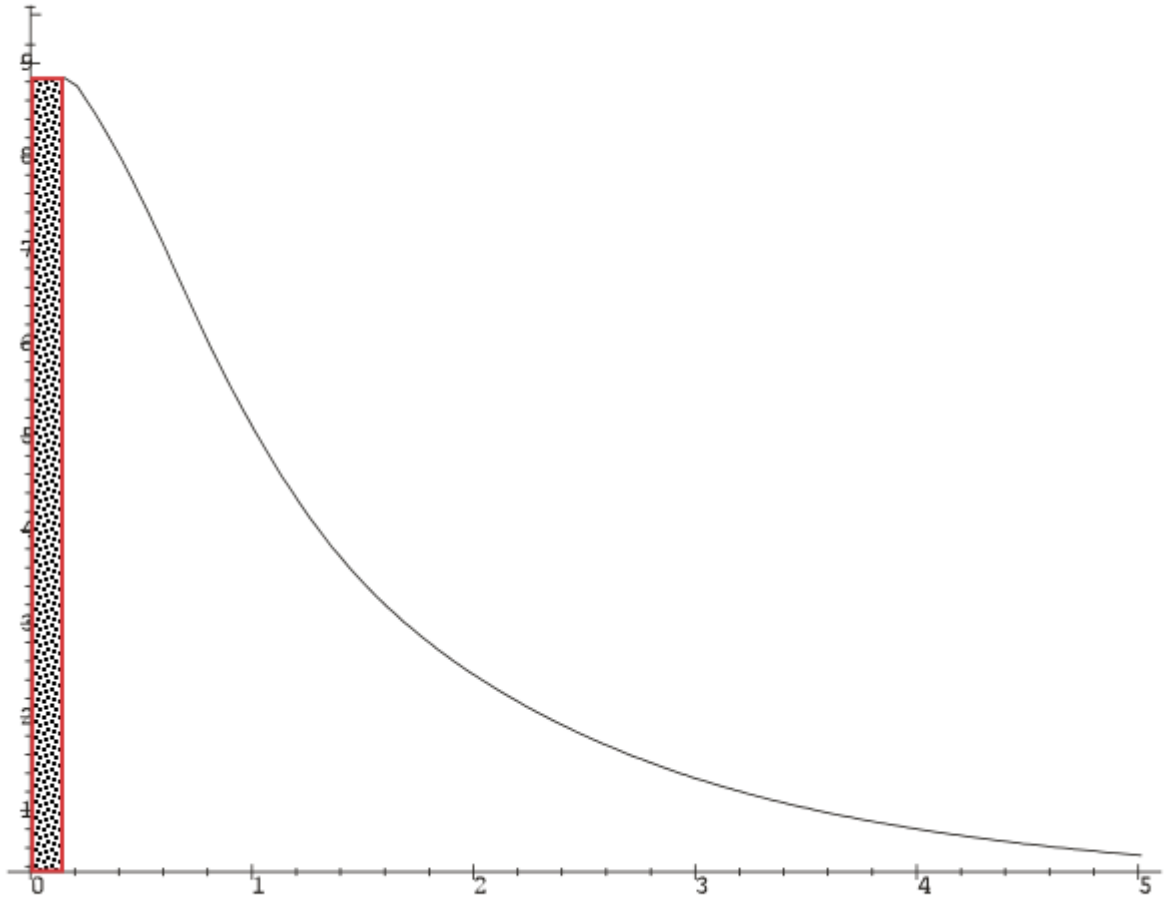
Chiral Boundary Conditions: shock-wave singularity and chiral fermions into the “Bag”

