ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ

[конспект лекций: версия 1.0]

А. А. Владимиров
ЛТФ ОИЯИ
alvladim@theor.jinr.ru

Содержание

0. Введение 2
1. Квантовые поля 4
2. Теория возмущений 14
3. Континуальный интеграл 24
4. Преобразования полей и теорема Нётер 30
5. Калибровочная симметрия 35
6. Госты и BRST 39
7. Регуляризация 43
8. Перенормировка 47
9. Ренормгруппа 50
10. Аномалии ..... ?
11. Аналитичность ..... ?

Аннотация

Квантовая теория поля – один из ключевых разделов современной теоретической физики. Возникнув исторически как теоретический аппарат физики высоких энергий, в настоящее время квантовая теория поля, вместе с теорией струн и интегрируемых систем, образует весьма динамично развивающееся ядро всей современной математической физики. Данный текст задуман как сравнительно элементарное изложение основ квантовой теории поля. Ввиду наличия немалого количества хороших учебников, сделана попытка собрать из них всё лучшее (в педагогическом плане), переработав в едином стиле и максимально упростив изложение.

0. Введение

Данное пособие не является самодостаточным учебником. Это всего лишь конспект, призванный быть элементом в связке "лекции + конспект" либо "конспект + учебник". Первый вариант комментариев не требует. Применительно же ко второму, следует предупредить о некоторых отличиях от общепринятых стандартов. Автор исходит из того, что квантовая теория поля (в своих основах) сформировалась не вчера, а несколько десятков лет назад, и прошла за это время достаточную апробацию. Поэтому гораздо важнее *объяснить* студенту тот или иной результат, чем *строго вывести* его – ведь никто и так не сомневается в его правильности. Этим объясняется весьма либеральное отношение к строгости доказательств в предлагаемом тексте. Часто намечается лишь основная идея или дается перечень основных этапов доказательства (за исключением случаев, когда доказательство само по себе поучительно). Кроме того, некоторые утверждения оставлены без доказательства по принципиальным соображениям: по мнению автора, их удобнее принять в качестве постулатов. К таковым относятся, например, (анти)коммутационные соотношения операторов рождения и уничтожения, а также представление S-матрицы в форме T-экспоненты. Квантовые (свободные) поля тоже считаются первичными объектами теории. Некоторые концепции и понятия, часто встречающиеся в учебной литературе, в данном тексте просто проигнорированы, поскольку в них не было нужды (волновые пакеты, асимптотические состояния, индефинитная метрика, редукционные формулы); другие – по сути не используются, но упомянуты для сравнения (каноническое квантование, представление взаимодействия, гайзенберговы поля). Также не ставилась задача изложения конкретных моделей теории поля, таких как квантовая хромодинамика (КХД) или Стандартная модель. Для иллюстрации общих методов, как правило, брались более простые модели.

Прояснив вопрос, чего в этом пособии *нет*, попробуем теперь уточнить, что же в нем все-таки *есть*, и годится ли оно для самообразования. Кратко можно сказать, что данный конспект представляет собой *минимальˆно достаточный набор базовых формул квантовой теории поля* , дополненный необходимыми пояснениями их логической структуры и взаимосвязей. Общая же мотивация, равно как и физические иллюстрации, во многих случаях отсутствуют. Их желательно восполнять, пользуясь обычными учебниками. Хорошим упражнением (повышенной сложности) является также детальное сравнение логики изложения конкретного вопроса в данном пособии и в (любом) стандартном учебнике. Отличия носят, как правило, идейный характер. При этом автор, конечно, не настаивает, что его вариант является лучшим. Резюме: совсем без учебника, видимо, не обойтись, но вдумчивое изучение данного конспекта плюс параллельное чтение (возможно, нескольких) учебников представляется оптимальной комбинацией, нивелирующей недостатки каждого из источников и позволяющей, как ни странно, даже сэкономить время.

Два слова по поводу внутренней организации и расположения материала. Как правило, вводя новое понятие, мы стараемся рассмотреть его как можно подробнее на самом простом из возможных нетривиальных примеров. Зато при переходе к более сложным реализациям или обобщениям данного понятия нам остается лишь указать и обсудить отличия. Отметим также отсутствие в данном пособии упражнений и задач (в обычном понимании) . По замыслу автора, одной-единственной (но обязательной) задачей является детальное прослеживание хода рассуждений. Часто это можно проделать в уме, но иногда потребуются и выкладки на бумаге.

Релятивистские обозначения. Индексы пространства Минковского (4-индексы) обозначаются греческими буквами и принимают значения $0, 1, 2, 3$. Где поставлен индекс – вверху или внизу – не будет иметь значения (по возможности, будем писать индексы внизу). При суммировании по 4-индексам символ суммы опускается и принимается следующее универсальное соглашение о знаках:

$$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b_\mu \;\equiv\; a_\mu b_\mu \;\doteq\; a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \;\equiv\; a_0 b_0 - \mathbf{ab} \;\equiv\; ab\,. \tag{1}$$

Тогда δ-символом в пространстве Минковского становится метрический тензор

$$g_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,, \qquad g_{\mu\nu} a_\mu \;=\; g_{\nu\mu} a_\mu \;=\; a_\nu\,, \qquad g_{\mu\mu} \;=\; 4\,. \tag{2}$$

Введем еще одно соглашение: будем раскрывать символ 4-градиента ∂_μ не по правилу $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, \mathbf{x})$, принятому для 4-векторов, а несколько иначе,

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial_\mu \;=\; (\partial_0, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3) \;=\; (\frac{\partial}{\partial x_0}\,, -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}) \;=\; (\partial_0\,, -\nabla)\,. \tag{3}$$

Этим достигается формальная ковариантность дифференцирования:

$$\partial_\mu x_\nu \;=\; g_{\mu\nu}\,, \qquad \partial_\mu\,(xp) \;=\; p_\mu\,, \qquad \partial_\mu\,(x^2) \;=\; 2\,x_\mu \qquad (x^2 \doteq x_\mu x_\mu = x_0^2 - \mathbf{x}^2)\,. \tag{4}$$

Ключевую роль в пространстве Минковского играют преобразования Лоренца

$$x'_\mu \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\, x_\nu\,, \qquad x_\mu \;=\; \Lambda_{\nu\mu}\, x'_\nu\,, \qquad \Lambda_{\alpha\mu}\Lambda_{\alpha\nu} \;=\; \Lambda_{\mu\alpha}\Lambda_{\nu\alpha} \;=\; g_{\mu\nu}\,, \tag{5}$$

относительно которых инвариантны квадраты 4-векторов, их скалярные произведения вида (1), а также сам тензор $g_{\mu\nu}$:

$$a'b' \;=\; a'_\mu b'_\mu \;=\; \Lambda_{\mu\alpha}\,\Lambda_{\mu\beta}\,a_\alpha b_\beta \;=\; g_{\alpha\beta}\,a_\alpha b_\beta \;=\; ab\,, \qquad g'_{\mu\nu} \;=\; \Lambda_{\mu\alpha}\,\Lambda_{\nu\beta}\,g_{\alpha\beta} \;=\; g_{\mu\nu}\,. \tag{6}$$

В силу условия (3), ковариантный рецепт преобразования производной,

$$x_\nu \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\, x'_\mu \quad \Longrightarrow \quad \partial'_\mu\, x_\nu \;=\; \Lambda_{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \quad \partial'_\mu \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\,\partial_\nu\,, \tag{7}$$

находится в полном согласии с правилом дифференцирования сложной функции,

$$\partial_\mu' \;=\; \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \;=\; \frac{\partial x_0}{\partial x'_\mu}\,\frac{\partial}{\partial x_0} \;+\; \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_\mu}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \;=\; \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\,\partial_\nu \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\,\partial_\nu\,.$$

Ниже везде используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Соответственно, $x_0 = t$ (время), а $p_0 = E$ (энергия). Для свободной частицы выполняется релятивистское соотношение $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ (условие *массовой поверхности*). Элемент объема под знаком интеграла в трех- и четырехмерном случае обозначается $d\mathbf{p}\,(= dp_1\,dp_2\,dp_3)$, $d\mathbf{x}$, dp или dx, а трехмерная и четырехмерная δ-функция, соответственно, $\delta(\mathbf{p})$ и $\delta(p)$ или $\delta(\mathbf{x})$ и $\delta(x)$. Приняты стандартные определения типа

$$\int dx\,\delta(y-x) f(x) = f(y)\,, \quad \int d\mathbf{x}\,e^{i\mathbf{px}} = (2\pi)^3\,\delta(\mathbf{p})\,, \quad \int dp\; e^{ipx} = (2\pi)^4\,\delta(x)\,. \tag{8}$$

1. Квантовые поля

Аппарат квантовой теории поля приспособлен, в первую очередь, для расчетов физических характеристик процессов с участием элементарных частиц, протекающих при высоких (релятивистских) энергиях. Вычисляемые величины – вероятности распада, рождения или рассеяния частиц – зависят от их масс, зарядов, импульсов, проекций спинов и других параметров. Важнейшим среди исходных данных при расчете конкретного процесса является вид взаимодействия между частицами. Последовательно релятивистская схема описания взаимодействий элементарных частиц, принятая в квантовой теории поля, основана на лагранжевом подходе. Центральный объект теории – S-матрица – выражается через лагранжиан взаимодействия, который, в свою очередь, строится из квантовых полей. Каждому типу элементарных частиц, описываемых теорией, сопоставляется *квантовое поле* – операторнозначная функция (или набор из нескольких функций) от четырехмерной координаты x. В этих полях должна содержаться вся необходимая информация о свободных частицах данного типа. В нашем подходе квантовые поля трактуются как первичные объекты теории и ниоткуда не выводятся. С подробного рассмотрения всех возможных типов квантовых полей мы и начнем наше изложение.

Нейтральное скалярное поле. Наиболее прост случай нейтрального скалярного поля. Такое поле, отвечающее элементарной частице со спином 0 и без электрического заряда, представляет из себя операторнозначный трехмерный интеграл Фурье,

$$\varphi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \left(e^{-ipx} a(\mathbf{p}) + e^{ipx} a^+(\mathbf{p}) \right) . \qquad (9)$$

Как и положено скаляру, поле $\varphi(x)$ не имеет 4-индекса. Обсудим последовательно все элементы формулы (9). Величина $px = p_0 x_0 - \mathbf{px}$ – это, конечно, скалярное произведение 4-импульса p_μ на координату пространства-времени x_μ. При этом все 4 компоненты x_μ считаются независимыми, тогда как у импульса p_μ, лежащего на массовой поверхности $p^2 = m^2$, только компоненты $\{p_1, p_2, p_3\} = \mathbf{p}$ рассматриваются как независимые (по ним и осуществляется фурье-интегрирование по всему трехмерному импульсному пространству), а компонента p_0 (и в показателе экспоненты, и в знаменателе под корнем) выражается через них формулой $p_0 = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$, как энергия свободной релятивистской частицы с массой m. Именно таким путем масса соответствующей частицы, пусть и неявно, входит в выражение для поля $\varphi(x)$.

Квантовая природа поля $\varphi(x)$ целиком обусловлена наличием в нем операторов $a^+(\mathbf{p})$ и $a(\mathbf{p})$, имеющих смысл операторов рождения и уничтожения свободной частицы данного типа с (трехмерным) импульсом $\mathbf{p}$. Фактически, определением этих операторов являются их *коммутационные соотношения*

$$[a(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p}')] \;=\; \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \qquad [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] \;=\; [a^+(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p}')] \;=\; 0 . \qquad (10)$$

Операторы a, a^+ действуют в пространстве Фока, о котором пойдет речь ниже. В этом пространстве они эрмитово сопряжены друг другу, благодаря чему поле $\varphi(x)$ оказывается эрмитовым: $\varphi^+ = \varphi$.

Фактор $(2\pi)^{-3/2}$ в (9) выбран из соображений удобства, в то время как знаменатель $\sqrt{2p_0}$ играет более значимую роль, обеспечивая релятивистскую ковариантность (в данном случае – скалярность) поля $\varphi(x)$. Действительно, пользуясь известным представлением δ-функции от сложного аргумента,

$$\delta(f(x)) \;=\; \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} , \qquad f(x_n) \;=\; 0 , \qquad (11)$$

получаем

$$\int dp\ \delta(p^2-m^2)\,\Phi(p)=\int d\mathbf{p}\int dp_0\,\delta(p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2)\,\Phi(p)=\int\frac{d\mathbf{p}}{2p_0}\,(\Phi(p_0,\mathbf{p})+\Phi(-p_0,\mathbf{p}))$$

(в правой части p_0 снова означает $+\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}$). В свете этого факта можно трактовать $d\mathbf{p}/p_0$ как релятивистски инвариантную меру трехмерного интегрирования, $p_0\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ – как релятивизованную трехмерную δ-функцию, а значит, в силу (10), $\sqrt{p_0}\,a^+(\mathbf{p})$ и $\sqrt{p_0}\,a(\mathbf{p})$ можно назвать релятивизованными операторами рождения и уничтожения. Тогда и всё выражение (9) предстает в релятивистски инвариантном обличье, становясь очень похожим на результат явно выполненного интегрирования по нулевой компоненте в некотором инвариантном четырехмерном интеграле. Иными словами, поле $\varphi(x)$ (9) есть просто 'релятивизованная фурье-упаковка' для операторов $a(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p})$. Это позволит нам в дальнейшем организовать релятивистски инвариантное взаимодействие между полями, в котором на равных правах смогут участвовать частицы с любыми значениями импульсов.

Лагранжиан. Разобравшись в структуре поля (9), перейдем теперь к изучению его свойств. Очевидно, что $\varphi(x)$ удовлетворяет *уравнению Клейна-Гордона*:

$$p^2=\,m^2\qquad\Longrightarrow\qquad(\partial^2+m^2)\,\varphi(x)\;=\;0\,. \tag{12}$$

В случае классических (неоператорных) полей, это уравнение может быть получено как уравнение движения, или уравнение Лагранжа-Эйлера, из лагранжиана

$$\mathscr{L}\;=\;\frac{1}{2}\,(\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi\;-m^2\varphi^2\,)\,. \tag{13}$$

Напомним эту стандартную процедуру. Пусть задан лагранжиан $\mathscr{L}$, составленный из полей и их *первых* производных, и вариация поля $\varphi(x)\to\varphi(x)+\delta\varphi(x)$:

$$\mathscr{L}\;=\;\mathscr{L}(\varphi(x),\varphi_{,\mu}(x))\,,\qquad\varphi_{,\mu}(x)\;\equiv\;\partial_\mu\varphi(x)\,,\qquad\delta\varphi_{,\mu}\;=\;\partial_\mu(\delta\varphi)\,. \tag{14}$$

Тогда вариация *действия* $\int dx\,\mathscr{L}$ примет вид

$$\delta\int dx\,\mathscr{L}\;=\;\int dx\,\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi}\,\delta\varphi\;+\;\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{,\mu}}\,\partial_\mu\,\delta\varphi\Big)\;=\;\int dx\,\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi}\;-\;\partial_\mu\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{,\mu}}\Big)\,\delta\varphi\,. \tag{15}$$

В силу произвольности $\delta\varphi(x)$, условием экстремума действия (*принцип наименьшего действия*) будет обращение в нуль последней круглой скобки. Так уравнение (12) выводится из (13). В случае многокомпонентных полей $\varphi_a(x)$, или при наличии полей разных типов, уравнения движения записываются для каждой компоненты:

$$\partial_\mu\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\;=\;\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a}\,. \tag{16}$$

Распространяя эту идеологию на квантовые (операторнозначные) поля, мы получаем дополнительный аргумент в пользу включения в теорию фундаментального поля (9), которое является решением простого релятивистски инвариантного уравнения (12).

При выводе (15) применено интегрирование по частям с отбрасыванием граничных вкладов. Основанием для этого было обращение вариации поля в нуль на границе, характерное для вариационного исчисления. В дальнейшем, однако, подобное оправдание найдется не всегда. Например, при рассмотрении континуального интегрирования нам будет удобно записывать действие, отвечающее лагранжиану (13), в

форме $-1/2\int dx\,\varphi(x)(\partial^2+m^2)\varphi(x)$. Отличие от исходной формы – на интеграл от производной, который может быть преобразован в интеграл по границе. Поэтому имеет смысл сразу определить наше отношение к выражениям типа

$$\int dx\,\partial_\mu\Phi(x)\;\sim\;\int dx\,dp\;\partial_\mu e^{ipx}\tilde\Phi(p)\;\sim\;\int dx\,dp\;e^{ipx}p_\mu\tilde\Phi(p)\;\sim\;\int dp\;\delta(p)p_\mu\tilde\Phi(p)\,,$$

где $\tilde\Phi$ – фурье-образ Φ. Такие вклады заведомо равны нулю, если $\tilde\Phi(p)$ не сингулярно в точке $p=0$. В дальнейшем мы будем свободно применять фурье-преобразование в обе стороны, и без каких-либо оговорок пользоваться равенствами

$$\int dx\,\partial_\mu\Phi(x)\;=\;0\,,\qquad \delta(p)\,p_\mu\;=\;0\,. \tag{17}$$

Нам не встретится примеров, где это вело бы к противоречию.

Гамильтониан. Рассмотрим теперь еще одну операторнозначную функцию

$$\pi(x)\;\doteq\;\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{,0}}\;=\;\partial_0\varphi(x)\;=\;\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{p}\,\sqrt{\frac{p_0}{2}}\,\left(e^{ipx}a^+(\mathbf{p})-e^{-ipx}a(\mathbf{p})\right). \tag{18}$$

Если трактовать $\varphi(x)$ как обобщенную лагранжеву координату, то $\pi(x)$ есть канонически сопряженный ей импульс. Легко выписать и соответствующий гамильтониан:

$$\mathscr{H}\;=\;\pi\partial_0\varphi-\mathscr{L}\;=\;\frac{1}{2}\,(\pi^2+(\nabla\varphi)^2+m^2\varphi^2)\;=\;\frac{1}{2}\,(\,\partial_0\varphi\,\partial_0\varphi\;+\nabla\varphi\nabla\varphi+m^2\varphi^2\,)\,. \tag{19}$$

Для дальнейшего нам понадобятся коммутаторы операторных функций $\pi(x)$ и $\varphi(y)$, взятые при равных временах $x_0=y_0=t$:

$$[\pi(t,\mathbf{x}),\varphi(t,\mathbf{y})]\;=\;-i\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,\qquad [\pi(t,\mathbf{x}),\pi(t,\mathbf{y})]\;=\;[\varphi(t,\mathbf{x}),\varphi(t,\mathbf{y})]\;=\;0 \tag{20}$$

(первый из них обобщает известный квантовомеханический результат $[\hat p,\hat x]=-i\hbar$). Разберем вывод этих формул, начав с коммутатора

$$\begin{aligned}[\varphi(t,\mathbf{x}),\varphi(t,\mathbf{y})]\;&=\;\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}\,d\mathbf{p}}{2\sqrt{k_0p_0}}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\left(e^{-ikx+ipy}-e^{ikx-ipy}\right)\\&=\;\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}}{2k_0}\left(e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}-e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right)\;=\;0\,.\end{aligned} \tag{21}$$

На первом шаге использованы коммутационные соотношения (10); на втором учтено, что равенство $\mathbf{p}=\mathbf{k}$ влечет $p_0=k_0$, и что $x_0=y_0$; последний интеграл берется от нечетной функции и потому есть нуль. Распишем теперь первый коммутатор в (20):

$$\begin{aligned}[\pi(t,\mathbf{x}),\varphi(t,\mathbf{y})]\;&=\;\frac{-i}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{p}\,\sqrt{k_0/p_0}\;\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\left(e^{ikx-ipy}+e^{-ikx+ipy}\right)\\&=\;\frac{-i}{2(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\left(e^{i\mathbf{k}(\mathbf{y}-\mathbf{x})}+e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right)\;=\;-i\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,\end{aligned} \tag{22}$$

так как оба слагаемых в последнем интеграле дают равные вклады. *Одновременны́е коммутаторы* (20) выведены нами на основе коммутационных соотношений (10). Обратная процедура – получение (10) из постулируемых равенств (20) – называется *каноническим квантованием*.

Специальный интерес представляют коммутаторы с участием величины

$$H \;=\; \int d\mathbf{x}\,\mathscr{H} \;=\; \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}\,(\,\partial_0\varphi\,\partial_0\varphi \;+\nabla\varphi\nabla\varphi + m^2\varphi^2\,)\,, \tag{23}$$

которую мы тоже будем называть гамильтонианом, или оператором энергии. Как выясняется, гамильтониан H не зависит от времени (глубокую причину этого мы поймем позже) и может быть приведен к виду

$$H \;=\; \int d\mathbf{p}\,p_0\,a^+(\mathbf{p})\,a(\mathbf{p})\,. \tag{24}$$

Отсюда легко получаем

$$[H, a^+(\mathbf{p})] \;=\; p_0\,a^+(\mathbf{p})\,, \qquad [H, a(\mathbf{p})] \;=\; -p_0\,a(\mathbf{p})\,, \qquad [H, \varphi(x)] \;=\; -i\partial_0\varphi(x)\,. \tag{25}$$

С точки зрения квантовой механики последнее равенство означает, что поле $\varphi(x)$ находится в *гайзенберговом представлении*. Вывод формулы (24) из (23) вполне прямолинеен; опишем его словами. В отличие от (21), на промежуточном этапе возникнет либо $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})$, либо $\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p})$, но в обоих случаях результатом будет $p_0 = k_0$. Условие массовой поверхности $\mathbf{p}^2 + m^2 = p_0^2$ срабатывает трижды: для сокращение вкладов, пропорциональных $a(\mathbf{p})\,a(-\mathbf{p})$ и $a^+(\mathbf{p})\,a^+(-\mathbf{p})$ (а заодно и временно́й зависимости), и для формирования окончательного выражения в виде

$$\frac{1}{2}\int d\mathbf{p}\,p_0\,(a^+(\mathbf{p})\,a(\mathbf{p}) + a(\mathbf{p})\,a^+(\mathbf{p})) \;=\; \int d\mathbf{p}\,p_0\,a^+(\mathbf{p})\,a(\mathbf{p}) \;+\; \text{const}\,. \tag{26}$$

Появившаяся здесь (бесконечная) константа отбрасывается, чтобы сделать энергию вакуума равной нулю. К такого рода действиям – в рамках процедуры *перенормировки* – нам придется в дальнейшем прибегать неоднократно.

Пространство Фока. Операторы рождения и уничтожения, их комбинации типа (24), само поле $\varphi(x)$ и его производные – все они действуют в бесконечномерном *пространстве Фока*. Оно состоит из *вакуума* $|0>$, характеризуемого свойствами

$$a(\mathbf{p})\,|0> \;=\; 0\,, \qquad <0\,|\,a^+(\mathbf{p}) \;=\; 0\,, \qquad <0\,|0> \;=\; 1\,, \tag{27}$$

и возбуждений над ним, т. е. состояний вида

$$|\,f> \;=\; \int d\mathbf{p}\,f(\mathbf{p})\,a^+(\mathbf{p})\,|0>\,, \qquad |\,g> \;=\; \int d\mathbf{p}\,d\mathbf{k}\,g(\mathbf{p},\mathbf{k})\,a^+(\mathbf{p})\,a^+(\mathbf{k})\,|0>\,, \quad \ldots \tag{28}$$

(в более сложных теориях появятся операторы и других типов частиц). От числовых функций f, g и т. п. обычно требуют квадратичной интегрируемости, чтобы нормы соответствующих векторов состояний, типа $<f\,|\,f> = \int d\mathbf{p}\;|\,f(\mathbf{p})\,|^2$, были конечными. Однако совсем отказываться от использования состояний, скажем, $a^+(\mathbf{p})\,|0>$ или $a^+(\mathbf{p})\,a^+(\mathbf{k})\,|\,0>$, имеющих бесконечную норму $\sim \delta(\mathbf{0})$, нам было бы неудобно, ибо именно такие состояния, отвечающие частицам с определенными импульсами, фигурируют в описании процессов рассеяния. Более того, плотность частиц в таких состояниях как раз конечна. Это видно из следующего рассуждения:

$$|p> \doteq\; a^+(\mathbf{p})\,|0>\,, \qquad n \;=\; \frac{1}{V}<p|\,N\,|p> = \;\frac{1}{V}<p|p> = \;\frac{1}{V}\,\delta(\mathbf{0}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\,, \tag{29}$$

где применен *оператор числа частиц* $N = \int d\mathbf{p}\,a^+(\mathbf{p})\,a(\mathbf{p})$, а $\delta(\mathbf{0})$ выражена через 'объем всего (трехмерного) пространства' по формуле (8).

Заряженное скалярное поле. До сих пор мы излагали теорию на простейшем примере электрически нейтрального, однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$. Посмотрим, что изменится при наличии многокомпонентных (или просто разных) полей, по началу – тоже скалярных. Помимо того, что (возможно, различные) массы соответствующих частиц будут неявно присутствовать в выражениях вида (9), мы должны и явно указывать принадлежность операторов a, a^+ именно данной частице (например, для разных частиц обозначая их разными буквами). Если речь идет о частицах, составляющих единый мультиплет, достаточно просто снабдить символы полей и операторов индексом: $\varphi_i(x)$, a_i, a_i^+. Нетривиально коммутировать в этом случае будут лишь операторы a и a^+ с *одинаковым* индексом:

$$[a_i(\mathbf{p}),\, a_j^+(\mathbf{p}')] \;=\; \delta_{ij}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,. \tag{30}$$

Другой характерный способ записи принят для *заряженного* скалярного поля, точнее, пары эрмитово-сопряженных полей φ и φ^*:

$$\varphi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}}\left(e^{-ipx}a(\mathbf{p})+e^{ipx}b^+(\mathbf{p})\right)\,, \tag{31}$$

$$\varphi^*(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}}\left(e^{-ipx}b(\mathbf{p})+e^{ipx}a^+(\mathbf{p})\right)\,. \tag{32}$$

Скалярные поля φ, φ^* описывают пару частица-античастица (обе со спином 0), массы которых одинаковы, а электрические заряды равны по величине и противоположны по знаку. Можно принять, например, что операторы a, a^+ соответствуют частице, а b, b^+ – ее античастице. Перестановочные соотношения таковы:

$$[a(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{p}')] \;=\; [b(\mathbf{p}), b^+(\mathbf{p}')] \;=\; \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,, \tag{33}$$

остальные коммутаторы равны нулю. Эта закономерность сохранится и в дальнейшем: ненулевая правая часть коммутационных соотношений возможна только у операторов рождения и уничтожения одной и той же частицы (одного и того же заряда, спинового или изоспинового состояния, и т. д.) при одинаковом импульсе. В остальном, структура формул (31),(32) повторяет (9) и не требует комментариев. Добавим только, что оба поля, φ и φ^*, удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона, а лагранжиан выглядит так:

$$\mathscr{L} \;=\; \partial_\mu\varphi^*\,\partial_\mu\varphi \;-m^2\varphi^*\varphi\,. \tag{34}$$

Спинорные поля. Частицы спина 1/2 описываются *спинорными полями*. Рассмотрим заряженную частицу со спином $s = 1/2$ и массой m, а также ее античастицу, имеющую ту же массу и противоположный по знаку электрический заряд. Им соответствуют квантовые спинорные поля

$$\psi(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}}\sum_{r=1,2}\left(e^{-ipx}a_r(\mathbf{p})\,u_r(\mathbf{p})+e^{ipx}b_r^+(\mathbf{p})\,v_r(\mathbf{p})\right)\,, \tag{35}$$

$$\overline{\psi}(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}}\sum_{r=1,2}\left(e^{-ipx}b_r(\mathbf{p})\,\overline{v}_r(\mathbf{p})+e^{ipx}a_r^+(\mathbf{p})\,\overline{u}_r(\mathbf{p})\right)\,. \tag{36}$$

Как и раньше, $p^2 = m^2$, $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$. Разберем последовательно все новые элементы, появившиеся в этих формулах по сравнению со случаем скалярных полей. Операторы a_r^+ и a_r рождают и уничтожают частицу (например, электрон), а b_r^+

и b_r – античастицу (позитрон). Индекс r со значениями 1,2 соответствует двум возможным спиновым состояниям ($s_z = \pm 1/2$) частицы спина 1/2 (суммирование не по 4-индексам мы будем указывать явно). Таким образом, пара полей $\psi, \overline{\psi}$ содержит 4 различных оператора рождения и столько же операторов уничтожения.

Перестановочные соотношения для операторов a_r, a_r^+, b_r, b_r^+, в отличие от (33), формулируются в терминах *антикоммутаторов* $[A,B]_+ \doteq AB + BA$:

$$[a_r(\mathbf{p}), a_s^+(\mathbf{p}')]_+ \;=\; [b_r(\mathbf{p}), b_s^+(\mathbf{p}')]_+ \;=\; \delta_{rs}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,, \tag{37}$$

$$[a_r(\mathbf{p}), b_s(\mathbf{p}')]_+ \;=\; [a_r^+(\mathbf{p}), b_s^+(\mathbf{p}')]_+ \;=\; [a_r(\mathbf{p}), b_s^+(\mathbf{p}')]_+ \;=\; [a_r^+(\mathbf{p}), b_s(\mathbf{p}')]_+ \;=\; 0\,, \tag{38}$$

$$[a_r(\mathbf{p}), a_s(\mathbf{p}')]_+ \;=\; [a_r^+(\mathbf{p}), a_s^+(\mathbf{p}')]_+ \;=\; [b_r(\mathbf{p}), b_s(\mathbf{p}')]_+ \;=\; [b_r^+(\mathbf{p}), b_s^+(\mathbf{p}')]_+ \;=\; 0\,. \tag{39}$$

Подчеркнем, что равенство нулю антикоммутатора (в отличие от коммутатора) не делает правило перестановки соответствующих операторов тривиальным: замена их порядка ведет к смене знака, $a_r b_s^+ = -b_s^+ a_r$, и т. п. Этим обеспечивается *ферми-статистика* частиц полуцелого спина – *фермионов*. Для частиц целого спина – *бозонов* – характерны коммутационные соотношения вида (33), т. е. *бозе-статистика*. Следствием соотношений (37)–(39) является, в частности, *принцип Паули* – невозможность существования состояния, содержащего две одинаковые по всем параметрам (включая импульсы) фермионные частицы, ибо

$$a_r^+(\mathbf{p})\, a_r^+(\mathbf{p}) \;=\; \frac{1}{2}\,[a_r^+(\mathbf{p}), a_r^+(\mathbf{p})]_+ \;=\; 0\,. \tag{40}$$

Второй важной особенностью полей спина 1/2 является их спинорная природа. А именно, как сами поля ψ и $\overline{\psi}$, так и входящие в правые части (35), (36) величины u_r, $\overline{u}_r$, v_r, $\overline{v}_r$, являются (четырехкомпонентными) *спинорами* – специальными наборами из четырех числовых функций. Поведение спиноров при преобразований Лоренца (5) мы обсудим позже. Для полноты записи следовало бы снабдить спинорные величины соответствующими индексами, пробегающими 4 значения, скажем, $\psi(x) \equiv \{\psi_\alpha(x)\}$, $\alpha = 1,2,3,4$. Но поскольку эти индексы не тождественны лоренцевым 4-индексам, то во избежание путаницы и для облегчения записи их, как правило, не выписывают явно. Вместо этого принято (мысленно) представлять $\psi(x)$ в виде столбца (а $\overline{\psi}(x)$ – в виде строки) из четырех числовых функций, и аналогично для u_r и v_r. Такая практика имеет и свои издержки – например, запись $\overline{u}\,u$ обозначает число, равное $\sum_{\alpha=1}^4 \overline{u}_\alpha u_\alpha$, тогда как запись $u\,\overline{u}$ подразумевает матрицу 4×4 с элементами $u_\alpha \overline{u}_\beta$, след которой равен как раз этому числу:

$$\overline{u}\,u \;=\; \sum_{\alpha=1}^4 \overline{u}_\alpha\, u_\alpha \;=\; \sum_{\alpha=1}^4 u_\alpha\, \overline{u}_\alpha \;=\; \mathrm{tr}\,(u\,\overline{u})\,, \qquad \overline{v}\,v \;=\; \mathrm{tr}\,(v\,\overline{v})\,. \tag{41}$$

Свойства спиноров и γ-матриц. Для того, чтобы полностью охарактеризовать поля $\psi(x)$ и $\overline{\psi}(x)$, нам осталось дать определение спиноров u, $\overline{u}$, v и $\overline{v}$. Они определяются как решения уравнений

$$(\hat{p}-m)u_r(\mathbf{p}) \;=\; 0\,, \qquad \overline{u}_r(\mathbf{p})(\hat{p}-m) \;=\; 0\,, \tag{42}$$

$$(\hat{p}+m)v_r(\mathbf{p}) \;=\; 0\,, \qquad \overline{v}_r(\mathbf{p})(\hat{p}+m) \;=\; 0\,, \tag{43}$$

нормированные условиями

$$\overline{u}_r(\mathbf{p})\, u_s(\mathbf{p}) \;=\; -\overline{v}_r(\mathbf{p})\, v_s(\mathbf{p}) \;=\; 2m\,\delta_{rs}\,. \tag{44}$$

Выражение $\hat{p} \pm m$ есть общепринятое упрощение записи $\hat{p} \pm m\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – единичная 4×4-матрица. Сам символ $\hat{p}$ означает

$$\hat{p} \doteq p_\mu \gamma_\mu = p_0\gamma_0 - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2 - p_3\gamma_3 , \tag{45}$$

а $\gamma_\mu = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ – это *матрицы Дирака*, четыре числовые матрицы размера 4×4, играющие исключительно важную роль в математическом описании спинорных полей. Они удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2\, g_{\mu\nu}\, \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \gamma_0^2 = \mathbf{1}, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -\mathbf{1}. \tag{46}$$

Другие немедленные следствия (по повторяющимся 4-индексам – суммирование!):

$$\hat{a} \doteq a_\mu\gamma_\mu \quad \Longrightarrow \quad \hat{a}\hat{a} = a_\mu a_\nu \gamma_\mu\gamma_\nu = \frac{1}{2}\, a_\mu a_\nu(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = a_\mu a_\mu = a^2 , \tag{47}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\mu = 4, \quad \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu = -2\,\gamma_\nu , \quad \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu = 4\, g_{\alpha\beta}, \quad \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\mu = -2\,\gamma_\lambda\gamma_\beta\gamma_\alpha . \tag{48}$$

Например, второе равенство в (48) выводится так:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu = -\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\mu + 2\, g_{\mu\nu}\,\gamma_\mu = (-4+2)\,\gamma_\nu = -2\,\gamma_\nu . \tag{49}$$

Из (47) с учетом $p^2 = m^2$ получаем $(\hat{p} - m)(\hat{p} + m) = 0$. Значит, матрицы $(m \pm \hat{p})/2m$ являются ортогональными проекторами с суммой, равной единице. Это, в частности, доказывает, что каждое из уравнений (42),(43) имеет ровно два линейно независимых решения, в соответствии с числом значений индекса r.

Явный вид γ-матриц может быть выбран различным образом, но нам он не понадобится: достаточно будет определяющих соотношений (46) и общей формулы эрмитова сопряжения

$$\gamma_\mu^+ = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_0^+ = \gamma_0, \quad \gamma_1^+ = -\gamma_1, \quad \gamma_2^+ = -\gamma_2, \quad \gamma_3^+ = -\gamma_3 . \tag{50}$$

С помощью этой же матрицы γ_0 *дираковски сопряженные* спиноры выражаются в терминах эрмитово сопряженных (сопряжение превращает столбцы в строки):

$$\overline{\psi} = \psi^+\gamma_0, \qquad \overline{u} = u^+\gamma_0, \qquad \overline{v} = v^+\gamma_0 . \tag{51}$$

Убедимся, что этот рецепт согласован с (42),(43). Например, сопрягая эрмитово первое равенство из (42), простыми выкладками получаем второе равенство:

$$0 = u_r^+(\mathbf{p})(\gamma_\mu^+ p_\mu - m) = \overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma_0(\gamma_\mu^+ p_\mu - m) = \overline{u}_r(\mathbf{p})(\hat{p} - m)\gamma_0 .$$

Отметим также одну весьма важную комбинацию γ-матриц, получившую специальное обозначение

$$\gamma_5 \doteq i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 , \quad [\gamma_\mu, \gamma_5]_+ = 0, \quad \gamma_5^2 = \mathbf{1}, \quad \gamma_5^+ = \gamma_5 . \tag{52}$$

Нам понадобятся формулы для следов от произведений γ-матриц. Начнем с

$$\mathrm{tr}\,\gamma_\mu = \mathrm{tr}\,\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5 = \mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 = -\,\mathrm{tr}\,\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5 = -\,\mathrm{tr}\,\gamma_\mu = 0 \tag{53}$$

(циклическая перестановка под знаком tr не меняет общего знака, а коммутация γ_5 с γ_μ меняет). Этим же приемом доказывается важный факт: след *любого нечетного* числа γ-матриц равен нулю. Легко выводятся формулы и для четных произведений:

$$\mathrm{tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = 4\, g_{\mu\nu}, \qquad \mathrm{tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta = 4\,(g_{\mu\nu}\, g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}\, g_{\nu\alpha}), \tag{54}$$

$$\mathrm{tr}\,\gamma_5 = 0, \qquad \mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu = 0, \qquad \mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta = -\,4\,i\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{55}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – полностью антисимметричный тензор пространства Минковского, нормированный условием $\varepsilon_{0123} = 1$.

Явный вид спиноров u и v нам не будет нужен, чего нельзя сказать про некоторые их свойства. Так, из определений (42)–(44) вытекают полезные соотношения

$$\overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma_\mu u_s(\mathbf{p}) \;=\; \overline{v}_r(\mathbf{p})\gamma_\mu v_s(\mathbf{p}) \;=\; 2p_\mu\delta_{rs}\,, \tag{56}$$

$$\overline{u}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) \;=\; \overline{v}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) \;=\; \overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma_5 u_s(\mathbf{p}) \;=\; \overline{v}_r(\mathbf{p})\gamma_5 v_s(\mathbf{p}) \;=\; 0\,, \tag{57}$$

$$\overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma_0 v_s(-\mathbf{p}) \;=\; \overline{v}_r(\mathbf{p})\gamma_0 u_s(-\mathbf{p}) \;=\; 0\,. \tag{58}$$

Для их вывода обычно применяется следующий характерный прием:

$$\begin{aligned} m\,\overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma_\mu u_s(\mathbf{p}) \;&=\; \overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma_\mu\hat{p}\,u_s(\mathbf{p}) \;=\; \overline{u}_r(\mathbf{p})(-\hat{p}\,\gamma_\mu + 2p_\mu)\,u_s(\mathbf{p}) \\ &=\; -m\,\overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma_\mu u_s(\mathbf{p}) + 2p_\mu\overline{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) \;=\; -m\,\overline{u}_r(\mathbf{p})\gamma_\mu u_s(\mathbf{p}) + 4mp_\mu\delta_{rs} \end{aligned} \tag{59}$$

(по очереди использованы оба равенства (42) – сначала для u, а потом и для $\overline{u}$). Еще два важных соотношения связаны с суммированием по спиновым состояниям:

$$\sum_{r=1,2} u_r(\mathbf{p})\,\overline{u}_r(\mathbf{p}) \;=\; \hat{p} + m\,, \qquad \sum_{r=1,2} v_r(\mathbf{p})\,\overline{v}_r(\mathbf{p}) \;=\; \hat{p} - m\,. \tag{60}$$

Выведем, например, первое. Его левая часть есть матрица, след которой в силу (41) и (44) равен $4m$. Умножение же ее на $\hat{p} - m$ (слева или справа) вследствие (42) дает нуль. Этих сведений достаточно для проверки равенства (60).

В уравнениях (42),(43) использована принятая нами матричная форма записи: не выписаны явно индексы ни у матриц Дирака, ни у спиноров. При этом важно правильно располагать такого рода объекты: спиноры-строки $\overline{u}, \overline{v}$ ставятся слева от матриц, а спиноры-столбцы u, v – справа. На самом деле, при конкретных значениях r и s, каждое из соотношений (42),(43) представляет собой 4 отдельных равенства, а (44) – одно. Подчеркнем, что порядок расположения сомножителей (матриц, строк, столбцов) в спинорных формулах важен *только* в силу выбранной нами безындексной формы записи, тогда как отдельные компоненты спиноров и матриц Дирака – это обычные числа, коммутирующие друг с другом (в отличие от операторов рождения и уничтожения, которые, конечно, нельзя просто так переставлять). Можно еще сказать, что операторнозначное поле ψ является спинором (столбцом) только за счет элементов u и v, а оператором – только за счет a и b^+ (аналогично для поля $\overline{\psi}$).

Определения спиноров в форме условий (42),(43) выбраны для того, чтобы уравнением движения для полей $\psi(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ оказалось знаменитое уравнение Дирака

$$(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \;=\; 0\,, \qquad i\partial_\mu\overline{\psi}(x)\gamma_\mu + m\overline{\psi}(x) \;=\; 0\,. \tag{61}$$

Интересно, что его прямым следствием является знакомое нам уравнение Клейна-Гордона, $-(i\hat{\partial} + m)(i\hat{\partial} - m)\psi = (\partial^2 + m^2)\psi = 0$, справедливое, таким образом, и для спинорных полей. Лагранжиан спинорного поля записывают двояким образом:

$$\mathscr{L} \;=\; i\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi \;=\; \frac{i}{2}(\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\overline{\psi}\gamma_\mu\psi) - m\,\overline{\psi}\psi\,. \tag{62}$$

Первая форма проще для запоминания, а вторая приятнее тем, что в нее поля $\psi(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ входят симметрично.