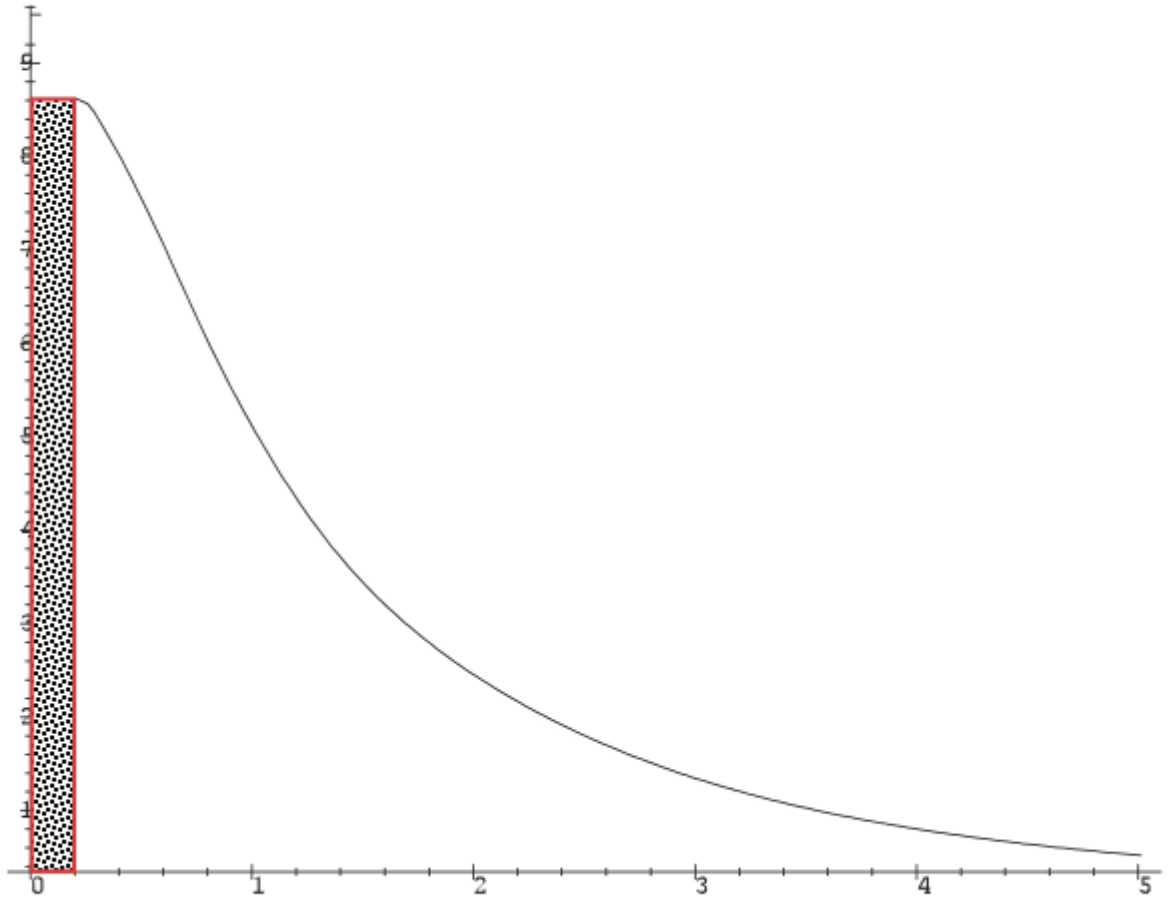


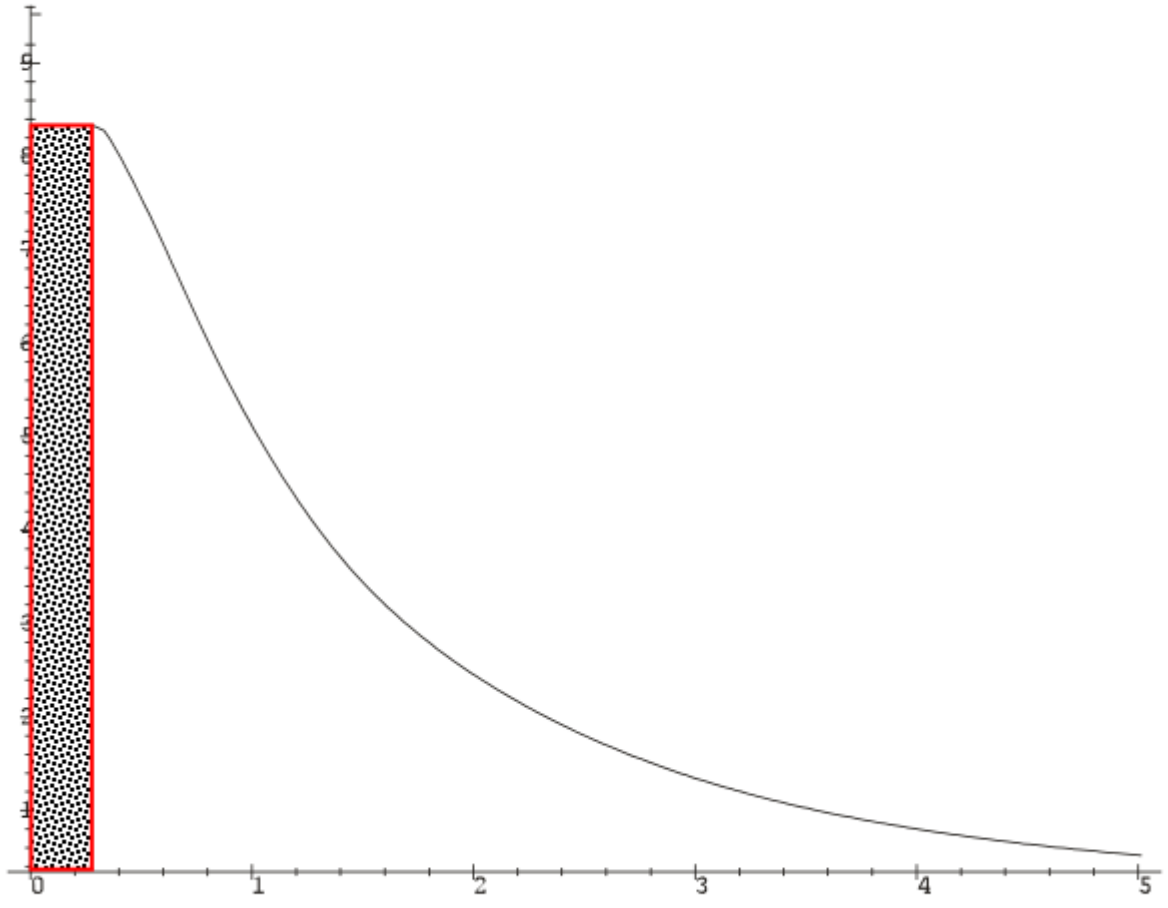
$$J_q^{ch} \Big|_{\partial S} = J_\pi^{ch} \Big|_{\partial S}$$