Векторные поля. Частицы со спином 1 описываются *векторными* полями. Сначала приведем выражения для квантовых полей U_μ, U^*_μ, отвечающих свободной заряженной частице со спином 1 и массой, не равной нулю. У такой частицы три состояния поляризации (проекции спина), поэтому

$$U_\mu(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \sum_{n=1,2,3} e^n_\mu(\mathbf{p}) \left(e^{-ipx}\, a_n(\mathbf{p}) + e^{ipx}\, b^+_n(\mathbf{p}) \right) , \tag{63}$$

$$U^*_\mu(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}} \sum_{n=1,2,3} e^n_\mu(\mathbf{p}) \left(e^{-ipx}\, b_n(\mathbf{p}) + e^{ipx}\, a^+_n(\mathbf{p}) \right) . \tag{64}$$

Здесь $a^+_n(\mathbf{p})$ и $a_n(\mathbf{p})$ рождают (уничтожают) частицу, а $b^+_n(\mathbf{p})$ и $b_n(\mathbf{p})$ – соответствующую античастицу, в состоянии поляризации n и с импульсом $\mathbf{p}$. Как обычно, $p^2 = m^2,\ p_0 = +\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Коммутационные соотношения – типичные для бозонов:

$$[a_n(\mathbf{p}),\, a^+_l(\mathbf{p}')] \;=\; \delta_{nl}\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \qquad [b_n(\mathbf{p}),\, b^+_l(\mathbf{p}')] \;=\; \delta_{nl}\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') . \tag{65}$$

Три *вектора поляризации* $e^n_\mu(\mathbf{p})$ выбираются вещественными, ортонормированными 4-векторами, ортогональными импульсу p_μ:

$$e^n_\mu(\mathbf{p})\, e^l_\mu(\mathbf{p}) \;=\; -\delta_{nl} , \qquad p_\mu\, e^n_\mu(\mathbf{p}) \;=\; 0 . \tag{66}$$

Полезную формулу *суммирования по поляризациям*

$$\sum_{n=1,2,3} e^n_\mu(\mathbf{p})\, e^n_\nu(\mathbf{p}) \;=\; -(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}) \tag{67}$$

можно вывести так: обозначая левую часть через $\Delta_{\mu\nu}$ и принимая для нее анзац вида $\Delta_{\mu\nu} = A g_{\mu\nu} + B p_\mu p_\nu$, из условий (66) находим

$$0 \;=\; p_\mu\, \Delta_{\mu\nu} \;=\; (A + m^2 B)\, p_\nu , \quad -3 \;=\; \Delta_{\mu\mu} \;=\; 4A + m^2 B \quad \Longrightarrow \quad A = -1 , \quad B = 1/m^2 .$$

Поля (63),(64) удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона и дополнительному *условию поперечности*,

$$(\partial^2 + m^2)\, U_\mu(x) \;=\; (\partial^2 + m^2)\, U^*_\mu(x) \;=\; 0 , \qquad \partial_\mu\, U_\mu(x) \;=\; \partial_\mu\, U^*_\mu(x) \;=\; 0 , \tag{68}$$

которые можно получить (оба сразу) из лагранжиана

$$\mathscr{L} \;=\; -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu U^*_\nu - \partial_\nu U^*_\mu\right) \left(\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu\right) \,+\, m^2\, U^*_\mu\, U_\mu \ . \tag{69}$$

Действительно, применяя общий рецепт (16), приходим к

$$-\,\partial_\mu (\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu) \;=\; m^2\, U_\nu . \tag{70}$$

Действуя на это равенство производной ∂_ν, получаем $\partial_\nu U_\nu = 0$; подстановка этого соотношения обратно в (70) дает $(\partial^2 + m^2)\, U_\nu = 0$. Условие поперечности необходимо для уменьшения числа независимых компонент 4-векторов U_μ, U^*_μ до трех, в соответствии со значением спина.

Поля (63) и (64) эрмитово сопряжены друг другу. Поле для нейтральной частицы спина 1 с ненулевой массой получится из них отождествлением b_n с a_n и U^*_μ с U_μ.

А вот квантовое описание *безмассовой* нейтральной частицы со спином 1 (фотона) требует введения специального поля – *электромагнитного*:

$$A_\mu(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}}\; e^\lambda_\mu(\mathbf{p}) \left(e^{-ipx} a_\lambda(\mathbf{p}) + e^{ipx} a^+_\lambda(\mathbf{p}) \right) . \tag{71}$$

Это поле эрмитово. Четыре вещественных 4-вектора поляризации $e^\lambda_\mu(\mathbf{p})$ нумеруются 4-индексом $\lambda = 0,1,2,3$, для которого принята договоренность (1) о суммировании. Справедливы следующие соотношения ортогональности:

$$e^\lambda_\mu(\mathbf{p})\, e^\lambda_\nu(\mathbf{p}) \;=\; g_{\mu\nu}\,, \qquad e^\lambda_\mu(\mathbf{p})\, e^\nu_\mu(\mathbf{p}) \;=\; g_{\lambda\nu}\,. \tag{72}$$

Масса фотона равна нулю, поэтому $p^2 = 0$, $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2} = |\mathbf{p}|$ и $\partial^2 A_\mu = 0$. В системе, где $\mathbf{p}$ направлен вдоль третьей оси, то есть $p_\mu = (p_0, 0, 0, p_0)$, векторы $e^\lambda_\mu(\mathbf{p})$ можно выбрать в виде $e^0_\mu = (1,0,0,0)$ – *временна́я* поляризация, $e^1_\mu = (0,1,0,0)$ и $e^2_\mu = (0,0,1,0)$ – *поперечная* поляризация, и $e^3_\mu = (0,0,0,1)$ – *продольная* поляризация.

Операторы рождения и уничтожения фотонов удовлетворяют бозонным коммутационным соотношениям

$$[a_\lambda(\mathbf{p}),\, a^+_\nu(\mathbf{p}')] \;=\; -g_{\lambda\nu}\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\,. \tag{73}$$

Необычным здесь является знак минус в правой части. Он, однако, с учетом (2) превращается в итоговый + для значений $\lambda = 1,2,3$, оставаясь минусом только для $\lambda = 0$. Эта необычность есть отражение некоторой нестандартности всей теории квантового электромагнитного поля – квантовой электродинамики (КЭД). Необходимые разъяснения будут даны позже, в ходе изложения калибровочной симметрии; там же будет приведен и лагранжиан поля $A_\mu(x)$. Пока же будем использовать 4-векторное поле $A_\mu(x)$ с ковариантным по форме коммутатором (73) и четырьмя состояниями поляризации, из которых только $\lambda = 1,2$ соответствуют физически наблюдаемым (поперечным) поляризациям реальных фотонов. Как мы увидим, в окончательных выражениях для наблюдаемых величин вклады от временны́х ($\lambda = 0$) и продольных ($\lambda = 3$) фотонов взаимно сокращаются. Поэтому "неправильный" знак коммутатора при $\lambda = 0$ не должен нас тревожить: это издержки принятого способа действий, в остальном очень удобного.

На этом мы завершаем перечисление фундаментальных квантовых полей, ибо именно поля, приведенные выше, составляют необходимый набор для расчетов физических процессов в рамках общепринятых моделей элементарных частиц. На самом деле, поля в таких моделях могут нести дополнительные индексы, отвечающие новым квантовым числам (цвет, flavour, и т. д.), но это нисколько не осложнит работу с ними. Для описания безмассовых частиц спина 1/2 (нейтрино) новых полей не вводят: вместо этого применяют проекционные операторы вида $1 \pm \gamma_5$. Наконец, в неабелевых калибровочных теориях (например, в КХД) приходится вводить в рассмотрение фиктивные 'частицы' – *госты*. Но ввиду того, что они не присутствуют в реальных состояниях, а появляются лишь виртуально, внутри диаграмм Фейнмана, для них не потребуется собственного операторнозначного квантового поля.

2. Теория возмущений

Главной формулой всей квантовой теории поля является соотношение

$$\mathscr{M} \;= <\mathrm{out}|S\,|\mathrm{in}>\,, \qquad\qquad S \;=\; T\exp\left(i\int dx\,\mathscr{L}_I(\varphi(x))\right)\,, \tag{74}$$

выражающее амплитуду $\mathscr{M}$ некоторого физического процесса через матричный элемент S-матрицы, а ее, в свою очередь – через T-экспоненту от лагранжиана взаимодействия $\mathscr{L}_I$. Лагранжианы взаимодействия строятся из квантовых полей, уже изученных нами (примеры – ниже), а операция T расставляет эти поля в порядке убывания временно́го аргумента x_0. Сразу возникают три вопроса: откуда взялась эта формула; как вычислить T-экспоненту и матричные элементы от нее; как перейти от амплитуд к вероятностям и сечениям процессов. Имеет смысл сначала рассмотреть последний вопрос: он лежит несколько в стороне от основной линии изложения, и, дав ответ на него, мы к этой тематике можем больше не возвращаться. Ответ на первый вопрос будет краток: формулу (74) мы считаем постулатом квантовой теории поля. Тем не менее, ради полноты будет приведено беглое сравнение с другими подходами. Наконец, развернутый ответ на второй вопрос составит содержание всего остального текста данного пособия.

Амплитуда и вероятность. Из квантовой теории рассеяния известно, что вероятность W перехода из начального состояния в конечное пропорциональна квадрату модуля матричного элемента S-матрицы (унитарного оператора перехода) между этими состояниями. С учетом нормировки,

$$W_{\alpha\to\beta} \;=\; N_1\ldots N_s\,\frac{|<\beta\,|S\,|\,\alpha>|^2}{<\beta\,|\,\beta><\alpha\,|\,\alpha>}\,, \tag{75}$$

где s – число (пучков) частиц в начальном состоянии $|\,\alpha>$, а N_i – количество частиц в i-ом пучке. Действительно, если $\{|\,\beta>\}$ – полный набор ортогональных состояний, то следствием унитарности S-матрицы является соотношение

$$<\alpha\,|\,\alpha> = <\alpha\,|S^+S\,|\,\alpha> = \sum_\beta \frac{<\alpha\,|S^+|\,\beta><\beta\,|S\,|\,\alpha>}{<\beta\,|\,\beta>} \;= \sum_\beta \frac{|<\beta\,|S\,|\,\alpha>|^2}{<\beta\,|\,\beta>}\,,$$

а значит суммарная (по всем β) вероятность перехода при $N_1 = \ldots = N_s = 1$ окажется равной единице, как и должно быть: при наличии ровно одного экземпляра каждой из взаимодействующих частиц процесс состоится лишь один раз, и со стопроцентной вероятностью даст какой-то результат.

Перейдем к реальным $|\mathrm{in}>$ и $|\mathrm{out}>$ состояниям. Пусть

$$|\,\mathrm{in}> \;=\; a^+(\mathbf{p}_1)\ldots a^+(\mathbf{p}_s)|\,0>\,, \qquad |\,\mathrm{out}> \;=\; a^+(\mathbf{p}'_1)\ldots a^+(\mathbf{p}'_r)|\,0>\;. \tag{76}$$

Полагая $|\,\alpha> = |\,\mathrm{in}>$ и рассуждая в духе (29), получим

$$<\alpha\,|\,\alpha> \;=\; \frac{V^s}{(2\pi)^{3s}}\,, \qquad W_{\alpha\to\beta} \;=\; (2\pi)^{3s}\,n_1\ldots n_s\,\frac{|<\beta\,|S\,|\,\mathrm{in}>|^2}{<\beta\,|\,\beta>}\;. \tag{77}$$

Отметим, что *бесконечные* полные количества частиц N_i заменились на *конечные* пространственные плотности соответствующих пучков. Но положить теперь, по аналогии, и $|\,\beta> = |\,\mathrm{out}>$ было бы не совсем правильно, ибо вероятность *точного* попадания в заданный импульс, очевидно, равна нулю. Поэтому будем сначала считать,

что в r-частичном конечном состоянии $|\,\beta>$ импульсы частиц могут лежать внутри инфинитезимального $3r$-мерного элемента импульсного пространства вокруг среднего значения, отвечающего состоянию $|\,\mathrm{out}>$:

$$|\,\beta> \simeq\ d\mathbf{p}'_1 \ldots d\mathbf{p}'_r\,|\,\mathrm{out}>\,, \qquad <\beta\,|\,\beta> =\ d\mathbf{p}'_1 \ldots d\mathbf{p}'_r\,. \tag{78}$$

В обозначениях (28) это соответствовало бы функции $g(\mathbf{p}'_1 \ldots \mathbf{p}'_r)$, равной единице внутри бесконечно малого $3r$-мерного импульсного объема и нулю вне его. Итак,

$$W_{\alpha\to\beta} \ =\ (2\pi)^{3s}\, n_1 \ldots n_s\ |<\mathrm{out}\,|S\,|\,\mathrm{in}>|^2\ d\mathbf{p}'_1 \ldots d\mathbf{p}'_r\,. \tag{79}$$

Уточним теперь определение (74) для амплитуды:

$$<\mathrm{out}\,|\,S-1\,|\,\mathrm{in}>_R =\ i(2\pi)^4\,\delta(\Sigma\,p)\ \mathscr{M}\,, \qquad |\,p>_R =\ (2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}\,a^+(\mathbf{p})|\,0>\,, \tag{80}$$

то есть матричный элемент предлагается брать между *релятивизованными* состояниями типа $|\,p>_R$. Это гарантирует релятивистскую инвариантность амплитуды $\mathscr{M}$ и заодно исключает из нее рутинные множители $(2\pi)^{-3/2}(2p_0)^{-1/2}$, характерные для квантовых полей. Кроме того, из амплитуды превентивно выделена δ-функция от алгебраической суммы 4-импульсов всех частиц, участвующих в данном процессе: она реализует закон сохранения энергии-импульса. В левой части (80) из S-матрицы вычтен единичный оператор. Так обычно делается, чтобы учитывать только переходы *за счет взаимодействия*. Окончательная формула для *дифференциальной* вероятности перехода, отнесенной к единице времени и к единице объема, имеет вид

$$dw \ =\ \frac{W_{\alpha\to\beta}}{VT} \ =\ (2\pi)^4\,\delta(\Sigma\,p)\ \frac{n_1 \ldots n_s}{2E_1 \ldots 2E_s}\,|\mathscr{M}\,|^2 \prod_{j=1}^{r} \frac{d\mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2E'_j}\ . \tag{81}$$

Здесь E_i и E'_j – соответствующие энергии: $p = (p_0,\,\mathbf{p}) = (E,\,\mathbf{p})$. Четырехмерная δ-функция из (80) при возведении в квадрат была обработана по следующей схеме:

$$\delta(\Sigma\,p)\,\delta(\Sigma\,p) \ =\ \delta(\Sigma\,p)\,\delta(0) \ =\ \delta(\Sigma\,p)\,\frac{VT}{(2\pi)^4}\,. \tag{82}$$

В конкретных ситуациях применения формулы (81) δ-функция из нее, конечно, исчезнет (вместе с четырьмя из $3r$ дифференциалов) после того, как закон сохранения 4-импульса будет учтен в явном виде.

К сказанному можно добавить следующее: если пучки начальных частиц не поляризованы, а поляризации конечных частиц не измеряются, то для нахождения вероятности процесса следует *усреднить* квадрат амплитуды по начальным поляризациям и *просуммировать* по конечным. В таких случаях под $|\mathscr{M}|^2$ в (81) должно пониматься соответствующее просуммированное и усредненное по проекциям спинов выражение. Дальнейшее рассмотрение возможных приложений формулы (81) потребовало бы более детальной информации о характере процесса (распад частицы, рассеяние и т. п.) и, как правило, было бы связано с переходом к определенной системе отсчета. Соответствующие выкладки (вычисление *фазового объема*) представляют собой, по сути, упражнения в релятивистской кинематике. Для целей изучения теории поля они менее интересны и поэтому в данном пособии опущены.

T-экспонента. Возвратимся теперь к формуле (74). С этого момента основным объектом нашего внимания станет ее второе равенство. Несколько упрощая, можно пояснить его структуру следующим образом: лоренц-инвариантность лагранжиана гарантирует релятивистскую инвариантность теории, его эрмитовость вкупе с экспоненциальной формой оператора S обеспечивают унитарность, а T-упорядочение – причинность (будущее не может влиять на прошлое). Наиболее последовательный подход к обоснованию ключевой формулы (74) состоит в наложении требований релятивистской инвариантности, унитарности и причинности на S-матрицу, взятую в виде формального ряда по степеням лагранжиана взаимодействия. Удовлетворяет всем этим ограничениям именно выражение (74), правда, с точностью до некоторого остаточного произвола, который нам еще пригодится на этапе перенормировки. Упомянем также известный способ 'вывода' формулы (74) из квантовомеханических соображений в рамках *представления взаимодействия*. Вводится *оператор эволюции* $S(t,t')$ такой, что $S = S(\infty,-\infty)$. Он удовлетворяет уравнению $\partial_t S(t,t') = -iH(t)S(t,t')$ (где H – гамильтониан взаимодействия), решением которого при постоянном H было бы $e^{-i(t-t')H}$, при числовой функции $H(t)$ – соответственно, $\exp(-i\int_{t'}^{t} du H(u))$, а при операторнозначном гамильтониане $H(t)$, значения которого могут не коммутировать при разных временах, возникает T-упорядоченная экспонента. Далее, замена $H(t)$ на $-\mathscr{L}_I(\varphi(x))$ приводит к (74).

Какого бы взгляда на проблему обоснования формулы (74) мы ни придерживались (автор предпочитает брать ее в качестве постулата), главной задачей все равно остается явное вычисление матричных элементов оператора S. Прежде всего отметим, что экспонента в (74) *всегда* понимается только как формальный ряд по специально введенным в $\mathscr{L}_I$ параметрам – константам связи, имеющим смысл силы взаимодействия между соответствующими частицами. Поэтому результатами квантовополевых расчетов будут, как правило, лишь несколько первых членов ряда *теории возмущений*, которые нам и приходится сравнивать с экспериментом (и удивляться, что при этом нередко получается весьма впечатляющее согласие).

Приведем простые примеры лагранжианов взаимодействия:

$$g\varphi^3 \qquad h\varphi^4 \qquad g\varphi\,\overline{\psi}\psi \qquad e\,\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \tag{83}$$

Последний случай отвечает КЭД, причем e – это заряд электрона. Остальные константы связи обозначены произвольно. Лоренц-инвариантность и эрмитовость двух первых лагранжианов очевидна, а для остальных будет доказана позже. Лагранжианы реалистических моделей (КХД, Стандартная модель) существенно сложнее. Фактически, в данном курсе они нам не понадобятся. Вообще, лагранжиан взаимодействия может состоять из любого числа слагаемых, причем каждое из них должно содержать не менее трех полей.

Чтобы завершить начальный этап знакомства с формулой (74), нам осталось уточнить определение операции T-упорядочения, или T-*произведения* квантовых полей. В простейшем случае двух (любых) полей

$$TA_1(x)A_2(y) \;=\; \theta(x_0-y_0)\,A_1(x)A_2(y) \pm \theta(y_0-x_0)\,A_2(y)A_1(x) \tag{84}$$

или, в явной записи,

$$TA_1(x)A_2(y) \;=\; \begin{cases} A_1(x)A_2(y) & \text{при} \quad x_0 > y_0\,, \\ \pm A_2(y)A_1(x) & \text{при} \quad y_0 > x_0\,, \end{cases} \tag{85}$$

где знак минус отвечает T-произведению двух фермионных полей; во всех остальных случаях (перестановка бозона с фермионом или бозоном) ставится знак плюс.

Соответственно, T-упорядочение любого числа полей выполняется так:

$$TA_1(x_1)\dots A_n(x_n) \;=\; (-)^\sigma A_{i_1}(x_{i_1})\dots A_{i_n}(x_{i_n}) \quad \text{при } x^0_{i_1} > \dots > x^0_{i_n}\,. \tag{86}$$

Знаковый множитель $(-)^\sigma$ в (86) накапливается при перестановках *фермионных* полей между собой в ходе T-упорядочения (σ – число таких перестановок). Из (86), в частности, следует, что *под знаком* T-произведения операторы можно свободно переставлять – меняется лишь общий знак при каждой перестановке фермионов между собой, т. е. как если бы поля точно коммутировали либо антикоммутировали:

$$TA_1(x)A_2(y) \;=\; \pm TA_2(y)A_1(x)\,. \tag{87}$$

Заметим, что в само́м определении T-произведения заложен источник некоторых трудностей квантовой теории поля: операция T, по сути, не определена при совпадении аргументов полей. Этот факт, как выяснится, имеет самое прямое отношение к проблеме ультрафиолетовых расходимостей и перенормировок.

Вакуумные средние от T-произведений. Рассмотрим общую схему вычисления матричного элемента S-матрицы на примере скалярного поля (9) и $\mathscr{L}_I = g\varphi^3$. Возьмем начальное и конечное состояния в форме (76). Тогда вклад n-ого порядка теории возмущений имеет характерный вид *вакуумного среднего*

$$\frac{i^n g^n}{n!} <0\,|a(\mathbf{p}'_1)\dots a(\mathbf{p}'_r)\int dx_1\dots dx_n\; T\varphi^3(x_1)\dots\varphi^3(x_n)\; a^+(\mathbf{p}_1)\dots a^+(\mathbf{p}_s)|\,0> \tag{88}$$

от выражения, содержащего конечное число операторов a и a^+ (часть из них – внутри полей φ). От всех этих операторов можно избавиться за конечное число шагов. Для этого надо последовательно перетаскивать операторы a направо, а a^+ – налево, используя соотношения (10) и (27). Ясно, что все ненулевые слагаемые оставшегося числового выражения будут обязаны своим происхождением δ-функции из правой части первого равенства (10). Действительно, если бы *все* коммутаторы в (10) были равны нулю, то и результат вычисления (88) был бы таким же.