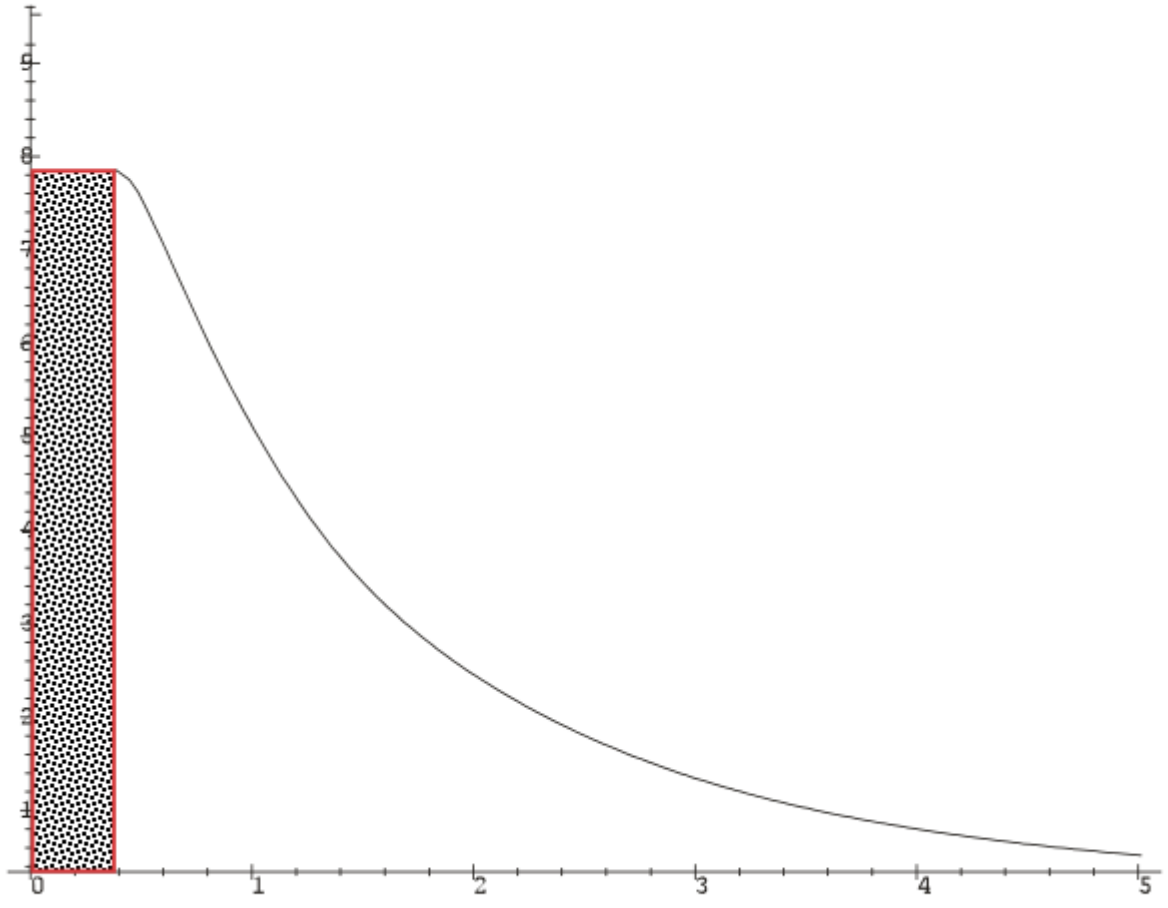
In our model: color-field phase is a gas of quasi-independent chiral fermions produced by singularity of Chiral current on shock-wave.

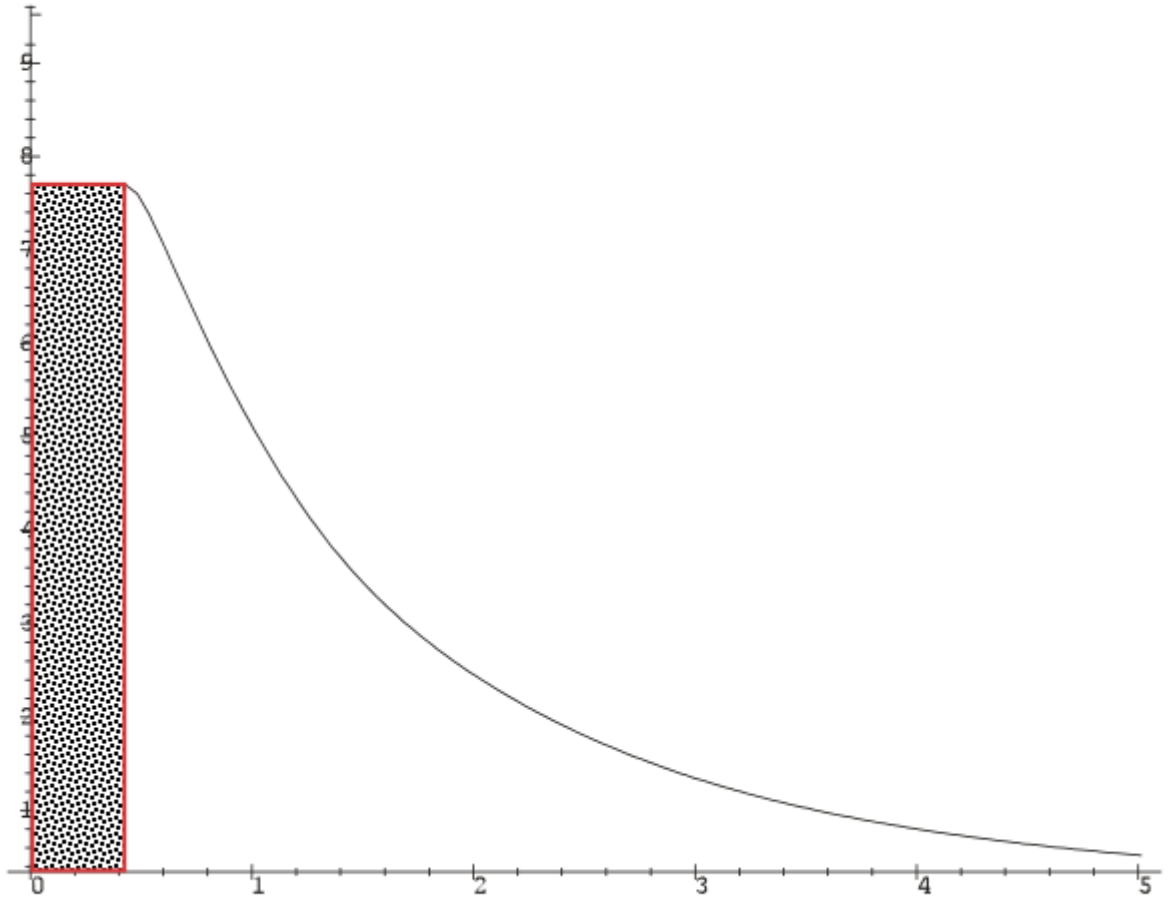


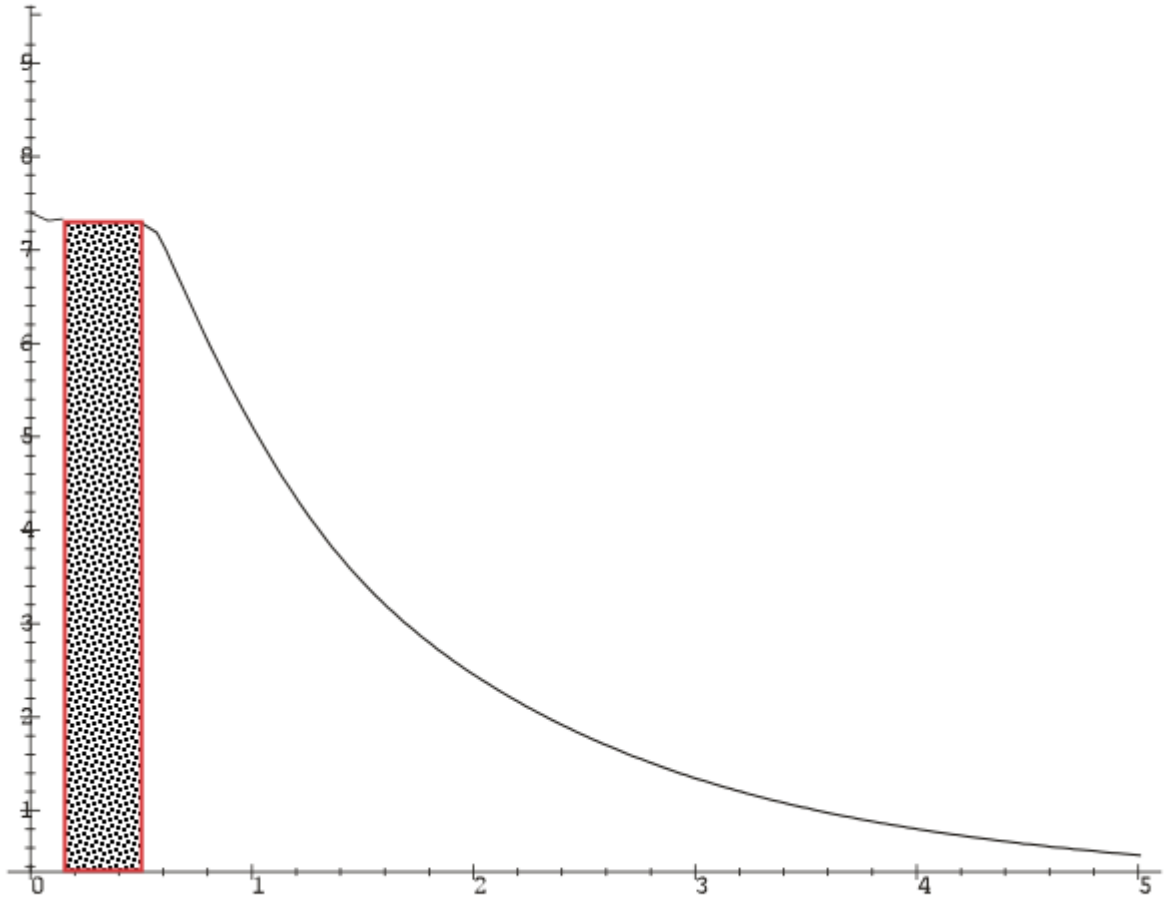


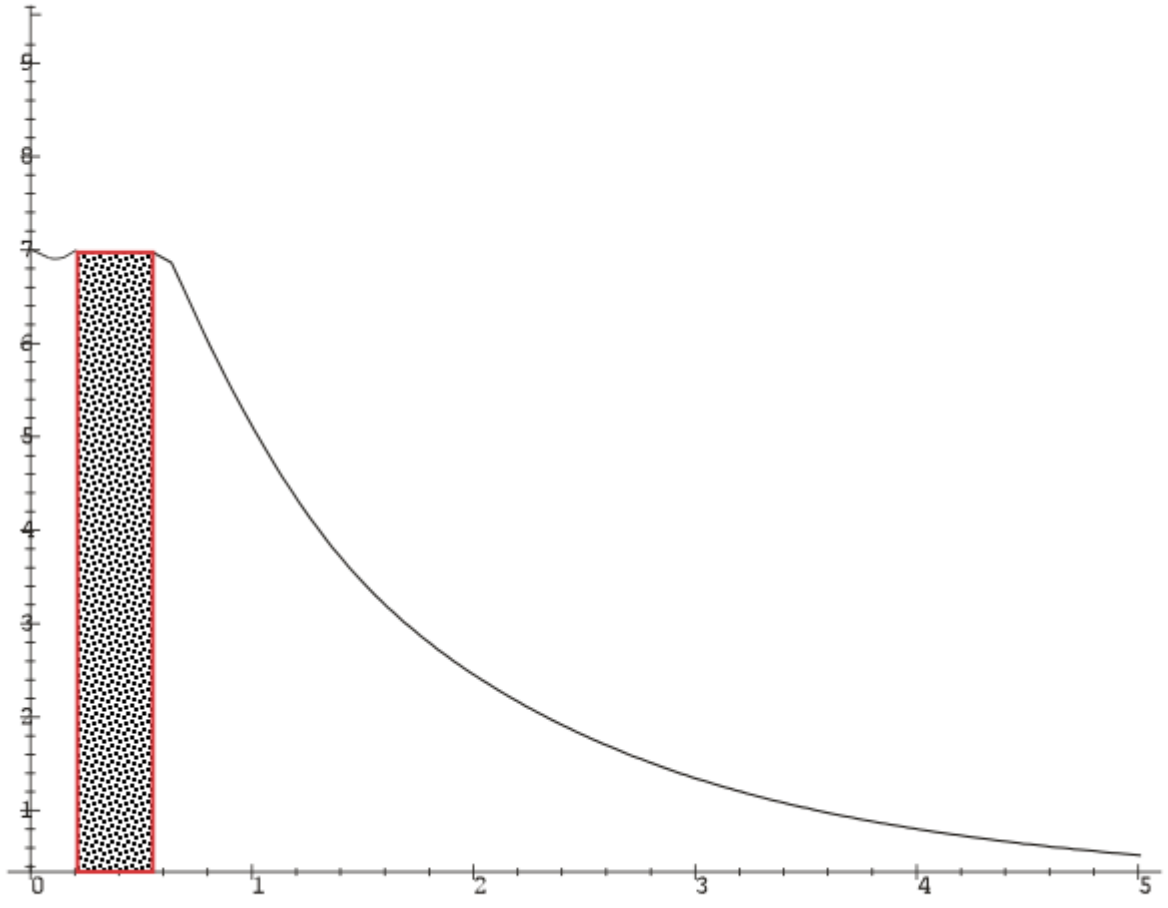