Обратим внимание, что при раскрытии формулы (88) упомянутая δ-функция может появиться как результат нетривиальной коммутации операторов рождения и уничтожения в двух различных ситуациях: когда один из них принадлежит полю φ, а другой – in- или out-состоянию, либо когда оба оператора находятся внутри полей. Казалось бы, есть и третья возможность: получить δ-функцию за счет перестановки in- и out-операторов между собой. Однако такие вклады (частица пролетела мимо, фактически не провзаимодействовав с мишенью) принято исключать; этой же цели служит и вычитание единицы из S-оператора в (80). Ход событий в первом случае понятен из явного вида соответствующих коммутаторов:

$$[a(\mathbf{p}),\varphi(x)] \;=\; \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}}\,, \qquad [a^+(\mathbf{p}),\varphi(x)] \;=\; -\frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}}\,. \tag{89}$$

Приведем также типичные (анти)коммутаторы для других полей, например,

$$[a_r(\mathbf{p}),\overline{\psi}(x)]_+ \;=\; \frac{e^{ipx}\,\overline{u}_r(\mathbf{p})}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}}\,, \qquad [a_\lambda(\mathbf{p}),A_\mu(x)] \;=\; -\frac{e^{ipx}\,e^\lambda_\mu(\mathbf{p})}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_0}}\,. \tag{90}$$

Общий вывод очевиден для всех типов квантовых полей сразу: перестановка оператора с полем порождает, во-первых, стандартные множители $(2\pi)^{-3/2}(2p_0)^{-1/2}$, уже

обсужденные в контексте формулы (80), во-вторых – экспоненциальные факторы $e^{\pm ipx}$, и в-третьих – спиноры или поляризационные векторы (в случае скалярных полей им соответствует просто единица).

Увидеть сразу результат коммутации операторов, находящихся внутри полей, не столь легко из-за T-упорядочения. Но естественно предположить (мы проверим это ниже), что результат должен быть универсален для данного типа полей. Если это так, то найти его можно, рассмотрев (сначала для скалярных полей) простейший случай – вакуумное среднее от T-произведения (или *свертку*) двух полей

$$\varphi\overline{(x)\varphi(y)} \;\doteq\; <0\,|\,T\varphi(x)\varphi(y)\,|\,0> \;=\; -iD^c(x-y)\,. \tag{91}$$

Эту важнейшую для всей теории функцию называют также *причинной* функцией Грина, или *пропагатором* скалярного поля, и обозначают D^c. Для удобства дальнейших вычислений будем иногда разбивать квантовые поля (любого типа) на два слагаемых, $A(x) = A^+(x) + A^-(x)$, например,

$$\varphi^+(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}}\,e^{ipx}a^+(\mathbf{p})\,,\qquad \varphi^-(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}}\,e^{-ipx}a(\mathbf{p})\,. \tag{92}$$

По определению, в A^+ содержатся только операторы рождения, а в A^- – только уничтожения. Введем вспомогательные функции

$$D^-(x-y) \;\doteq\; i\,[\varphi^-(x),\varphi^+(y)] \;=\; i<0\,|\varphi(x)\varphi(y)\,|\,0> \;=\; \frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{p}}{2p_0}\,e^{-ip(x-y)}\,, \tag{93}$$

$$D(x-y) \;\doteq\; i\,[\varphi(x),\varphi(y)] \;=\; D^-(x-y) - D^-(y-x)\,,\qquad D(-x) \;=\; -D(x)\,. \tag{94}$$

Из (12) и (20) вытекают их свойства

$$(\partial^2+m^2)D^-(x) \;=\; (\partial^2+m^2)D(x) \;=\; 0\,,\qquad D(0,\mathbf{x}) \;=\; 0\,,\qquad \partial_0 D(0,\mathbf{x}) \;=\; \delta(\mathbf{x})\,. \tag{95}$$

Теперь для свертки (91) из (84) и (93) находим явное выражение

$$\varphi\overline{(x)\varphi(y)} \;=\; -i\,\theta(x_0-y_0)D^-(x-y) - i\,\theta(y_0-x_0)D^-(y-x)\,. \tag{96}$$

Для D^c получаем, соответственно,

$$D^c(x) \;=\; \theta(x_0)D^-(x) + \theta(-x_0)D^-(-x) \;=\; D^c(-x)\,. \tag{97}$$

Ввиду очевидного $<0\,|\varphi(x)\varphi(y)\,|\,0> = <0\,|\varphi^-(x)\varphi^+(y)\,|\,0>$ можно записать D^c так:

$$D^c(x-y) \;=\; i\,\theta(x_0-y_0)\,<0\,|\varphi^-(x)\varphi^+(y)\,|\,0> \;+\; i\,\theta(y_0-x_0)\,<0\,|\varphi^-(y)\varphi^+(x)\,|\,0>\;.$$

Отсюда становится понятно, почему D^c называют причинной функцией: рождение частицы в обоих слагаемых происходит раньше, чем ее уничтожение. Другой иллюстрацией причинности является факт обращения $D(x)$ в нуль при $x^2 < 0$, что означает, согласно (94), полную независимость полей в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом. Доказательство упомянутого факта требует более тщательного анализа свойств функции $D(x)$. Впрочем, его еще можно понять и так: в третьем равенстве формулы (95) $x^2 = -\mathbf{x}^2 < 0$, а функция $D(x)$ 'почти' лоренц-инвариантна, т. е. зависит (с небольшими оговорками) только от x^2.

Пропагаторы. Полученные нами выражения (96),(97) для свертки и пропагатора скалярного поля можно привести к более удобному виду. Для этого подействуем дифференциальным оператором Клейна-Гордона на равенство (97):

$$
\begin{aligned}
(\partial^2+m^2)D^c(x) \;&=\; \theta(x_0)(\partial^2+m^2)D^-(x) \;+\; \theta(-x_0)(\partial^2+m^2)D^-(-x) \\
+\; 2\,\partial_0\theta(x_0)\,\partial_0 D^-(x) \;&+\; \partial_0^2\theta(x_0)\cdot D^-(x) \;+\; 2\,\partial_0\theta(-x_0)\,\partial_0 D^-(-x) \;+\; \partial_0^2\theta(-x_0)\cdot D^-(-x) \\
&=\; 2\,\delta(x_0)\,(\partial_0 D^-(x)-\partial_0 D^-(-x)) \;+\; \partial_0\delta(x_0)(D^-(x)-D^-(-x)) \\
&=\; \delta(x_0)\,\partial_0 D(x)+\partial_0(\,\delta(x_0)D(x)\,) \;=\; \delta(x_0)\,\delta(\mathbf{x}) \;=\; \delta(x)\,. \qquad (98)
\end{aligned}
$$

Мы использовали (94), (95) и соотношение $\theta'=\delta$. Итак, $D^c(x)$ есть функция Грина оператора Клейна-Гордона ∂^2+m^2. Значит, ее четырехмерный фурье-образ должен быть пропорционален $(m^2-p^2)^{-1}$. Но надо учесть, что функция Грина определена неоднозначно, с точностью до решений однородного уравнения (Клейна-Гордона). Точное фурье-представление для $D^c(x)$,

$$
D^c(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{dp\;e^{-ipx}}{m^2-p^2-i0}\;, \qquad (99)
$$

найдем из сопоставления с (97): бесконечно малая добавка в знаменателе при интегрировании по p_0 задает обходы полюсов, расположенных в точках $p_0=\pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$; знак величины x_0 указывает, в какой полуплоскости – верхней или нижней – можно замкнуть контур, после чего интеграл по p_0 сводится к вычету в одном из полюсов, равному как раз правой части (93). Добавим, что в интеграле (99) фурье-переменная p, конечно, не связана условием $p^2=m^2$, т.е. *не находится* на массовой поверхности.

Приведем теперь выражения для сверток всех известных нам типов квантовых полей (у заряженного и нейтрального скалярных полей свертки не различаются):

$$
<0\,|\,T\varphi(x)\varphi^*(y)\,|\,0> \;=\; \frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{dp\;e^{-ip(x-y)}}{p^2-m^2+i0} \;=\; -iD^c(x-y)\,, \qquad (100)
$$

$$
<0\,|\,T\psi(x)\,\overline{\psi}(y)\,|\,0> \;=\; \frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{dp\;e^{-ip(x-y)}\,(\hat{p}+m)}{p^2-m^2+i0} \;=\; (\hat{\partial}_x-im)D^c(x-y)\,, \qquad (101)
$$

$$
<0\,|\,T\,U_\mu(x)\,U^*_\nu(y)\,|\,0> \;=\; \frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{dp\;e^{-ip(x-y)}(g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu/m^2)}{p^2-m^2+i0}\,, \qquad (102)
$$

$$
<0\,|\,TA_\mu(x)A_\nu(y)\,|\,0> \;=\; \frac{-i}{(2\pi)^4}\int\frac{dp\;e^{-ip(x-y)}\,g_{\mu\nu}}{p^2+i0}\,. \qquad (103)
$$

Свертки полей одинакового заряда по понятным причинам равны нулю, например,

$$
<0\,|\,T\varphi^*(x)\varphi^*(y)\,|\,0> \;=\; <0\,|\,T\psi(x)\,\psi(y)\,|\,0> \;=\; <0\,|\,T\,U_\mu(x)\,U_\nu(y)\,|\,0> \;=\; 0\,, \qquad (104)
$$

и уж совсем очевидно обращение в нуль сверток полей разных типов. Схема вывода формул (100)–(103) такова: исходим из определения (84) для T-произведения; возникающая от перестановки операторов δ-функция снимает одно из трехмерных импульсных интегрирований; далее надо (кроме случая скалярных полей) использовать равенства (60), (67) и (72); наконец, сравниваем результат при каждом знаке разности x_0-y_0 с соответствующим интегралом по dp, как при выводе (99).

Нормальное упорядочение. Завершая рассмотрение вакуумных средних от произведений двух полей, введем важное понятие *нормального упорядочения* (или *нормального произведения*). Эта операция, обозначаемая парой двоеточий, применяется к произведениям любых объектов, содержащих операторы рождения и уничтожения, действует только на сами эти операторы, и расставляет их в *нормальном*

порядке, т. е. в таком, когда все операторы рождения стоят в произведении левее операторов уничтожения, например,

$$: a_1 a_2^+ a_3 a_4 a_5^+ a_6 a_7^+ : \; = \; \pm a_2^+ a_5^+ a_7^+ a_1 a_3 a_4 a_6 \,, \tag{105}$$

$$: A(x)A(y) : \; = \; A^+(x)A^+(y) + A^-(x)A^-(y) + A^+(x)A^-(y) \pm A^+(y)A^-(x) \,. \tag{106}$$

Как и в (86), знак плюс соответствует четному, а минус – нечетному числу сделанных при этом перестановок ферми-операторов между собой. Аналогично случаю T-произведения или свертки, под знаком нормального произведения операторы можно переставлять, меняя лишь общий знак при каждой перестановке двух фермионов. Нетрудно убедиться, что для скалярных полей выполнены следующие равенства:

$$\varphi(x)\varphi(y) - : \varphi(x)\varphi(y) : \; = \; [\varphi^-(x), \varphi^+(y)] \; = \; <0\,|\varphi(x)\varphi(y)\,|\,0> \; = \; -iD^-(x-y) \,, \tag{107}$$

$$T\varphi(x)\varphi(y) - : \varphi(x)\varphi(y) : \; = \; \varphi\overline{(x)\varphi(y)} \; = \; <0\,|T\varphi(x)\varphi(y)\,|\,0> \; = \; -iD^c(x-y) \,. \tag{108}$$

Аналогичные соотношения справедливы и для остальных типов квантовых полей.

Теорема Вика. Теперь мы достаточно подготовлены, чтобы существенно продвинуться к нашей главной цели на данном этапе – получению удобного рецепта раскрытия выражений типа (88). Выше было обещано, что результаты перестановок операторов, входящих в состав полей, удастся представить в терминах функций вида (91), (100)–(103), то есть попарных сверток. Иными словами, мы предполагали существование некого общего правила, обобщающего равенство (108) на случай любого числа полей. Такое правило носит название *теоремы Вика* и формулируется так:

$$TA_1 \ldots A_n \; = \; \sum (-)^\sigma \; \overline{A_{i_1} A}_{i_2} \ldots \overline{A_{i_{k-1}} A}_{i_k} \; : A_{i_{k+1}} \ldots A_{i_n} : \tag{109}$$

Сумма берется по всем возможным выборкам попарных сверток полей $A_1 \ldots A_n$, а значит, k может быть любым *четным* числом $0 \le k \le n$. В правой части (109) обязательно есть слагаемое вообще без сверток ($k = 0$), и, если n четное, могут быть слагаемые, в которых все поля попарно свернуты. Поля, не вошедшие под знак свертки, помещены под знак нормального произведения. Множитель $(-)^\sigma$, как всегда, набирается за счет антикоммутативности фермионных полей. При этом надо учитывать *все* различия порядка следования полей в записи левой части (109) и правой, *прочитанной подряд*, без деления на сверточную и нормально упорядоченную.

В основе доказательства теоремы Вика лежит следующее простое наблюдение: переход от $TA_1 \ldots A_n$ к $: A_1 \ldots A_n :$ в силу свойства $A = A^+ + A^-$ потребует, в конечном итоге, перестановки (каких-то) компонент каждого поля с каждым, что и приведет к появлению вкладов от попарных коммутаторов в любых возможных наборах. Специфика T-упорядочения на это не сильно влияет, так как можно сначала доказать теорему для фиксированного порядка временны́х аргументов полей, обобщив попутно и (107) по образцу (109) – только вместо сверток будут входить функции $-iD^-$, которые потом, с помощью θ-функций, соберутся в нужные нам $-iD^c$. Структура каждого слагаемого формулы (109) тоже прозрачна: под знак нормального произведения входят целиком поля, оставшиеся вне сверток, а не их отдельные $A^\pm$-компоненты, поскольку нетривиальные (дающие D^-) правые части коммутаторов для этих полей при формировании данного слагаемого не работали: иначе эти поля присутствовали бы в свертках. А при тривиальных коммутациях $A^\pm$-компоненты ведут себя одинаково и в итоге снова складываются в поле A.

Правила Фейнмана. Подстановка формулы Вика (109) в (88) радикальным образом упрощает ситуацию, ведь остающиеся в правой части (109) нормально упорядоченные поля могут далее участвовать только в (анти)коммутаторах с in- и out-операторами, порождая вклады вида (89),(90), поскольку друг с другом эти поля переставлять уже не надо. В целом, процесс вычисления матричного элемента (80) выглядит теперь так: разложение экспоненты в (бесконечный) ряд теории возмущений по степеням $\mathscr{L}_I$ приводит к вакуумным средним вида (88); применение теоремы Вика разбивает каждое из них на конечную сумму вкладов, в которых операторнозначные поля остаются только под знаком нормального произведения (поскольку свертки – это числовые функции), причем ненулевой результат могут дать лишь такие вклады, в которых количество и тип полей под знаком : : соответствует типу и общему числу частиц в in- и out-состояниях; (анти)коммутация полей с операторами, задающими эти состояния, по рецептам (89),(90) и учет условия $<0\,|\,0>=1$ приводят к тому, что операторов, как и вакуумных обкладок, в наших выражениях вообще не остается; подстановка фурье-представлений (100)–(103) для сверток и интегрирование по всем dx устраняет все экспоненты, заменяя их на δ-функции от сумм 4-импульсов; наконец, эти δ-функции и интегралы по dp в основном (хотя и не полностью) истребляют друг друга.

Что же получилось в итоге? Несложные соображения и подсчеты позволяют сформулировать ответ на этот вопрос в форме исключительно полезных *правил Фейнмана*. Часть этих правил можно представить (мысленно или на бумаге) в виде еще более знаменитых *диаграмм Фейнмана*. Действительно, описанная выше процедура включает три основных типа объектов, которые можно изобразить графически. Во-первых, лагранжиан: он (точнее, каждое его слагаемое) представляет собой произведение нескольких полей, которое изображают в виде *вершины* – точки, из которой расходятся линии, отвечающие каждому полю. Линии бывают двух сортов – *внутренние* (они соответствуют сверткам и соединяют вершины) и *внешние*, отвечающие тем полям, которые были под знаком нормального произведения и затем коммутировали с in- и out-операторами: эти линии выходят (из вершин) вовне, ни с чем более не соединяясь. Принято рисовать линии для разных типов полей по разному: сплошными, пунктирными, волнистыми и т. д. Линии заряженных полей снабжают стрелками, указывающими направление движения *частиц*; античастицы движутся *против стрелок*. В итоге, каждому отдельному слагаемому вычисляемого выражения (на этапе после применения теоремы Вика и выполнения перестановок полей с внешними операторами) ставится в соответствие диаграмма, число вершин в которой равно порядку теории возмущений, а число внешних линий – суммарному числу частиц в начальном и конечном состояниях (число же внутренних линий может быть разным). Каждой диаграмме отвечает определенное алгебраическое выражение, к описанию которого мы и переходим.

По построению, матричный элемент S-матрицы (74) является некоторой функцией от импульсов начальных и конечных частиц. Каждый из этих импульсов лежит на (своей) массовой поверхности $p_a^2 = m_a^2$ (m_a – масса данной частицы), а их алгебраическая сумма должна быть равна нулю. Выражающая этот факт (сохранение 4-импульса) δ-функция, заранее вставленная в формулу (80), возникает от того, что каждое интегрирование по dx порождает четырехмерную δ-функцию – закон сохранения импульса в каждой вершине. В итоге получается, что по каждой линии диаграммы, как внутренней, так и внешней, протекает определенный 4-импульс, причем в вершинах, а значит и во всем процессе в целом, он сохраняется. Некоторое уточнение: если диаграмма (как картинка) состоит из отдельных кусков, не связанных

между собой, то закон сохранения 4-импульса будет выполняться для каждого такого куска. Мы, впрочем, убедимся ниже, что несвязные диаграммы, как правило, не представляют самостоятельного интереса. Следует еще добавить, что наличие в диаграмме замкнутых циклов, или *петель*, приводит к тому, что в окончательном выражении не все интегрирования по dp снимаются δ-функциями: их останется ровно столько, сколько в диаграмме независимых циклов. Такие внутренние импульсы интегрирования, конечно же, не лежат на массовой поверхности.

Перечислим теперь вклады в амплитуду $\mathscr{M}$, вносимые различными элементами диаграмм. Как ясно из (89), внешним линиям скалярных полей (нейтральных и заряженных) следует сопоставить просто число 1, ибо множители $(2\pi)^{-3/2}(2p_0)^{-1/2}$ уже учтены в (80). В случае спинорных или векторных полей войдут еще и спиноры $(u, v, \ldots)$ либо векторы поляризации $(e^n_\mu,\, e^\lambda_\mu)$. Конкретно, спинорной частице (например, электрону) в начальном состоянии, имеющей импульс $\mathbf{p}$ и поляризацию r, сопоставляется вклад от внешней линии, равный $u_r(\mathbf{p})$; такой же частице в конечном состоянии – вклад $\overline{u}_r(\mathbf{p})$; соответствующей античастице (позитрону) в начальном состоянии — $\overline{v}_r(\mathbf{p})$, а в конечном — $v_r(\mathbf{p})$. Внешним линиям векторных частиц всегда сопоставляется их вектор поляризации, $e^\lambda_\mu(\mathbf{p})$ либо $e^n_\mu(\mathbf{p})$.

Внутренним линиям полей ставятся в соответствие подынтегральные выражения (без экспонент) из (100)–(103). Отдельное замечание касается фермионного пропагатора (101). Если записывать его с явным указанием спинорных индексов, то порядок полей под сверткой можно было бы менять,

$$<0\,|\,T\,\psi_\alpha\overline{\psi}_\beta|\,0> \;=\; -\,<0\,|\,T\,\overline{\psi}_\beta\psi_\alpha|\,0> \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{i(\hat{p}+m\cdot\mathbf{1})_{\alpha\beta}}{p^2-m^2}\,. \tag{110}$$

Удобнее, однако, использовать матричную (строчную, столбцовую) форму записи, приводя все фермионные свертки к виду (101), вследствие чего в диаграммах с фермионными замкнутыми петлями возникает дополнительный знак минус для каждой фермионной петли, так как соответствующая перестановка спинорных полей всегда нечетна. Добавим к этому, что след от произведений γ-матриц, неизбежно возникающий в такого рода петлях, берется против стрелок.

Вклад в амплитуду от конкретной вершины определяется видом соответствующего слагаемого в лагранжиане взаимодействия. Попросту говоря, надо взять всё, кроме полей (ибо их вклады уже учтены выше): константы связи, матрицы типа γ_μ, если они имеются в данном слагаемом, и т. п. Кроме того, если в $\mathscr{L}_I$ есть производные ∂_μ, то в импульсном представлении они проявятся в виде множителей ip_μ, где p — 4-импульс, выходящий из данной вершины. Пожалуй, наименее автоматическим действием при работе с диаграммами Фейнмана является нахождение общего нормировочного фактора и знака перед ним. Не вдаваясь в обсуждение существующих здесь методов, основанных на анализе симметрии диаграмм относительно взаимных перестановок элементов, заметим только, что числовой коэффициент и знак нетрудно, как правило, отследить из теоремы Вика.

В итоге, по диаграмме Фейнмана строится алгебраическое выражение, представляющее собой произведение описанных выше ингредиентов, соответствующих всем графическим элементам данной диаграммы. Помимо своей вычислительной полезности, диаграммы Фейнмана могут служить также и своего рода наглядной картиной происходящих взаимодействий между частицами. При этом надо, конечно, иметь в виду, что внутренние линии диаграмм интерпретируются как распространение *виртуальных* частиц с квадратом 4-импульса, не обязательно равным квадрату массы соответствующей реальной частицы.