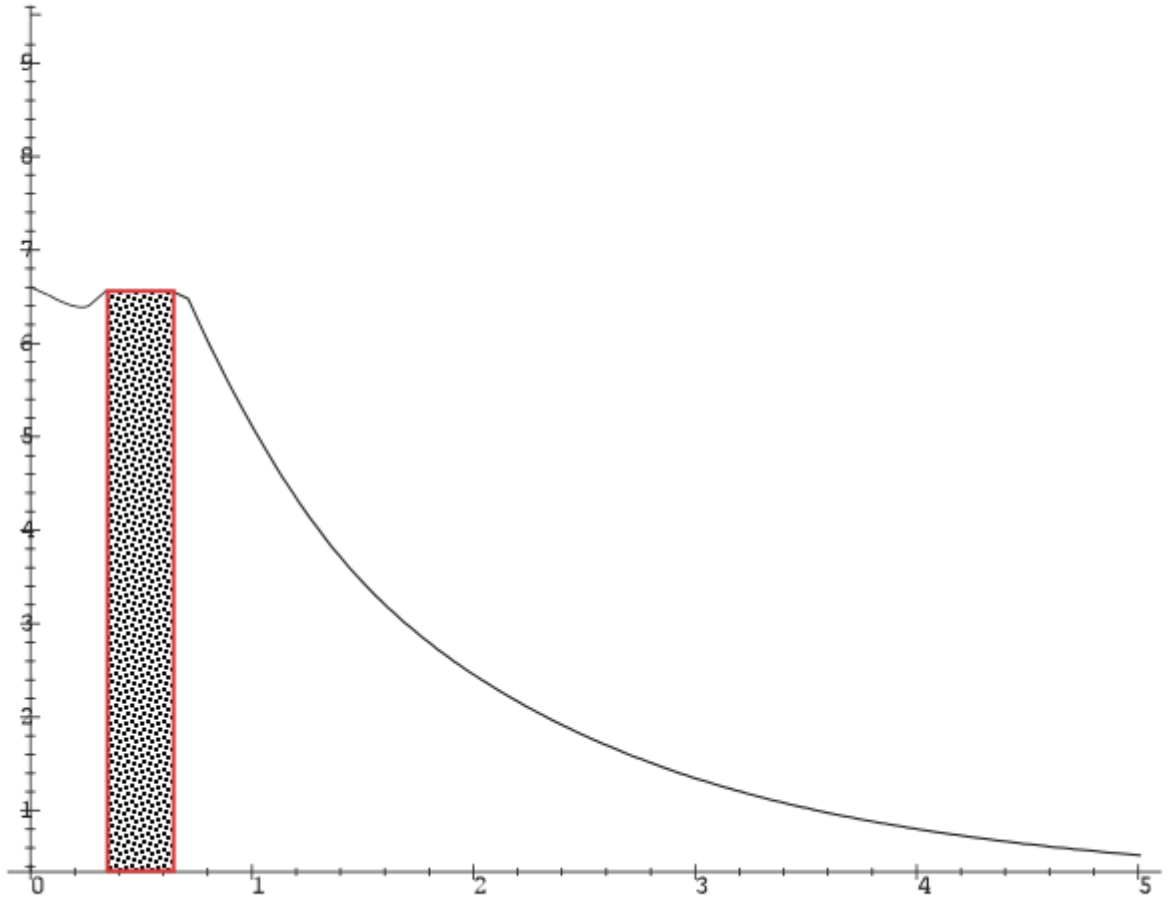


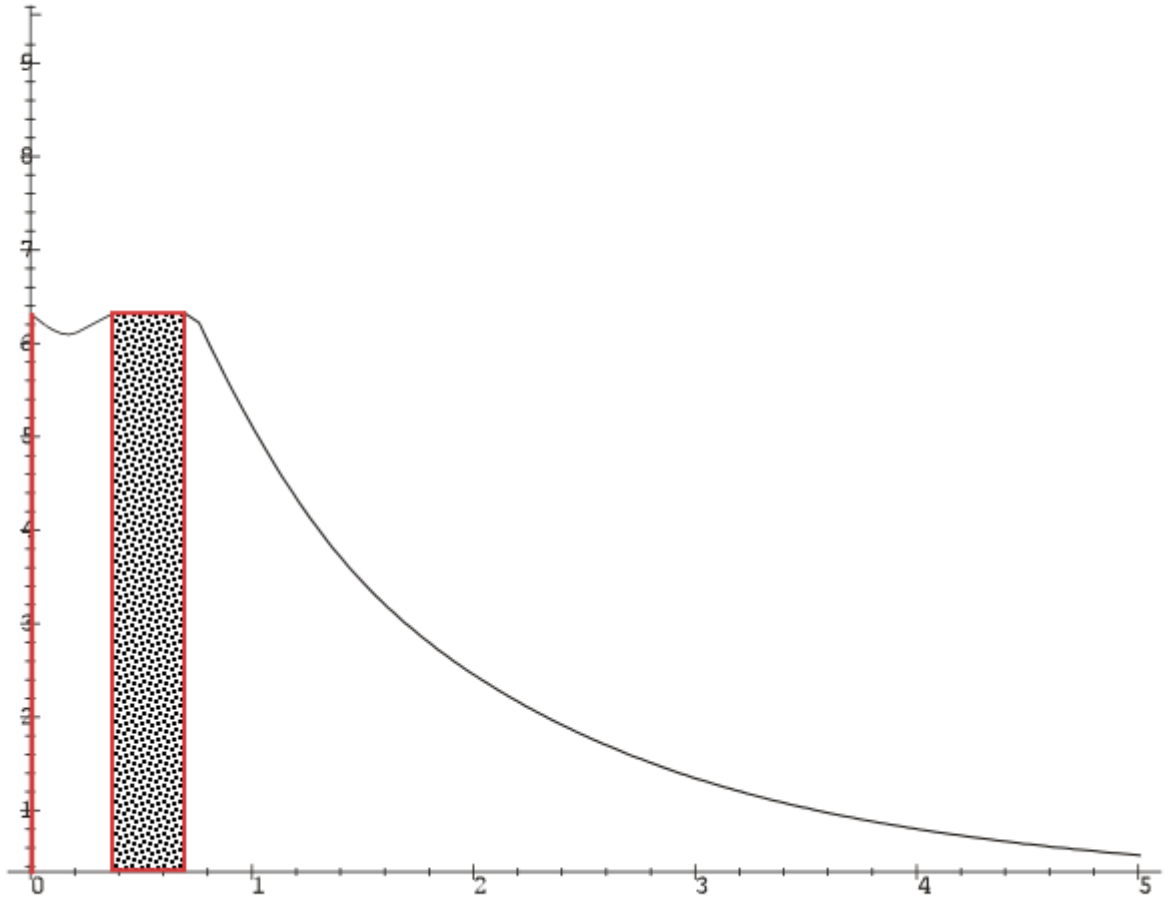


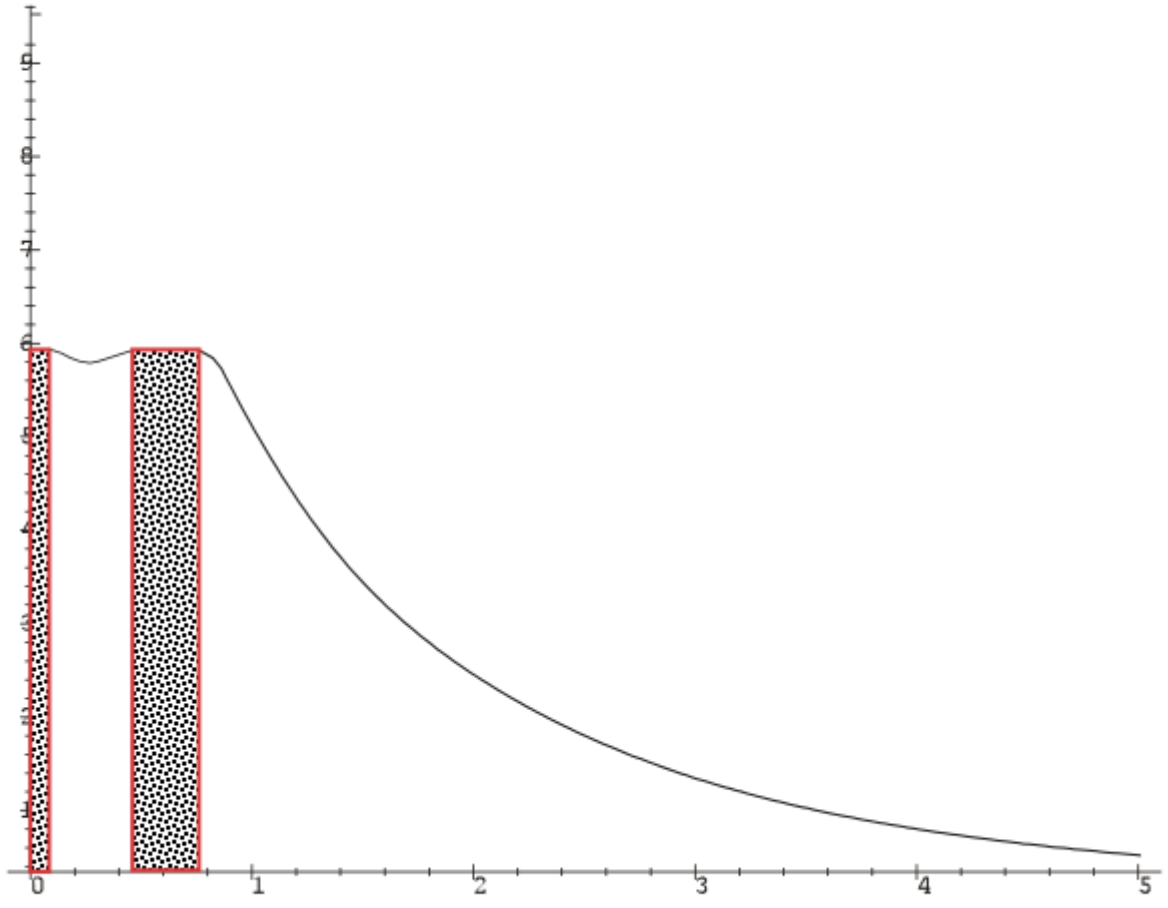












It's just effectively “two-dimensional” toy model.

Real 3+1 dimensional case is under consideration now!

Conclusions:

New version of Heisenberg model of HE hadron scattering was proposed.

Solitonic and shock-wave solutions in Chiral Born-Infeld Theory were studied.

Dynamics of Fireball explosion in this model was considered.

3+1 dimensional results are coming!