Суммирование по поляризациям. Амплитуда $\mathscr{M}$, вычисленная по диаграммам Фейнмана, является релятивистским инвариантом (лоренцевым скаляром). Все лоренцевы 4-индексы, появлявшиеся в процессе составления этого выражения по правилам Фейнмана, свертываются друг с другом. К дополнительным упрощениям полученных выражений приводит суммирование (или усреднение) по возможным спиновым состояниям. Начнем с векторных полей. Пусть, например, в конечном или начальном состоянии имеется фотон с поляризацией λ. Тогда амплитуда $\mathscr{M}$ может быть представлена в виде $\mathscr{M} = \mathscr{N}_\mu\, e^\lambda_\mu$. После взятия квадрата модуля, суммирования по физическим значениям $\lambda = 1, 2$ (и учета взаимного сокращения нефизических вкладов от $\lambda = 0, 3$), а также применения формулы (72), получим выражение

$$\sum_{\lambda=1,2} |\mathscr{M}|^2 \;=\; \sum_{\lambda=1,2,3} |\mathscr{M}|^2 - |\mathscr{M}|^2_{\lambda=0} \;=\; -\mathscr{N}_\mu \mathscr{N}^*_\nu e^\lambda_\mu e^\lambda_\nu \;=\; -\mathscr{N}_\mu \mathscr{N}^*_\mu\,, \tag{111}$$

не содержащее векторов поляризации. Аналогично, с использованием (67), обрабатываются амплитуды процессов с участием массивных векторных полей. Здесь суммирование сразу осуществляется только по (трем) физическим поляризациям.

В случае фермионов удается похожим образом исключить спиноры из квадратов модулей квантовых амплитуд, просуммированных по проекциям спинов. Если, например, $\mathscr{M} = \overline{u}_r(\mathbf{p}) N v_s(\mathbf{q})$, где N — 4×4-матрица, то учитывая

$$\mathscr{M}^* \;=\; \mathscr{M}^+ \;=\; (u^+\gamma_0 N v)^+ \;=\; v^+ N^+ \gamma_0 u \;=\; \overline{v}\gamma_0 N^+ \gamma_0 u \tag{112}$$

и применяя свойства спиноров (60) и (41), приходим к

$$\begin{aligned}\sum_{r,s=1,2} |\mathscr{M}|^2 \;&=\; \sum_{r,s=1,2} \overline{u}_r(\mathbf{p})\, N\, v_s(\mathbf{q})\, \overline{v}_s(\mathbf{q})\, \gamma_0\, N^+ \gamma_0\, u_r(\mathbf{p}) \\ &=\; \mathrm{tr} \sum_{r=1,2} u_r(\mathbf{p})\, \overline{u}_r(\mathbf{p})\, N\, (\hat{q} - m)\, \gamma_0\, N^+ \gamma_0 \;=\; \mathrm{tr}\left((\hat{p} + m)\, N\, (\hat{q} - m)\, \gamma_0\, N^+ \gamma_0\right). \end{aligned} \tag{113}$$

Для упрощения правой части может быть использовано соотношение

$$\gamma_0 (\gamma_\mu \ldots \gamma_\nu)^+ \gamma_0 \;=\; \gamma_\nu \ldots \gamma_\mu\,, \tag{114}$$

вытекающее из (50).

В этом месте следует подвести некоторые итоги. Накопленных нами знаний по квантовой теории поля уже достаточно для вычисления амплитуд и вероятностей процессов в низшем порядке теории возмущений (в так называемом *борновском* приближении) при том условии, что лагранжиан взаимодействия включает поля только изученных нами типов, и что он полиномиален по этим полям. Препятствием, мешающим продвижению в следующие порядки, оказываются упоминавшиеся выше интегралы по внутренним импульсам – они, как правило, расходятся, приводя к бессмысленным бесконечным результатам. Другим пробелом нашего изложения было пока что полное игнорирование важнейшего аспекта теории безмассовых векторных полей – присущей им калибровочной симметрии. На устранение указанных недостатков и решение возникающих при этом проблем теперь и будет, в основном, направлено наше внимание. В частности, это потребует существенного развития формализма, чему и посвящена следующая глава.

3. Континуальный интеграл

Производящие функционалы. Рассмотрим вакуумное среднее

$$Z(J) = <0|\, T\exp\Big(i\int dx\,[\mathscr{L}_I(\varphi(x)) + \varphi(x)J(x)]\Big)\,|0> \equiv <0|\, Te^{i(\mathscr{L}_I(\varphi)+\varphi J)}|0> \ . \quad (115)$$

Здесь $J(x)$ – функциональный аргумент, который принято называть *источником*. Для каждого типа полей используется свой источник, снабженный соответствующими индексами. Источник не содержит никаких операторов, и служит нам просто как параметр разложения в формальные функциональные ряды. Источники фермионных полей считаются антикоммутирующими функциями. Сокращенную запись без явного указания интеграла, как в правой части (115), мы будем часто применять в дальнейшем. Сравним выражение (115) с матричным элементом вида (74). В диаграммном представлении для первого из них отсутствуют внешние линии (поскольку in- и out-состояния пусты), зато появился новый элемент диаграммной техники – источник J (точнее, его формальный фурье-образ $\tilde{J}(p)$) – и, соответственно, новые диаграммы, в которых некоторые из внутренних линий соединяют вершину с источником, а иногда – два источника друг с другом. Все такого рода линии нам будет удобнее впредь называть внешними. Очевидно, что *любая* диаграмма из разложения (74) найдет свой прототип в (115), только вместо вкладов от внешних линий появятся структуры типа $\int dp\,\tilde{J}(p)/(p^2 - m^2 + i0)$ и ей подобных. Формальный (и произвольный) характер аргумента J и его фурье-образа позволяет вообще опустить здесь интегрирование по p и сопоставлять диаграммы из (74), где внешним линиям соответствуют спиноры и т. п., диаграммам из (115), в которых на этих местах стоят источники, помноженные на пропагаторы. Замена одного на другое не представляет труда. Можно заключить, что *производящий функционал* $Z(J)$ (115) аккумулирует всю информацию, заложенную в (74), кроме информации о конкретных in- и out-состояниях. Последняя может быть легко добавлена (а фурье-образы источников, соответственно, стерты), и мы восстановим вклад любой диаграммы из (74) по ее прообразу из (115). Все это позволит нам в дальнейшем сосредоточиться на изучении объектов типа (115), то есть чистых вакуумных средних от T-произведений, забывая про in- и out-состояния (76).

Работа с производящими функционалами требует использования *вариационных производных*. Идея, лежащая в основе этого понятия, совершенно прозрачна:

$$\frac{\partial}{\partial J_y}\sum_x \varphi_x\, J_x \ = \ \varphi_y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\delta}{\delta J(y)}\int dx\,\varphi(x)\,J(x) \ = \ \varphi(y)\,. \quad (116)$$

В качестве базовых определений можно взять

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}\,J(x) \ = \ \delta(x-y)\,, \qquad \frac{\delta}{\delta J(y)}\,(A\,B) \ = \ (\frac{\delta}{\delta J(y)}\,A)\,B + A\,\frac{\delta}{\delta J(y)}\,B\,, \quad (117)$$

откуда легко выводится второе равенство в (116) и другие полезные соотношения,

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}\int dx\,F(J(x)) \ = \ F'(J(y))\,, \qquad \frac{\delta}{\delta J(y)}\,e^{i\int dx\,\varphi(x)J(x)} \ = \ i\varphi(y)\,e^{i\int dx\,\varphi(x)J(x)}\,. \quad (118)$$

В принципе, здесь может возникнуть вопрос о порядке следования операторов в получающихся выражениях. К счастью, в нашем случае правые части (118) обязательно будут под знаком T-произведения, и вопрос снимается. Второе равенство в

(118) приводит к весьма важным и интересным следствиям:

$$<0|\,T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\,e^{i(\mathscr{L}_I(\varphi)+\varphi J)}|0> \;=\; (-i)^n\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\dots\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\,Z(J)\,, \tag{119}$$

$$Z(J) \;=\; \exp\big[\,i\int dy\,\mathscr{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J(y)})\,\big]\;<0|\,T\exp\big(i\int dx\,\varphi(x)J(x)\big)|0>\;. \tag{120}$$

Соотношение (119) показывает, что поля φ под знаком T-произведения в такого рода выражениях можно порождать варьированием по J. Но тогда и весь лагранжиан $\mathscr{L}_I(\varphi)$ может быть сгенерирован подобным образом – так мы приходим к формуле (120). Ее можно еще упростить, вычислив вакуумное среднее в правой части. Разложим экспоненту в ряд и применим теорему Вика. Вклад $2n$-ого порядка сводится к n-ой степени единственной возможной диаграммы – два источника, соединенные пропагатором. Нечетные порядки вкладов не дают. Комбинаторный фактор формируется из тейлоровского коэффициента $1/(2n)!$ и числа возможностей свернуть попарно $2n$ полей, равного $(2n-1)(2n-3)\dots3\cdot1=(2n)!/2^n n!$. В итоге имеем

$$<0|\,Te^{i\varphi J}|0> =\; \exp\big(\,\frac{i}{2}\int dx\,dy\,J(x)D^c(x-y)J(y)\,\big) \;\equiv\; \exp(\,\frac{i}{2}JD^cJ)\,, \tag{121}$$

$$Z(J) \;=\; \exp\big[\,i\mathscr{L}_I(-i\,\frac{\delta}{\delta J})\,\big]\;\exp(\,\frac{i}{2}JD^cJ)\,. \tag{122}$$

Формула (122) дает компактную запись всего ряда теории возмущений, со всеми ее диаграммами. При этом, конечно, для каждого типа полей необходим свой источник.

Связные и сильносвязные диаграммы. Разложение исходного выражения (115) в формальный ряд по J приводит к

$$Z(J) \;=\; \sum_n\frac{i^n}{n!}\int dx_1\dots dx_n\,Z_n(x_1\dots x_n)\,J(x_1)\dots J(x_n)\,, \tag{123}$$

где коэффициентные функции Z_n даются выражением (119), взятым при $J=0$. Их называют *n-хвостками*, поскольку вакуумное среднее (119) при $J=0$ состоит из всевозможных диаграмм (без источников) с n внешними линиями, отвечающими сверткам полей $\varphi(x_i)$ с полями из $\mathscr{L}_I$. Производящий функционал $Z(J)$ порождает все диаграммы данной теории, в том числе и несвязные. Оказывается, выделить *связные* диаграммы очень легко – их порождает функционал $W(J)$:

$$Z(J) \;=\; e^{W(J)}\,,\qquad W(J) \;=\; \sum_n\frac{i^n}{n!}\int dx_1\dots dx_n\,W_n(x_1\dots x_n)\,J(x_1)\dots J(x_n)\,. \tag{124}$$

Доказательство этого факта чисто комбинаторное – оно основано на сравнении числовых факторов соответствующих диаграмм и соображениях симметрии. Примером такого доказательства в простой ситуации является вывод формулы (121). Алгебраически, несвязная диаграмма является произведением своих связных компонент. Поэтому неудивительна та фундаментальная роль, которую в общем диаграммном анализе играют функционал $W(J)$ и связные n-хвостки W_n.

Во многих случаях (теория перенормировок, спонтанное нарушение симметрии) весьма важными оказываются и так называемые *сильносвязные*, они же *одночастично неприводимые* диаграммы, которые нельзя сделать несвязными разрезанием одной линии. В составе исходной теории возмущений таких диаграмм сравнительно

мало: в терминологии (123) все они должны быть 0-хвостками (хотя не все 0-хвостки сильносвязны!), а все их линии – внутренними, ибо присутствие даже одной внешней линии исключает сильную связность. В n-хвостках же с $n > 0$ сильносвязными могут оказаться не сами диаграммы, а лишь отдельные их подграфы, полученные стиранием всех внешних и некоторых из внутренних линий. Иными словами, разложение по J плохо приспособлено для генерации сильносвязных диаграмм. Поэтому введем новый, альтернативный источнику J, функциональный аргумент

$$\Phi(x) \doteq \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J(x)} = \frac{i}{Z} <0|\, T\varphi(x)\, e^{i(\mathscr{L}_I(\varphi)+\varphi J)}|0> . \qquad (125)$$

Очевидно, Φ есть связная 1-хвостка, или вакуумное среднее поля φ *в присутствии* источника J. Для упрощения дальнейших формул примем, что 1-хвостка *в отсутствие* источника, т. е. $W_1(x)$, равна нулю. Тогда $\Phi(x) = -\int dy\, W_2(x,y)\, J(y) + \mathcal{O}(J^2)$ и, значит, любой из двух введенных нами функциональных аргументов можно, при желании, трактовать как независимый, а другой – разлагать в формальный ряд по нему: $\Phi(J)$ либо $J(\Phi)$. Теперь мы можем определить производящий функционал для сильносвязных диаграмм, применяя преобразование Лежандра,

$$\Gamma(\Phi) \doteq W - \int dx\, J(x)\, \Phi(x) = \sum_n \frac{i^n}{n!}\int dx_1 \ldots dx_n\, \Gamma_n(x_1 \ldots x_n)\, \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\,, \quad (126)$$

и стандартным образом вывести формулу, дуальную к (125):

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi(y)} = \int dx\, \frac{\delta W}{\delta J(x)}\,\frac{\delta J(x)}{\delta\Phi(y)} - \int dx\, \frac{\delta J(x)}{\delta\Phi(y)}\,\Phi(x) - J(y) = -J(y)\,. \qquad (127)$$

Выпишем также выражения для взаимных вариаций функциональных аргументов,

$$\frac{\delta\Phi(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W}{\delta J(y)\,\delta J(x)} \equiv W_{yx}\,, \qquad \frac{\delta J(x)}{\delta\Phi(y)} = -\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Phi(y)\,\delta\Phi(x)} \equiv -\Gamma_{yx}\,. \qquad (128)$$

Правило замены вариационной переменной в этой сокращенной записи выглядит так:

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} \equiv \delta^J_y = \int dx\, \frac{\delta^2 W}{\delta J(y)\,\delta J(x)}\,\delta^\Phi_x \equiv W_{yx}\,\delta^\Phi_x\,, \qquad \delta^\Phi_y = -\Gamma_{yx}\,\delta^J_x\,. \qquad (129)$$

Из него, в частности, вытекает соотношение

$$\delta(x-y) = \frac{\delta\Phi(x)}{\delta\Phi(y)} = -\Gamma_{yz}\,\delta^J_z\Phi(x) = -\Gamma_{yz}W_{zx}\,, \qquad (130)$$

показывающее, что вторые вариации W_{xy} и Γ_{xy} взаимно обратны. Этот результат, верный в присутствии J и Φ, конечно, останется в силе и при их занулении: $\int dz\,\Gamma_2(y,z)W_2(z,x) = -\delta(x-y)$. На диаграммном языке связная двуххвостка W_2 дается суммой геометрической прогрессии,

$$iW_2 = D^c + D^c\Sigma D^c + D^c\Sigma D^c\Sigma D^c + \ldots = \frac{D^c}{1-\Sigma D^c} = \frac{1}{(D^c)^{-1}-\Sigma} = -i\Gamma_2^{-1}\,, \quad (131)$$

представляя собой итерации сильносвязного ядра Σ. В случае треххвостки

$$0 = \delta^J_u\,\delta(x-y) = -\,\delta^J_u\,(W_{xz}\Gamma_{zy}) = -W_{uxz}\Gamma_{zy} - W_{xz}W_{uv}\Gamma_{vzy}\,, \qquad (132)$$

а значит $W_{uxt} = W_{xz}W_{uv}W_{yt}\Gamma_{vzy}$. Полагая $J = \Phi = 0$, убеждаемся, что связная треххвостка W_3 содержит сильносвязное ядро Γ_3, к которому крепятся три связных двуххвостки W_2, в полном согласии с диаграммной интуицией. Мы ограничимся этими иллюстрациями и не будем приводить полного доказательства сильной связности всех коэффициентных функций производящего функционала (126).

Континуальный интеграл. Вернемся к исходному определению (115) производящего функционала $Z(J)$ и перепишем его в форме символического интеграла по φ:

$$Z(J) \;=\; <0|\,T e^{i(\mathscr{L}_I(\varphi)+\varphi J)}|0> \;=\; \int \mathscr{D}\varphi\; e^{i(\mathscr{L}_0(\varphi)+\mathscr{L}_I(\varphi)+\varphi J)}\,. \qquad (133)$$

В показателе экспоненты, как и раньше, подразумевается интегрирование по dx, причем экспонента правой части содержит наряду с лагранжианом взаимодействия $\mathscr{L}_I$ еще и свободный лагранжиан $\mathscr{L}_0$. С такими лагранжианами мы уже встречались в (13), (62) и (69). Но самое интересное в формуле (133) другое: если под знаком вакуумного среднего символ φ означал операторнозначное поле типа, скажем, (9), то в правой части φ есть просто переменная интегрирования. По сути, в *континуальном интеграле* (133) поле $\varphi(x)$ становится таким же формальным функциональным (неоператорным) аргументом, как, например, источник $J(x)$, причем фермионные поля становятся *грассмановыми*, т. е. антикоммутирующими, переменными. По первоначальному замыслу, величина $\varphi(x)$ при каждом x должна была рассматриваться как независимая интегрционная переменная, а кратность интеграла (133) – равняться количеству точек (четырехмерного) пространства, отсюда и название интеграла – *континуальный*. Однако на пути конструктивного построения такого рода интегралов встретились существенные математические трудности, и в конце концов первоначальная программа уступила место более адекватному аксиоматическому подходу, в рамках которого интегрирование по $\mathscr{D}\varphi$ носит скорее символический характер, вполне, впрочем, достаточный для целей квантовой теории поля.

Придерживаясь именно этой стратегии, мы совместим обоснование второго равенства в (133) с непосредственным построением правил континуального интегрирования, пытаясь при этом сохранить как можно больше полезных свойств обычных интегралов. Прежде всего, при любом разумном определении интеграла (133) варьирование по источнику должно выдавать аналог формулы (120),

$$Z(J) \;=\; \int \mathscr{D}\varphi\; e^{i(\mathscr{L}_0(\varphi)+\mathscr{L}_I(\varphi)+\varphi J)} \;=\; \exp\Big[\,i\int dy\,\mathscr{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J(y)})\,\Big]\int \mathscr{D}\varphi\; e^{i(\mathscr{L}_0(\varphi)+\varphi J)}\,, \qquad (134)$$

так что нам надо научиться вычислять *гауссовы* континуальные интегралы вида

$$\int \mathscr{D}\varphi\; e^{i(\mathscr{L}_0(\varphi)+\varphi J)} \;=\int \mathscr{D}\varphi\; e^{i(\varphi\frac{K}{2}\varphi+\varphi J)}\,, \qquad (135)$$

где явный вид дифференциального оператора K зависит от типа поля. Например, для нейтрального скалярного поля (9),(13) получим $K=-\partial^2-m^2$, и т. д. Предположим обратимость оператора K и примем, что континуальный интеграл не должен меняться при сдвиге переменной интегрирования в подынтегральном выражении. Выбирая сдвиг, с учетом изменения порядка операторов при сопряжении, в виде

$$\varphi\frac{K}{2}\varphi+\varphi J \quad\to\quad (\varphi-JK^{-1})\frac{K}{2}(\varphi-K^{-1}J)+(\varphi-JK^{-1})J \;=\; \varphi\frac{K}{2}\varphi-J\frac{K^{-1}}{2}J\,, \qquad (136)$$

приходим к явной формуле для гауссова континуального интеграла (135):

$$\int \mathscr{D}\varphi\; e^{i(\varphi\frac{K}{2}\varphi+\varphi J)} \;=\; e^{-\frac{i}{2}JK^{-1}J}\int \mathscr{D}\varphi\; e^{i\varphi\frac{K}{2}\varphi} \;=\; (\det K)^{-1/2}\, e^{-\frac{i}{2}JK^{-1}J}\,. \qquad (137)$$

Выделив сдвигом всю зависимость от J, мы на последнем шаге положили оставшийся интеграл равным $(\det K)^{-1/2}$ по аналогии с обычными интегралами сходного вида.

Вычислив гауссов интеграл (137), мы фактически доказали и второе равенство (133), ибо, согласно (98), $D^c = (\partial^2 + m^2)^{-1} = -K^{-1}$, а значит правые части (121) и (137) совпадают. В комментарии нуждается лишь появление $\det K$. Присутствие соответствующего фактора в определении континуального интеграла окажется удобным по многим причинам, но обращение с подобными детерминантами потребует аккуратности. Часто, как и в случае гауссова интеграла, они оказываются равными некоторым (формально бесконечным) константам, и их можно просто игнорировать. Тот факт, что равенство (133) установлено нами лишь с точностью до константного множителя, не представляет серьезной проблемы, поскольку такого рода множители все равно подвергнутся ревизии в рамках процедуры перенормировок.

Пока что мы определили гауссов континуальный интеграл только для нейтрального поля. Прямое обобщение на случай несамосопряженных (заряженных) полей выглядит по разному для бозонов и фермионов,

$$\int \mathscr{D}\varphi^* \mathscr{D}\varphi \; e^{i(\varphi^* K \varphi + \varphi^* J + J^* \varphi)} \;=\; (\det K)^{-1} \, e^{-i J^* K^{-1} J} \,, \tag{138}$$

$$\int \mathscr{D}\overline{\psi} \mathscr{D}\psi \; e^{i(\overline{\psi} K \psi + \overline{\psi}\eta + \overline{\eta}\psi)} \;=\; \det K \, e^{-i\overline{\eta} K^{-1} \eta} \,. \tag{139}$$

Появление детерминанта в положительной степени в (139) обусловлено антикоммутативностью фермионных полей и является прямым обобщением формул для конечномерных (*не* континуальных) интегралов по грассманновым переменным.

Подведем некоторые итоги. Соотношение (134) представляет собой компактную запись ряда теории возмущений на языке континуальных интегралов, эквивалентную формуле (120) в операторном подходе, причем пропагатор, имевший в том подходе вид вакуумной свертки полей, теперь возникает как результат обращения оператора, задающего свободный лагранжиан. Например, для случая (62),

$$K \;=\; i\gamma_\mu \partial_\mu - m \qquad \Longrightarrow \qquad K^{-1}(p) \;=\; (\hat{p} - m)^{-1} \;=\; \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i0} \,, \tag{140}$$

и так далее. Одним из важных преимуществ метода континуального интегрирования оказывается то, что он с самого начала имеет дело с полным лагранжианом $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I$, который, естественно, и более полно отражает специфику (особенно симметрийные свойства) конкретной теории. Отметим также, что в континуальных интегралах поля́, рассматриваемые как функциональные аргументы, не являются решениями уравнений движения типа Клейна-Гордона, Дирака и т. п., то есть не находятся на массовой поверхности, в отличие от операторнозначных квантовых полей. Та информация о свободных частицах, которая в рамках операторного подхода содержалась в явных выражениях для полей, в формализме континуального интегрирования поступает напрямую из свободного лагранжиана $\mathscr{L}_0$.

Основные свойства континуальных интегралов. Считая формулы (134),(137)–(139) исходным определением континуальных интегралов, рассмотрим теперь некоторые их свойства. Так, интеграл по $\mathscr{D}\varphi$ от вариации по этой же переменной всегда равен нулю, $\int \mathscr{D}\varphi \, \delta F(\varphi)/\delta\varphi = 0$ (правило *интегрирования по частям*). Нам будет достаточно доказать это и последующие правила только для гауссовых интегралов,

$$\int \mathscr{D}\varphi \, \frac{\delta}{\delta\varphi} \, e^{i(\varphi \frac{K}{2} \varphi + \varphi J)} \;=\; i \int \mathscr{D}\varphi \, (K\varphi + J) \, e^{i(\varphi \frac{K}{2} \varphi + \varphi J)} \;\sim\; (K \frac{\delta}{\delta J} + iJ) \, e^{-\frac{i}{2} J K^{-1} J} \;=\; 0 \,, \tag{141}$$

ибо общий случай автоматически воспроизводится варьированием по источникам. В теории возмущений континуальное интегрирование по частям приводит к тождест-

вам Швингера-Дайсона. Теперь найдем формулу замены функциональной переменной. Ясно, что от простого *переименования* переменной интегрирования, даже континуального, ничего зависеть не должно, например, $\int \mathscr{D}(A\varphi)\, F(\varphi) = \int \mathscr{D}\varphi\, F(A^{-1}\varphi)$, где оператор A не содержит φ. Несложное вычисление

$$\begin{aligned}\int \mathscr{D}(A\varphi)\; e^{i(\varphi\frac{K}{2}\varphi+\varphi J)} \;&=\; \int \mathscr{D}\varphi\; e^{i(\varphi\frac{A^{-1}KA^{-1}}{2}\varphi+\varphi A^{-1}J)} \\ &=\; \frac{\det A}{\sqrt{\det K}}\; e^{-\frac{i}{2}JK^{-1}J} \;=\; \det A \int \mathscr{D}\varphi\; e^{i(\varphi\frac{K}{2}\varphi+\varphi J)} \qquad (142)\end{aligned}$$

позволяет получить правило *замены переменной* в континуальном интеграле:

$$\mathscr{D}(A\varphi) \;=\; \mathscr{D}\varphi\;\det A\,, \qquad \mathscr{D}f(\varphi) \;=\; \mathscr{D}\varphi\;\det f'(\varphi)\;. \qquad (143)$$

Доказательство общего случая, т.е. второго равенства в (143), мы опускаем.

Континуальное обобщение δ-функции похоже на ее фурье-представление,

$$\delta(\varphi) \;\doteq\; \int \mathscr{D}\lambda\; e^{i\lambda\varphi} \qquad\Longrightarrow\qquad F(\tilde\varphi) \;=\; \int \mathscr{D}\varphi\;\delta(\varphi-\tilde\varphi)\,F(\varphi)\,. \qquad (144)$$

Проверка второго равенства не представляет большого труда:

$$\begin{aligned}\int \mathscr{D}\varphi\;\delta(\varphi-\tilde\varphi)\; e^{i(\varphi\frac{K}{2}\varphi+\varphi J)} \;&=\; \int \mathscr{D}\lambda\; e^{-i\lambda\tilde\varphi} \int \mathscr{D}\varphi\; e^{i\varphi\frac{K}{2}\varphi+i\varphi(J+\lambda)} \\ &=\; (\det K)^{-1/2}\; e^{-\frac{i}{2}JK^{-1}J} \int \mathscr{D}\lambda\; e^{-\frac{i}{2}\lambda K^{-1}\lambda-i\lambda(\tilde\varphi+K^{-1}J)} \\ =\; (\det K)^{-1/2}\,(\det K)^{1/2}\; e^{-\frac{i}{2}JK^{-1}J}\; e^{\frac{i}{2}(\tilde\varphi+JK^{-1})K(\tilde\varphi+K^{-1}J)} \;&=\; e^{i(\tilde\varphi\frac{K}{2}\tilde\varphi+\tilde\varphi J)}\;. \qquad (145)\end{aligned}$$

По соображениям, изложенным выше, мы проигнорировали $\det(-1)$. В качестве немедленного следствия правил (143) получаем

$$\delta(A\varphi-\tilde\varphi) \;=\; \frac{\delta(\varphi-A^{-1}\tilde\varphi)}{\det A}\;, \qquad \delta(f(\varphi)) \;=\; \frac{\delta(\varphi-\varphi_0)}{\det f'(\varphi_0)} \quad \text{если} \quad f(\varphi_0)\,=\,0\;. \qquad (146)$$

В частности, для бозонов и фермионов, в согласии с (138) и (139), имеем

$$\int \mathscr{D}\varphi^*\mathscr{D}\varphi\; e^{i\varphi^*K\varphi} \;=\int \mathscr{D}\varphi\;\delta(K\varphi) \;=\; (\det K)^{-1}\,, \qquad \int \mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\psi\; e^{i\overline{\psi}K\psi} \;=\; \det K\,. \qquad (147)$$

Докажем первое равенство (146) заменой переменных $\varphi = A^{-1}\lambda$:

$$\begin{aligned}\int \mathscr{D}\varphi\;\delta(A\varphi-\tilde\varphi)\,F(\varphi) \;&=\; \int \mathscr{D}(A^{-1}\lambda)\;\delta(\lambda-\tilde\varphi)\,F(A^{-1}\lambda) \\ &=\; (\det A)^{-1}\int \mathscr{D}\lambda\;\delta(\lambda-\tilde\varphi)\,F(A^{-1}\lambda) \;=\; (\det A)^{-1}\,F(A^{-1}\tilde\varphi)\,. \qquad (148)\end{aligned}$$

Заметим, что континуальные детерминанты, введенные пока чисто формально, в дальнейшем будут конкретизированы и найдут нетривиальные применения, особенно в неабелевых калибровочных теориях. В частности, последнее равенство в (147) послужит основой для включения в лагранжиан дополнительных полей – *гостов*.

4. Преобразования полей и теорема Нётер

Преобразования полей. Вопросы инвариантности теории при преобразованиях полей играют в квантовой теории поля чрезвычайно важную роль. Достаточно сказать, что все три основных (на сегодня) модели взаимодействий элементарных частиц – КЭД, КХД и Стандартная модель – являются *калибровочными* теориями, порожденными определенным типом групповых преобразований полей и инвариантными относительно них. Рассмотрим сначала некоторые общие аспекты преобразований полей. Во-первых, все поля, с которыми имеет дело квантовая теория поля, обязаны быть релятивистскими ковариантами, или *лоренц-тензорами*. Это значит, что при преобразованиях Лоренца (5) (даже более широко – при преобразованиях группы Пуанкаре) поля преобразуются по представлениям этой группы,

$$x'_\mu \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\, x_\nu \qquad \Longrightarrow \qquad A'(x') \;=\; S(\Lambda)\, A(x)\,. \tag{149}$$

Скажем, для скалярного поля $S(\Lambda) = 1$, для векторного – $S(\Lambda) = \Lambda$, а вот для спинорного поля вид матрицы $S(\Lambda)$ нам еще предстоит найти. Другим характерным типом преобразований полей являются преобразования *внутренней симметрии* $A(x) \to A'(x)$, не связанные с изменением координат x. Примеров таких симметрий (и отвечающих им групп) немало – изотопическая, калибровочная, киральная, и т. д.

Как правило, закон преобразования выглядит одинаково для классических и квантовых полей. Мы знаем, однако, что преобразования квантовых объектов должны быть унитарными. Это позволяет представить любое преобразование *квантового* поля в форме унитарного преобразования, которое принято записывать в следующем универсальном виде, едином для лоренцевых и внутренних симметрий:

$$A'(x) \;=\; U^+ A(x)\, U\,, \qquad U^+ \,=\, U^{-1}\,. \tag{150}$$

Комбинируя (149) и (150), получим базовое соотношение

$$U^+ A(x')\, U \;=\; S(\Lambda)\, A(x)\,, \tag{151}$$

которое можно трактовать как условие согласования тензорного и унитарного характера преобразований квантового поля. Поскольку тензорная структура полей почти всегда известна, можно использовать равенство (151) для нахождения явного вида оператора U. Например, относительно сдвигов координат любое поле скалярно. Поэтому для произвольного квантового поля $A(x)$ справедливо равенство

$$A(x+a) \;=\; U\, A(x)\, U^+\,, \qquad U \;=\; e^{iaP}\,, \qquad [P_\mu\,,\, A] \;=\; -i\partial_\mu A\,, \tag{152}$$

которое проверяется разложением $A(x+a)$ в ряд Тейлора с учетом формулы

$$e^B A\, e^{-B} \;=\; A + [B,A] + \frac{1}{2}\,[B,[B,A]] + \frac{1}{3!}\,[B,[B,[B,A]]] + \ldots\,. \tag{153}$$

Здесь P_μ (генератор пространственных сдвигов) – это квантовый оператор, отвечающий 4-вектору энергии-импульса. Его нулевой компонентой является гамильтониан, и коммутатор в (152) есть просто ковариантная форма (25). Вскоре мы выведем P_μ и его свойства из теоремы Нётер. Из (152) вытекает полезное соотношение

$$<p'|\, F(A(x))\,|p> \,=\, <p'|\, e^{iPx}\, F(A(0))\, e^{-iPx}|p> \,=\; e^{i(p'-p)x} <p'|\, F(A(0))\,|p>\,, \tag{154}$$

справедливое для матричных элементов от комбинаций квантовых полей между состояниями с определенным импульсом.

Преобразование спинорных полей. Переходя к более детальному рассмотрению вопросов, связанных с преобразованиями полей, начнем с выяснения вида лоренц-преобразования (149) в случае спиноров. Прямой ответ на это дает теория представлений группы Пуанкаре, но мы, не углубляясь в математику, придем к тому же ответу косвенным образом, из требования ковариантности уравнения Дирака (61). Действительно, вводя матрицу $S(\Lambda)$ со следующими свойствами,

$$\psi'(x') \;=\; S\psi(x)\,, \quad \overline{\psi}'(x') \;=\; \overline{\psi}(x)S^{-1}\,, \quad \gamma_0 S^{+}\gamma_0 \;=\; S^{-1}, \quad S^{-1}\gamma_\mu S \;=\; \Lambda_{\mu\nu}\gamma_\nu\,, \tag{155}$$

мы сохраняем вид уравнения Дирака,

$$(i\gamma_\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') \;=\; (i\gamma_\mu\Lambda_{\mu\nu}\partial_\nu - m)S(\Lambda)\psi(x) \;=\; S(\Lambda)(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi(x)\;, \tag{156}$$

а также сопряженного ему уравнения, и добиваемся того, что комбинация $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ оказывается скаляром, а $\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ – 4-вектором. Явный вид $S(\Lambda)$ нам не понадобится. Докажем еще псевдоскалярность комбинации $\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$. Используя

$$\gamma_5 \;=\; -\frac{i}{24}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\,, \qquad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\Lambda_{\mu\mu'}\Lambda_{\nu\nu'}\Lambda_{\alpha\alpha'}\Lambda_{\beta\beta'} \;=\; -\det\Lambda\;\varepsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'}\,, \tag{157}$$

получим

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}'(x')\,\gamma_5\,\psi'(x') \;&=\; -\frac{i}{24}\,\overline{\psi}(x)\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,S^{-1}\gamma_\mu S\,S^{-1}\gamma_\nu S\,S^{-1}\gamma_\alpha S\,S^{-1}\gamma_\beta S\,\psi(x)\\
&=\; -\frac{i}{24}\,\overline{\psi}(x)\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\Lambda_{\mu\mu'}\Lambda_{\nu\nu'}\Lambda_{\alpha\alpha'}\Lambda_{\beta\beta'}\,\gamma_{\mu'}\gamma_{\nu'}\gamma_{\alpha'}\gamma_{\beta'}\,\psi(x)\\
&=\; \frac{i}{24}\,\det\Lambda\;\overline{\psi}(x)\,\varepsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'}\,\gamma_{\mu'}\gamma_{\nu'}\gamma_{\alpha'}\gamma_{\beta'}\,\psi(x) \;=\; -\det\Lambda\;\overline{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x)\,.
\end{aligned} \tag{158}$$

Знак перед детерминантом не должен удивлять: тождественному преобразованию в пространстве Минковского соответствует матрица $\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, детерминант которой равен -1, в то время как пространственная инверсия $x_0 \to x_0$, $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, согласно договоренности о суммировании (1), осуществляется единичной матрицей.

Прежде чем закончить разговор о детерминантах матриц в пространстве Минковского, установим еще одну полезную для дальнейшего формулу:

$$x'_\mu \;=\; x_\mu + \varepsilon_\mu(x) \qquad \Longrightarrow \qquad dx' \;=\; -(\det\frac{\partial x'}{\partial x})\,dx \;=\; dx\,(1+\partial_\mu\varepsilon_\mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,. \tag{159}$$

Второе равенство оправдано тем, что в силу соглашения (3) величина $-\det(\partial_\mu x'_\nu)$ есть обычный якобиан. Последнее равенство в (159) вытекает из следующего легко проверяемого утверждения: $\det(g_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu}) = -1 - \omega_{\mu\mu} + \mathcal{O}(\omega^2)$.

Теорема Нётер. В квантовой теории поля под именем теоремы Нётер фигурирует набор утверждений следующего плана: инвариантность (полного) лагранжиана относительно некоторой непрерывной группы преобразований означает существование сохраняющихся величин (нётеровских зарядов), которые одновременно оказываются и генераторами этих преобразований. На первом этапе мы рассмотрим не самую общую ситуацию, а преобразование типа внутренней симметрии,

$$\varphi_a(x) \to \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x)\,, \quad \delta\varphi_a(x) \;=\; F_a^k(\varphi)\,\omega_k\,, \quad \delta(\partial_\mu\varphi_a) \;\equiv\; \delta\varphi_{a,\mu} \;=\; \partial_\mu(\delta\varphi_a)\,. \tag{160}$$

Индекс a нумерует компоненты полей, а ω_k – это параметры преобразования (они могут, в принципе, зависеть от координат x). Тогда

$$\delta\mathscr{L} \;=\; \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a}\,\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\,\partial_\mu(\delta\varphi_a) \;=\; \Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\Big)\delta\varphi_a + \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\,\delta\varphi_a\Big)$$
$$= \;\Big[\,\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\Big)F_a^k - \partial_\mu J_\mu^k\,\Big]\omega_k - J_\mu^k\,\partial_\mu\omega_k\,, \quad (161)$$

где введены *нётеровские токи*

$$J_\mu^k \;\doteq\; -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\,F_a^k(\varphi) \;=\; -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\,\omega_{k,\mu}}\,, \quad (162)$$

число которых равно числу параметров ω_k. Каждый ток является 4-вектором. Пусть лагранжиан $\mathscr{L}$ инвариантен относительно преобразований (160) с *постоянными* (не зависящими от x) параметрами ω_k. Тогда из (161) следует сохранение токов J_μ^k (равенство нулю их 4-дивергенций $\partial_\mu J_\mu^k$) *на массовой поверхности*, т. е. при условии выполнения уравнений движения (16). Отметим, что вне массовой поверхности, то есть не на уравнениях движения, обращается в нуль вся квадратная скобка в правой части (161), но не дивергенции токов. Если теперь разрешить параметрам ω_k зависеть от x, то последнее слагаемое правой части (161) становится (единственным) источником неинвариантности лагранжиана $\mathscr{L}$. Отсюда и вытекает второе равенство в (162). Следует предупредить, что при переходе к более общим преобразованиям вся формула (162) претерпит изменения.

Нётеровскими зарядами называют интегралы от нулевых компонент токов,

$$Q_k \;\doteq\; \int d\mathbf{x}\,J_0^k(x) \;=\; -\int d\mathbf{x}\,\pi_a\,F_a^k(\varphi)\,, \qquad \pi_a(x) \;=\; \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,0}}\,. \quad (163)$$

При каждом значении времени (x_0) такой интеграл соответствует потоку 4-вектора J_μ^k через трехмерную поверхность, перпендикулярно пересекающую ось времени в точке x_0. Поток через замкнутую поверхность был бы равен интегралу от $\partial_\mu J_\mu^k$ по (лежащему внутри) четырехмерному объему. На уравнениях движения $\partial_\mu J_\mu^k = 0$. Поэтому, выбирая поверхность в виде двух ортогональных временно́й оси гиперплоскостей и замыкая ее бесконечно удаленной границей (которая вклада в интегралы, как мы условились, не дает), приходим к выводу, что величины Q_k, формально зависящие от x_0, на самом деле при разных x_0 совпадают. Таким образом, заряды Q_k оказываются (на уравнениях движения) теми самыми сохраняющимися величинами, существование которых утверждается в теореме Нётер. Более того, в силу независимости Q_k от времени мы можем воспользоваться одновременны́ми коммутаторами (20) с очевидными модификациями типа $[\pi_b, \varphi_a] \sim \delta_{ab}$ и вывести соотношение

$$-i\omega_k[Q_k, \varphi_a] \;=\; i\omega_k\int d\mathbf{x}\,[\pi_b, \varphi_a]\,F_b^k(\varphi) = \;F_a^k\,\omega_k \;=\; \delta\varphi_a\,, \quad (164)$$

которое показывает, что Q_k являются еще и генераторами этих преобразований:

$$\varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x) \;=\; \varphi'_a(x) \;=\; U^+\varphi_a(x)\,U\,, \qquad U \;=\; \exp(i\omega_k Q_k)\,. \quad (165)$$

В качестве примера можно рассмотреть лагранжиан заряженного скалярного поля (34). Он инвариантен относительно однопараметрической группы преобразований с постоянным параметром ω:

$$\varphi \;\to\; e^{i\omega}\varphi \;\simeq\; \varphi + i\,\omega\varphi\,, \quad F \;=\; i\varphi\,, \quad \varphi^* \;\to\; e^{-i\omega}\varphi^* \;\simeq\; \varphi^* - i\,\omega\varphi^*\,, \quad F_* \;=\; -i\varphi^*\,. \quad (166)$$

Нётеровский ток удобно строить с помощью самого правого выражения в (162), допуская специально для этого зависимость ω от x:

$$J_\mu \;=\; -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\, \omega_{,\mu}} \;=\; i(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^*\cdot\varphi)\,. \tag{167}$$

Очевидно, что его 4-дивергенция равна нулю, если φ и φ^* подчинены уравнению Клейна-Гордона (12). Нётеровский заряд находим прямой выкладкой

$$Q \;=\; i\int d\mathbf{x}\,(\varphi^*\partial_0\varphi - \partial_0\varphi^*\cdot\varphi) \;=\; \int d\mathbf{p}\,\big(a^+(\mathbf{p})\,a(\mathbf{p}) - b^+(\mathbf{p})\,b(\mathbf{p})\big) \tag{168}$$

и убеждаемся, что он не зависит от времени и действительно является генератором данных преобразований. Другим примером может служить спинорный лагранжиан (62), инвариантный относительно

$$\psi \;\to\; e^{i\omega}\psi \;\simeq\; \psi + i\omega\psi\,, \quad F \;=\; i\psi\,, \quad \overline{\psi} \;\to\; e^{-i\omega}\overline{\psi} \;\simeq\; \overline{\psi} - i\omega\overline{\psi}\,, \quad \overline{F} \;=\; -i\overline{\psi}\,. \tag{169}$$

Ток и соответствующий заряд имеют вид

$$J_\mu \;=\; \overline{\psi}\gamma_\mu\psi\,, \qquad Q \;=\; \int d\mathbf{x}\,\overline{\psi}(x)\gamma_0\psi(x) \;=\; \int d\mathbf{p}\,\big(a_r^+(\mathbf{p})\,a_r(\mathbf{p}) - b_r^+(\mathbf{p})\,b_r(\mathbf{p})\big)\,. \tag{170}$$

При выводе последнего равенства нам понадобились свойства (58).

Тензор энергии-импульса. Как мы знаем, преобразования (160) можно обобщить, предусмотрев в них возможность вариации координат:

$$\varphi'_a(x) \;=\; \varphi_a(x) + \delta\varphi_a\,, \quad \delta\varphi_a \;=\; F_a^k\,\omega_k\,, \quad \delta\varphi_{a,\mu} \;=\; \partial_\mu(\delta\varphi_a)\,, \quad \delta x_\mu \;=\; \xi_\mu^k\,\omega_k\,. \tag{171}$$

Инвариантность теории будет теперь зависеть от того, изменяется или нет комбинация $dx\,\mathscr{L}$ как целое. Принимая во внимание (159), запишем

$$\begin{aligned}\delta(dx\,\mathscr{L}) \;&=\; dx'\mathscr{L}(\varphi'(x')) - dx\mathscr{L}(\varphi(x)) \;=\; dx\,[\,\mathscr{L}(\varphi'(x')) + (\partial_\mu\,\delta x_\mu - 1)\mathscr{L}(\varphi(x))\,] \\ &=\; dx\,\Big[\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a}\,\delta\varphi_a + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\,\partial_\mu(\delta\varphi_a) + (\partial_\mu\mathscr{L})\,\delta x_\mu + \mathscr{L}\,\partial_\mu(\delta x_\mu)\,\Big] \;\doteq\; dx\,\delta\mathscr{L}\,.\end{aligned} \tag{172}$$

Так определенное $\delta\mathscr{L}$ отличается от одноименного выражения в (161) двумя последними слагаемыми, сумма которых есть $\partial_\mu(\mathscr{L}\delta x_\mu) = \partial_\mu(\mathscr{L}\xi_\mu^k\,\omega_k)$. В результате, *правая часть* (161) остается верным выражением и для нового $\delta\mathscr{L}$, если должным образом модифицировать определение нётеровского тока:

$$J_\mu^k \;\doteq\; -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\,F_a^k - \mathscr{L}\,\xi_\mu^k\,. \tag{173}$$

Формулировка теоремы Нётер остается при этом прежней: если теория инвариантна (то есть $\delta\mathscr{L} = 0$) при $\omega_k = \mathrm{const}$, то $\partial_\mu J_\mu^k = 0$ на уравнениях движения.

Наиболее известным примером такой ситуации является *трансляционная инвариантность* квантовой теории поля, т. е. инвариантность относительно сдвигов координат на константу. Параметры преобразования обозначим ω_ν, заменив индекс k на 4-индекс ν, который будем писать внизу:

$$\delta x_\mu \;=\; \xi_{\mu\nu}\,\omega_\nu \;=\; \omega_\mu\,, \quad \xi_{\mu\nu} \;=\; g_{\mu\nu}\,, \quad \delta\varphi_a \;=\; -\varphi_{a,\nu}\,\omega_\nu\,, \quad F_{a\nu} \;=\; -\varphi_{a,\nu}\,. \tag{174}$$

Предпоследнее равенство следует из того, что при сдвигах все поля скалярны, а значит $\varphi'_a(x) = \varphi_a(x-\delta x) \simeq \varphi_a(x) - \varphi_{a,\nu}\,\delta x_\nu$. Четверку нётеровских токов J^k_μ в данном случае принято объединять в *тензор энергии-импульса*

$$T_{\mu\nu} \;=\; \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\,\varphi_{a,\nu} - \mathscr{L}\,g_{\mu\nu}\,. \tag{175}$$

Интересно, что сохранение этого тензора на уравнениях движения проверяется непосредственным дифференцированием, безотносительно к виду лагранжиана $\mathscr{L}$,

$$\begin{aligned}\partial_\mu T_{\mu\nu} \;&=\; \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\Big)\,\varphi_{a,\nu} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\,\varphi_{a,\nu\mu} - g_{\mu\nu}\,\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a}\,\varphi_{a,\mu} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\lambda}}\,\varphi_{a,\lambda\mu}\Big)\\ &=\; -\varphi_{a,\nu}\,\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\Big)\,,\end{aligned} \tag{176}$$

поскольку трансляционная инвариантность имеет место при любом $\mathscr{L}(\varphi\,,\,\partial_\mu\varphi)$, не зависящем от x явно. Из зарядов Q_k составляем 4-*вектор энергии-импульса*

$$P_\nu \;=\; \int d\mathbf{x}\,T_{0\nu} \;=\; \int d\mathbf{x}\,(\pi_a\,\varphi_{a,\nu} - \mathscr{L}\,g_{0\nu})\,,\qquad P_0 \;=\; H\,,\qquad \mathbf{P} \;=\; -\int d\mathbf{x}\,\pi_a(x)\,\frac{\partial\varphi_a}{\partial\mathbf{x}}\,. \tag{177}$$

В последнем случае сработало правило (3). Осталось проверить коммутатор (152). Это легко сделать, воспользовавшись явным выражением

$$P_\mu \;=\; \int d\mathbf{p}\;p_\mu\,a^+(\mathbf{p})\,a(\mathbf{p}) \tag{178}$$

для случая нейтрального скалярного поля или его тривиальными обобщениями на другие поля. Формула (178) выводится непосредственно из (177). Она также свидетельствует, что результат (164) остается в силе: это было неочевидно ввиду усложнения структуры исходных преобразований (174) по сравнению с (160). Вообще, выполнение на уравнениях движения коммутационных соотношений (152) дает основания трактовать (не только в свободной теории) формальные решения этих уравнений $A_H(x)$ как поля в гайзенберговом представлении, кладя их в основу альтернативного подхода к построению теории возмущений. Характерной особенностью этого подхода является использование вместо $<0|\,TA(x)A(y)\ldots e^{i\mathscr{L}}\,|0>$ вакуумных средних $<0|\,TA_H(x)A_H(y)\ldots|0>$ от *гайзенберговых* полей A_H и *без* экспоненты.

Рамки условий (171) можно еще расширить, допуская в них производные от ω_k:

$$\delta\varphi_a \;=\; F^k_a\,\omega_k + \chi^k_{a\mu}\partial_\mu\omega_k\,,\qquad \delta\varphi_{a,\mu} \;=\; \partial_\mu(\delta\varphi_a)\,,\qquad \delta x_\mu \;=\; \xi^k_\mu\,\omega_k\,. \tag{179}$$

Это нужно, если мы хотим иметь дело с *локальными* (зависящими от x) преобразованиями (например, калибровочными) и исследовать *локальную* инвариантность. Кроме того, такие вклады автоматически появляются для *нескалярных* полей при сдвигах $x \to x+\omega(x)$. Определяя $\delta\mathscr{L}$ как в (172), а ток – согласно (173), получим

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} \;&=\; \Big[\,\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\mu}}\Big)F^k_a - \partial_\mu J^k_\mu\,\Big]\,\omega_k\\ &\qquad + \Big[\,-J^k_\mu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_a}\,\chi^k_{a\mu} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\nu}}\,\partial_\nu\chi^k_{a\mu}\,\Big]\,\partial_\mu\omega_k + \Big[\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{a,\nu}}\,\chi^k_{a\mu}\,\Big]\,\partial_\nu\partial_\mu\omega_k\,.\end{aligned} \tag{180}$$

Если данная теории *локально* инвариантна, то все три выражения в квадратных скобках обязаны обратиться в нуль. Отметим, что последнее равенство в (162) теперь уже не годится для вычисления нётеровского тока, даже если преобразования не затрагивают координат.

5. Калибровочная симметрия

Ковариантные производные. Изучение калибровочных теорий мы начнем с квантовой электродинамики. Мы уже знакомы с полями, из которых построена данная модель – это спинорные поля $\psi, \overline{\psi}$ (35),(36) и электромагнитное поле A_μ (71) – но пока не пользовались тем, что лагранжиан КЭД инвариантен относительно *локальных калибровочных преобразований*

$$\psi(x) \;\to\; \psi(x) + ie\omega(x)\psi(x)\,, \quad \overline{\psi}(x) \;\to\; \overline{\psi}(x) - ie\omega(x)\overline{\psi}(x)\,, \quad A_\mu(x) \;\to\; A_\mu(x) + \partial_\mu\omega(x) \tag{181}$$

(здесь e – заряд электрона). Выше было отмечено, что при *постоянном* ω такое преобразование оставляет инвариантным свободный спинорный лагранжиан (62). Причиной его *неинвариантности* в случае $\omega = \omega(x)$ оказывается производная ∂_μ. Для преодоления этой трудности изобретена *ковариантная производная*

$$\nabla_\mu\psi \;\doteq\; (\partial_\mu - ieA_\mu)\,\psi\,, \qquad \nabla_\mu\overline{\psi} \;\doteq\; (\partial_\mu + ieA_\mu)\,\overline{\psi}\,, \tag{182}$$

которая удобна тем, что преобразуется по тому же правилу, что и само поле:

$$\nabla_\mu\psi \;\to\; (\partial_\mu - ieA_\mu - ie\partial_\mu\omega)\,(1+ie\omega)\,\psi \;=\; (1+ie\omega)\,\nabla_\mu\psi\,, \quad \nabla_\mu\overline{\psi} \;\to\; (1-ie\omega)\,\nabla_\mu\overline{\psi}\,.$$

Процедура построения калибровочно-инвариантных лагранжианов теперь, по сути, сводится к замене обычных производных на ковариантные. В частности, подстановка $\nabla_\mu\psi$ на место $\partial_\mu\psi$ в лагранжиан (62) добавляет к нему то самое слагаемое $e\,\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$, которое играет в квантовой электродинамике роль лагранжиана взаимодействия. Полный же лагранжиан КЭД выглядит так:

$$\mathscr{L} \;=\; -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi + e\,\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu\,, \qquad F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,. \tag{183}$$

Он не меняется при калибровочных преобразованиях (181), поскольку тензор $F_{\mu\nu}$ относительно них инвариантен. Этот тензор, как выясняется, напрямую связан с коммутатором ковариантных производных, $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \sim F_{\mu\nu}$, а его квадрат задает свободный лагранжиан поля A_μ.

Тот же принцип используется при построении калибровочно-инвариантного лагранжиана заряженного скалярного поля. Исходные преобразования имеют вид

$$\varphi \;\to\; (1+ie\omega)\,\varphi\,, \qquad \varphi^* \;\to\; (1-ie\omega)\,\varphi^*\,, \qquad A_\mu \;\to\; A_\mu + \partial_\mu\omega\,, \tag{184}$$

а ковариантные производные заданы соотношениями

$$\nabla_\mu\varphi \;=\; (\partial_\mu - ieA_\mu)\,\varphi\,, \qquad \nabla_\mu\varphi^* \;=\; (\partial_\mu + ieA_\mu)\,\varphi^*\,. \tag{185}$$

В итоге, приходим к лагранжиану *скалярной электродинамики*:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} \;&=\; -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \nabla_\mu\varphi^*\,\nabla_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi \\ &=\; -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \partial_\mu\varphi^*\,\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi + ie(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\varphi^*\cdot\varphi)A_\mu + e^2\varphi^*\varphi A_\mu A_\mu\,.\end{aligned} \tag{186}$$

Отметим, что здесь появились целых два вклада в лагранжиан взаимодействия, один из которых пропорционален заряду e, а другой – его квадрату.

Калибровочный параметр. Вернемся к лагранжиану КЭД (183). В отличие от скалярного и спинорного полей, пропагатор электромагнитного поля (103) нельзя получить обращением оператора K из $\mathscr{L}_0(A)$ по образцу (140) по той простой причине, что у поля A_μ этот оператор необратим. Действительно,

$$\mathscr{L}_0(A) \;=\; -\frac{1}{4}\,(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \;=\; \frac{1}{2}\,(\partial_\mu A_\nu\;\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\;\partial_\mu A_\nu) \;=\; \frac{1}{2}\,A_\mu K_{\mu\nu} A_\nu\;, \quad (187)$$

$$K_{\mu\nu} \;=\; g_{\mu\nu}\,\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu \qquad \Longrightarrow \qquad K_{\mu\nu}(p) \;=\; p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2\,. \quad (188)$$

Вследствие *поперечной* структуры матрица $K_{\mu\nu}(p)$ имеет нулевые моды, например, $p_\mu K_{\mu\nu}(p) = 0$, а значит она необратима. Это закономерный эффект калибровочной симметрии лагранжиана $\mathscr{L}_0(A)$, ибо чем больше симметрии, тем больше нулевых мод. Так можно ли все-таки применять технику континуального интегрирования к полям A_μ? Да, но весьма нетривиальным путем. Сначала нам придется *нарушить* инвариантность лагранжиана, добавив к $\mathscr{L}_0(A)$ новое, неинвариантное относительно калибровочного преобразования $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\omega$ слагаемое $-(\partial_\mu A_\mu)^2/2\alpha$, где α – так называемый *калибровочный параметр*. Зато теперь матрица $K_{\mu\nu}$ имеет обратную:

$$\mathscr{L}_0(A) \;=\; -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\alpha}\,(\partial_\mu A_\mu)^2 \;=\; \frac{1}{2}\,A_\mu K_{\mu\nu} A_\nu\;, \qquad K_{\mu\nu} \;=\; g_{\mu\nu}\,\partial^2 + (\,\alpha^{-1} - 1)\,\partial_\mu\partial_\nu\;,$$

$$K_{\mu\nu}(p) \;=\; (1-\alpha^{-1})\,p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2\,, \qquad K^{-1}_{\mu\nu}(p) \;=\; -\,\frac{g_{\mu\nu}p^2 + (\alpha-1)\,p_\mu p_\nu}{p^2\cdot p^2}\,. \quad (189)$$

При $\alpha = 1$ это соответствует пропагатору (103). Со временем мы покажем, что физически значимые величины от параметра α на самом деле не зависят. Поэтому в качестве пропагатора электромагнитного поля можно брать $-K^{-1}_{\mu\nu}(p)$ с любым α. Формула (103) тем самым обобщается на случай *произвольной α-калибровки*:

$$<0\,|\,TA_\mu(x)A_\nu(y)\,|\,0> \;=\; \frac{-i}{(2\pi)^4}\int dp\;e^{-ip(x-y)}\;\frac{g_{\mu\nu} + (\alpha-1)\,p_\mu p_\nu/p^2}{p^2 + i0}\;. \quad (190)$$

Заметим, что случай $\alpha = 0$ (*поперечная* калибровка), вполне допустимый с точки зрения формулы (190), не удается представить в терминах лагранжиана $\mathscr{L}_0(A)$. Переход от (103) к (190) можно воспринимать как эффект изменения поля A_μ на величину, пропорциональную $\partial_\mu(\partial_\nu A_\nu)$. Поскольку нам теперь приходится работать с *неинвариантным* $\mathscr{L}_0(A)$, такое изменение, естественно, отразилось на правилах Фейнмана для фотонного пропагатора. Подытоживая ситуацию, можно сказать так: симметрия исходного лагранжиана (183) явилась причиной некоторых трудностей, в связи с чем мы вынуждены пока использовать неинвариантный лагранжиан

$$\mathscr{L} \;=\; -\frac{1}{4}\,(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2\alpha}\,(\partial_\mu A_\mu)^2 + i\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - m\,\overline{\psi}\psi + e\,\overline{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu\;. \quad (191)$$

Однако, как скоро выяснится, симметрия *всей теории* при этом потеряна не будет.

Физические и нефизические фотоны. Разобравшись со взаимодействием и пропагаторами, мы должны теперь прояснить еще один аспект установленных ранее правил для КЭД – суммирование по всем четырем поляризациям фотонов, при том что физическими из них являются только две. Эффективно уменьшить число степеней свободы можно, например, с помощью какого-нибудь дополнительного условия. Попробуем, по аналогии со случаем массивного векторного поля (68), наложить на поле A_μ (71) условие $\partial_\mu A_\mu = 0$. На массовой поверхности $\partial^2 A_\mu = \partial^2\omega = 0$ оно будет

даже калибровочно инвариантным. Для того, чтобы проанализировать его следствия, сформируем из векторов поляризации e^0_μ и e^3_μ два других, $e^+_\mu = (1,0,0,1) \sim p_\mu$ и $e^-_\mu = (1,0,0,-1)$, и согласно этому переразложим поле A_μ (поперечные компоненты которого не изменились и помечены значком tr):

$$A_\mu \;\simeq\; e^0_\mu a_0 - e^3_\mu a_3 - e^{\rm tr}_\mu a_{\rm tr} \;=\; e^+_\mu a_+ + e^-_\mu a_- - e^{\rm tr}_\mu a_{\rm tr}\,, \qquad a_\pm \;=\; \frac{1}{2}\,(a_0 \mp a_3)\,. \quad (192)$$

Если бы поле A_μ было классическим, то условие $\partial_\mu A_\mu \sim p_\mu A_\mu = 0$ влекло бы за собой $a_- = 0$ (поскольку $p_\mu e^+_\mu = p_\mu e^{\rm tr}_\mu = 0$), оставляя в A_μ две физические (поперечные) и одну нефизическую степень свободы $e^+_\mu a_+ \sim p_\mu a_+$, отвечающую калибровочному произволу $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \omega$. Но для квантовых полей такие условия не годятся, ибо они несовместны с ковариантными перестановочными соотношениями (73). Поэтому накладывается более слабое условие $a_-|\,\Phi> = 0$ на разрешенные состояния. В силу

$$[\,a_+\,,a^+_+\,] = [\,a_-\,,a^+_-\,] = \,0\,, \quad [\,a_+(\mathbf{p})\,,a^+_-(\mathbf{p}')\,] \;=\; [\,a_-(\mathbf{p})\,,a^+_+(\mathbf{p}')\,] \;=\; -\frac{1}{2}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,, \quad (193)$$

этим условием, по сути, запрещается рождение квантов оператором a^+_+. Так, например, состояние $a^+_+(\mathbf{p})|\,0>$ не разрешено. В то же время, состояние $a^+_-(\mathbf{p})|\,0>$ – разрешенное, но с нулевой нормой. В итоге, мы разрешаем как *физические* поперечные, так и некоторые *нефизические* (порождаемые операторами a^+_-) состояния, которые можно назвать калибровочными, поскольку именно в них теперь воплощен калибровочный произвол. Действительно, ввиду $[a^\pm_-, A_\mu] \sim p_\mu$ операторы $a^\pm_-$ являются, фактически, генераторами квантовых калибровочных преобразований.

S-матрица КЭД калибровочно инвариантна, $[a^\pm_-, S] = 0$, поэтому можно сделать вывод, что она состоит из $a_{\rm tr}$ и a_-, но не включает операторов a_+, а значит запрещенные состояния не могут порождаться S-матрицей из поперечных. В свою очередь, калибровочные состояния типа $a^+_-|\,\Phi_{\rm tr}>$ рождаются из них с нулевой вероятностью:

$$<\Phi'_{\rm tr}\,|\,S\,a^+_-\,|\Phi_{\rm tr}> \;=\; <\Phi'_{\rm tr}\,|\,a^+_-\,S\,|\Phi_{\rm tr}> \;=\; 0\;. \quad (194)$$

Тем самым установлена унитарность теории в подпространстве физических (чисто поперечных) состояний: если в начальном состоянии имелись лишь поперечные фотоны, то никакие другие родиться и не смогут. Напомним, что формальная унитарность S-матрицы в полном пространстве, включающем фотоны всех четырех поляризаций, вытекала из эрмитовости лагранжиана. Калибровочная инвариантность S имеет еще одно важное следствие. Пусть $|\,\Psi>$ – состояние без фотонов, а $|\,\Phi>$ – любое разрешенное. Возьмем $a^+_-|\,\Psi>$ в качестве однофотонного in-состояния. Тогда

$$<\Phi\,|\,S\,a^+_-\,|\Psi> = <\Phi\,|\,a^+_-\,S\,|\Psi> = \,0 \quad\Longrightarrow\quad <\Phi\,|\,S\,a^+_0\,|\Psi> = \,-<\Phi\,|\,S\,a^+_3\,|\Psi>\;. \quad (195)$$

Значит, квадраты матричных элементов от продольных и временны́х фотонов равны, что и является обоснованием правила (111) суммирования по поляризациям.

Итак, все введенные ранее правила обращения с электромагнитным полем (71) нашли объяснение с точки зрения калибровочной симметрии и в ее рамках получили свое дальнейшее развитие. В этой связи нам еще осталось продемонстрировать независимость физических результатов КЭД от параметра α, доказав тем самым и (уже использованную нами) калибровочную инвариантность S-матрицы. Это будет сделано с помощью континуального интегрирования в ходе изложения метода Фаддеева-Попова в неабелевых калибровочных теориях.

Тождества Уорда. Выше было отмечено значение теоремы Нётер для анализа следствий симметрийных преобразований полей. Однако в моделях со взаимодействием эти подходы, слишком привязанные к формальным решениям уравнений движения, оказываются уже не столь эффективными. Поэтому в калибровочных теориях на первые роли выходят другие методы, основанные на континуальном интегрировании и *тождествах Уорда*. Под этим названием обычно объединяют разнообразные соотношения для n-хвосток, проистекающие из калибровочной либо какой-то другой симметрии данной модели. Общая схема получения тождеств Уорда такова: преобразование $\varphi \to \varphi^\omega \simeq \varphi + \delta_\omega\varphi$ трактуется как замена переменных в континуальном интеграле (133), которая, естественно, не меняет его значения. Поэтому

$$\frac{\delta}{\delta\omega(x)} \int \mathscr{D}\varphi^\omega \; e^{i(\mathscr{L}(\varphi^\omega)+\varphi^\omega J)} \;\simeq\; \frac{\delta}{\delta\omega(x)} \int \mathscr{D}\varphi \,\Big(i\delta_\omega\mathscr{L} + iJ\delta_\omega\varphi + \mathrm{tr}\,\frac{\partial(\delta_\omega\varphi)}{\partial\varphi}\Big)\, e^{i(\mathscr{L}(\varphi)+\varphi J)} \;=\; 0\,, \tag{196}$$

где мы воспользовались известной формулой $\det M = \exp\,\mathrm{tr}\,(\ln M)$:

$$\mathscr{D}\varphi^\omega \;=\; \mathscr{D}\varphi\;\det\frac{\partial\varphi^\omega}{\partial\varphi}\,, \qquad \det\frac{\partial\varphi^\omega}{\partial\varphi} \;=\; \exp\,\mathrm{tr}\,\ln\Big(\mathbf{1}+\frac{\partial(\delta_\omega\varphi)}{\partial\varphi}\Big) \;\simeq\; \mathbf{1}+\mathrm{tr}\,\frac{\partial(\delta_\omega\varphi)}{\partial\varphi}\,. \tag{197}$$

Полагая (после вариации) $\omega = 0$, мы будем получать по схеме (196) некие соотношения, которые оказываются особенно интересными в тех случаях, когда (полный) лагранжиан $\mathscr{L}$ инвариантен или почти инвариантен при данных преобразованиях.

Проиллюстрируем технику вывода тождеств Уорда на двух примерах из квантовой электродинамики. В обоих случаях мера $\mathscr{D}\varphi$ не будет меняться, а вместо использования источников мы сразу поместим нужные нам поля под знак интеграла. Первый пример: рассмотрим локальное преобразование *только спинорных полей* $\psi \to e^{i\omega}\psi$, $\overline{\psi} \to e^{-i\omega}\overline{\psi}$ в континуальном интеграле $\int\mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}A\;\psi(x)\,\overline{\psi}(y)\,\exp(i\int dz\mathscr{L})$ с лагранжианом (191). Единственным источником неинвариантности в $\mathscr{L}$ оказывается слагаемое $i\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi$, а итоговым результатом преобразования станет появление множителя $\exp i[\,\omega(x)-\omega(y)+\int dz\,\omega(z)\,\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi)\,]$ под знаком континуального интеграла. Вариация по $\omega(z)$ приводит к тождеству Уорда

$$\int \mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}A\,\Big(\,\delta(x-z)-\delta(y-z)+\partial_\mu\big[\,\overline{\psi}(z)\gamma_\mu\psi(z)\,\big]\Big)\,\psi(x)\,\overline{\psi}(y)\,e^{i\mathscr{L}} \;=\; 0\,, \tag{198}$$

которое в конечном итоге удается представить в форме соотношения между сильносвязными двух- и треххвостками. В импульсном пространстве оно принимает вид $\Gamma_2(p)-\Gamma_2(q) = (p-q)_\mu\Gamma_3^\mu(p,q)$ и связывает между собой фермионную двуххвостку Γ_2 с треххвосткой Γ_3 типа фотон-фермион-фермион.

Второй пример: калибровочное преобразование (181), на этот раз полное, производится в континуальном интеграле $\int\mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}A\;\;A_\mu(x)\exp(i\int dz\mathscr{L})$. Изменения в лагранжиане обусловлены только калибровочно неинвариантным слагаемым с параметром α. Добавка первого порядка по ω равна континуальному интегралу от $\partial_\mu\omega(x) - i\alpha^{-1}A_\mu(x)\int dz\,\partial_\nu A_\nu(z)\,\partial^2\omega(z)$ с весом $\exp(i\mathscr{L})$. Тождество Уорда имеет вид

$$\int \mathscr{D}\overline{\psi}\,\mathscr{D}\psi\,\mathscr{D}A\,\big[\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta(x-z) - \frac{i}{\alpha}A_\mu(x)\,\partial^2\partial_\nu A_\nu(z)\,\big]\,e^{i\mathscr{L}} \;=\; 0\,. \tag{199}$$

Из него следует, что при любом α сильносвязное ядро Σ (131) фотонной двуххвостки в импульсном представлении имеет поперечную структуру: $\Sigma_{\mu\nu}(p) \sim g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu$.

6. Госты и BRST

Неабелевы калибровочные преобразования. Калибровочные теории, основанные на неабелевых (некоммутативных) группах, имеют свою специфику и требуют отдельного рассмотрения. В частности, при изучении этих теорий впервые реально понадобятся континуальные детерминанты. Рассмотрим модель, содержащую безмассовые векторные поля B^a_μ (*калибровочные поля* или *глюоны*) и фермионы ψ_i (*кварки*). Последние преобразуются по некоторому представлению неабелевой группы с генераторами t^a и антисимметричными структурными константами f^{abc},

$$\psi_i \;\to\; \psi_i + ig\,\omega^a t^a_{ij}\psi_j\,, \qquad [t^a,t^b] \;=\; if^{abc}t^c\,, \qquad f^{abc}f^{ade}+f^{abd}f^{aec}+f^{abe}f^{acd} \;=\; 0\,. \quad (200)$$

Здесь g – константа связи (заряд), а $\omega^a(x)$ – локальные параметры калибровочных преобразований. Поля B^a_μ преобразуются несколько сложнее,

$$B^a_\mu \;\to\; (B^a_\mu)^\omega \;=\; B^a_\mu + \partial_\mu\,\omega^a + gf^{abc}B^b_\mu\omega^c\,. \quad (201)$$

Составленный из них тензор $F^a_{\mu\nu}$ принадлежит присоединенному представлению,

$$F^a_{\mu\nu} \;\doteq\; \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu + gf^{abc}B^b_\mu B^c_\nu\,, \qquad F^a_{\mu\nu} \;\to\; F^a_{\mu\nu} + gf^{abc}F^b_{\mu\nu}\omega^c\,, \quad (202)$$

(при доказательстве использовано правое равенство в (200) – *тождество Якоби*), а калибровочно инвариантная комбинация $F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$, как и в КЭД, играет роль лагранжиана векторного поля, который на этот раз, кроме свободной части, включает также слагаемые, отвечающие взаимодействию глюонов:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(B) \;&=\; -\frac14 F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}\,(\partial_\mu B^a_\mu)^2 \;=\; -\frac14(\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu)^2 - \frac{1}{2\alpha}\,(\partial_\mu B^a_\mu)^2 \\ &\quad - \frac{g}{2}f^{abc}(\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu)\,B^b_\mu B^c_\nu - \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}B^b_\mu B^c_\nu B^d_\mu B^e_\nu\,. \quad (203)\end{aligned}$$

Закон преобразования калибровочных полей (201) обеспечивает нужные трансформационные свойства ковариантной производной

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\psi \;\doteq\; (\partial_\mu - igB^a_\mu\,t^a)\,\psi \;&\to\; (\partial_\mu - ig(B^a_\mu)^\omega t^a)\,(1+ig\,\omega^b t^b)\,\psi \\ &=\; (\partial_\mu - igB^a_\mu\,t^a - ig\,t^a\,\partial_\mu\,\omega^a - ig^2 f^{adc}B^d_\mu t^a\omega^c)\,(1+ig\,\omega^b t^b)\,\psi \\ &=\; (1+ig\,\omega^b t^b)\,(\partial_\mu - igB^a_\mu\,t^a)\,\psi \;=\; (1+ig\,\omega^b t^b)\nabla_\mu\psi\,, \quad (204)\end{aligned}$$

а его усложнение по сравнению с КЭД обусловлено, конечно, некоммутативностью. Коммутатор ковариантных производных, как всегда, связан с тензором $F^a_{\mu\nu}$:

$$[\nabla_\mu\,,\nabla_\nu] \;=\; -ig\,(\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu)\,t^a - g^2\,B^a_\mu B^b_\nu\,[t^a,t^b] \;=\; -ig\,F^a_{\mu\nu}\,t^a\,. \quad (205)$$

Метод Фаддеева-Попова. В квантовой электродинамике мы столкнулись с проблемой необратимости оператора K в $\mathscr{L}_0(A)$ (187) и решили ее, введя в лагранжиан неинвариантное слагаемое с параметром α. Аналогичное слагаемое мы, с теми же целями, сразу включили и в $\mathscr{L}(B)$ (203). Однако оказывается, что в неабелевом случае этого мало: потребуются и другие добавки к лагранжиану. Метод их получения, предложенный Фаддеевым и Поповым, основан на идее исключения "лишнего" интегрирования по полям, связанным друг с другом калибровочным преобразованием.

Будем говорить, что условие $f(B)=0$ *фиксирует калибровку*, если оно нарушается калибровочным преобразованием $B\to B^\omega$, то есть если $\omega^a\neq 0$ влечет за собой $f(B^\omega)\neq 0$. Реально мы ограничимся простейшими калибровочными условиями типа $f(B)=\partial_\mu B^a_\mu=0$. Проделаем следующую ключевую выкладку:

$$\int\mathscr{D}B \;=\int\mathscr{D}B\,\mathscr{D}f(B^\omega)\,\delta(f(B^\omega)) \;=\int\mathscr{D}B\,\mathscr{D}\omega\,\det\frac{\partial f(B^\omega)}{\partial\omega}\,\delta(f(B^\omega))$$
$$=\int\mathscr{D}\omega\int\mathscr{D}B\,\delta(f(B^\omega))\,\Delta_f[B] \;\sim\int\mathscr{D}B\,\delta(f(B))\,\Delta_f[B]\,. \quad (206)$$

Сначала мы ввели дополнительное интегрирование по значениям функции f. Поскольку они скоррелированы со значениями ω, то на втором шаге сделана замена континуальной переменной $f\to\omega$. Введенный на следующем шаге функционал

$$\Delta_f[B] \;\doteq\; \det\left[\frac{\partial f(B^\omega)}{\partial\omega}\right]_{f=0} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \Delta_f^{-1}[B] \;=\;\int\mathscr{D}\omega\,\delta(f(B^\omega)) \quad (207)$$

определяется видом f и по построению калибровочно инвариантен, $\Delta_f[B^\omega]=\Delta_f[B]$. Считая, что таким же свойством обладает и континуальная мера $\mathscr{D}B$, мы можем калибровочной заменой превратить B^ω в B в предпоследнем интеграле формулы (206). Тогда интеграция по $\mathscr{D}\omega$ даст просто числовой множитель (объем калибровочной группы), который мы, как всегда, опускаем. В итоге получается следующий рецепт континуального интегрирования по полям B^a_μ:

$$\int\mathscr{D}B\,\Phi(B) \;=\;\int\mathscr{D}B\,\delta(f(B))\,\Delta_f[B]\,\Phi(B)\,. \quad (208)$$

Здесь $\Phi(B)$ – любой калибровочно инвариантный объект. Лишние поля из интеграла устранены условием $f(B)=0$; в виде платы за это пришлось внести под знак интеграла величину $\Delta_f[B]$. Весь интеграл как целое, конечно же, от f не зависит.

Для нахождения $\Delta_f[B]$ на поверхности $f(B)=0$ нужно уметь вычислять детерминант из первого равенства (207) при $\omega=0$. Пусть $f(B)=\partial_\mu B^a_\mu=0$. Тогда

$$f(B^\omega) \;=\; \partial_\mu(B^a_\mu)^\omega \;=\; \partial^2\omega^a+gf^{acb}\partial_\mu(B^c_\mu\omega^b) \;=\; \partial^2\omega^a+gf^{acb}B^c_\mu\partial_\mu\omega^b \;=\; M^{ab}\omega^b\,,$$
$$M^{ab} \;=\; \delta^{ab}\partial^2+gf^{acb}B^c_\mu\partial_\mu\,, \qquad \Delta_f[B] \;=\; \det M \;=\;\int\mathscr{D}\bar c\,\mathscr{D}c\,\exp(i\,\bar c^a M^{ab}c^b)\,. \quad (209)$$

Руководствуясь (147), мы представили искомый детерминант в виде континуального интеграла по *фермионным* полям $\bar c\,,c$. Введение функционала $\Delta_f[B]$ оказалось в данном случае эквивалентным добавлению к лагранжиану двух новых слагаемых,

$$\mathscr{L}_{\rm gh} \;=\; -\partial_\mu\bar c^a\partial_\mu c^a+gf^{acb}\bar c^aB^c_\mu\partial_\mu c^b \;=\; -\partial_\mu\bar c^a\partial_\mu c^a-gf^{acb}\partial_\mu\bar c^aB^c_\mu c^b\,, \quad (210)$$

отвечающих полям *гостов*. Сразу видно, что пропагатор гостов равен (с обратным знаком и множителем δ^{ab}) пропагатору скалярного поля, а вершина взаимодействия связывает госты с глюонами. Однако в in- и out-состояниях госты, по определению, присутствовать не должны, это частицы фиктивные и сугубо виртуальные, их единственная роль в диаграммах – образовывать замкнутые петли. Кстати, можно было изначально свести $\Delta_f[B]$ к этим самым петлям, если раскрывать $\det M$ не по формуле (147), а с помощью $\det M=\exp\,\mathrm{tr}\,(\ln M)$. Структура лагранжиана гостов $\mathscr{L}_{\rm gh}$ (и даже сам факт их наличия) существенно зависит от вида калибровочного

условия, задаваемого функцией f. Отметим, что отсутствие гостов в КЭД объясняется тривиальностью оператора $M^{ab} = \delta^{ab}\partial^2$ в этом случае.

Нам осталось выполнить давнее обещание – доказать независимость интегралов вида (208) от калибровочного параметра α. Для этого модифицируем калибровочное условие, положив $f(B) = \partial_\mu B^a_\mu - b^a$. Функционал $\Delta_f[B]$ удобно записать в форме $\Delta_f[B] = \det(\,\delta^{ab}\partial^2 + g f^{acb}\,\partial_\mu \cdot B^c_\mu)$, одинаковой при любом выборе функции $b^a(x)$. Формуле (209) это не противоречит, ибо $\partial_\mu \cdot B^a_\mu = B^a_\mu\partial_\mu + \partial_\mu B^a_\mu$. Более того, оба представления для $\Delta_f[B]$ эквивалентны при любом B в силу очевидного равенства $\mathrm{tr}\,\ln(1+MN) = \mathrm{tr}\,\ln(1+NM)$, а соответствующие им выражения (210) для вклада гостов в лагранжиан – в силу $\partial^x_\mu D^c(x-y) = -\partial^y_\mu D^c(x-y)$. Сам интеграл (208) по построению не может зависеть от f, а значит и от b, поэтому если мы подвергнем его дополнительному интегрированию по $\mathscr{D}b$ с весом $\exp(-ib^a b^a/2\alpha)$, это приведет лишь к домножению на несущественный числовой фактор:

$$\begin{aligned}\int \mathscr{D}B\,\Phi(B) \;&= \int \mathscr{D}B\,\delta(\partial_\mu B^a_\mu - b^a)\,\Delta_f[B]\,\Phi(B)\\ &\sim \int \mathscr{D}B\,\mathscr{D}b\;\delta(\partial_\mu B^a_\mu - b^a)\,\Delta_f[B]\,\Phi(B)\;\exp(-\frac{i}{2\alpha}\,b^a b^a)\\ &= \int \mathscr{D}B\,\mathscr{D}\bar c\,\mathscr{D}c\,\Phi(B)\;\exp i\big(\mathscr{L}_{\mathrm{gh}} - \frac{1}{2\alpha}\,(\partial_\mu B^a_\mu)^2\big)\,. \quad (211)\end{aligned}$$

Итак, мы воспроизвели слагаемое с калибровочным параметром α и показали, что континуальные интегралы вида (208) от него не зависят. При этом интегралы от калибровочно неинвариантных величин (например, n-хвостки) вполне могут зависеть от α. Отметим, что в случае поперечной калибровки $\alpha = 0$, когда $\exp(-(\partial_\mu B^a_\mu)^2/2\alpha)$ не существует, вместо него как раз появляется $\delta(\partial_\mu B^a_\mu)$ в континуальном интеграле: эту δ-функцию можно условно трактовать как предел экспоненты при $\alpha \to 0$. Осталось сказать, что вместе с α-независимостью интегралов (208) нами установлена и калибровочная инвариантность S-матрицы. Выпишем теперь окончательное выражение для лагранжиана неабелевой калибровочной теории кварков и глюонов:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\psi,B) \;&=\; -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} + \overline{\psi}\,(i\gamma_\mu\nabla_\mu - m)\,\psi + \mathscr{L}_{\mathrm{gh}} - \frac{1}{2\alpha}\,(\partial_\mu B^a_\mu)^2\\ &=\; -\frac{1}{4}(\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu)^2 + \overline{\psi}\,(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\,\psi - \partial_\mu\bar c^a\partial_\mu c^a - \frac{1}{2\alpha}\,(\partial_\mu B^a_\mu)^2 + g\,\overline{\psi}\gamma_\mu B^a_\mu t^a\psi\\ &\quad + g f^{acb}\,\bar c^a B^c_\mu\partial_\mu c^b - \frac{g}{2}f^{abc}(\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu)\,B^b_\mu B^c_\nu - \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}B^b_\mu B^c_\nu B^d_\mu B^e_\nu\,. \quad (212)\end{aligned}$$

Метод BRST. Более общий взгляд на происхождение и роль гостов возможен в рамках *метода BRST*, названного по именам авторов – Becchi, Rouet, Stora, Тютин – и широко применяемого в теории калибровочных полей и струн. Центральным объектом данного метода является нильпотентный оператор δ. Рассмотрим сначала его простейшую реализацию,

$$\delta \;=\; c_i t_i - \frac{i}{2}f_{ijk}\,c_i c_j\frac{\partial}{\partial c_k}\,, \qquad [t_i,t_j] \;=\; i f_{ijk}\,t_k\,, \qquad c_i c_j \;=\; -c_j c_i\,, \quad (213)$$

где t_i – генераторы некоторой группы, а c_i – грассмановы переменные (будущие госты). Нильпотентность δ (свойство $\delta^2 = 0$) доказывается прямым вычислением.

Например, если генераторы t_i действуют на φ, то достаточно проверить

$$\delta^2\varphi \;=\; \delta(c_i t_i\varphi) \;=\; -\frac{i}{2}f_{jki}\,c_j c_k t_i\varphi + c_j c_i\, t_j t_i\varphi \;=\; -\frac{i}{2}f_{jki}\,c_j c_k t_i\varphi + \frac{1}{2}c_j c_i\,[t_j,t_i]\varphi \;=\; 0\,,$$

$$\delta^2 c_i \;=\; -\frac{i}{2}f_{jki}\,\delta(\,c_j c_k) \;=\; \frac{1}{2}f_{jki}f_{mnk}\,c_j c_m c_n \;=\; 0\,.$$

Последнее равенство есть следствие циклической структуры тождества Якоби.

Теперь запишем оператор δ в том виде, в котором он обычно используется в калибровочных теориях, добавив к (213), не нарушая нильпотентности, *антигосты* $\bar c_i$ (тоже грассмановы) и вспомогательные бозонные поля b_i:

$$\delta \;=\; c_i t_i - \frac{i}{2}f_{ijk}\,c_i c_j\frac{\partial}{\partial c_k} + b_i\frac{\partial}{\partial\bar c_i}\,, \qquad \delta^2 = \;0\,. \tag{214}$$

Соответствующие преобразования полей носят название *BRST-преобразований*:

$$\delta\varphi \;=\; c_i t_i\varphi\,, \quad \delta c_i \;=\; -\frac{i}{2}f_{ijk}\,c_j c_k\,, \quad \delta\bar c_i \;=\; b_i\,, \quad \delta b_i \;=0\,. \tag{215}$$

Теперь t_i – это генераторы *калибровочной* группы; они действуют на все поля (φ), из которых строилась исходная теория (глюоны, кварки и т. д.), производя над ними калибровочные преобразования согласно типу каждого поля. В привычных нам обозначениях первые соотношения из (215) имели бы вид

$$\delta\psi \;=\; igc^a t^a\psi\,, \quad \delta B^a_\mu \;=\; \partial_\mu c^a + g f^{abc}B^b_\mu c^c\,, \quad \delta c^a \;=\; -\frac{g}{2}\,f^{abc}c^b c^c\,. \tag{216}$$

Отметим, что госты и антигосты выступают в данном подходе как независимые поля, хотя в лагранжиане (210) это не бросалось в глаза; в частности, преобразования (215) у них совершенно различны.

Итак, мы ввели BRST-преобразования как калибровочные, но с гостами в качестве параметров. Переформулируем теперь метод Фаддеева-Попова на BRST-языке. Назовем *BRST-инвариантным* объект Φ, удовлетворяющий условию $\delta\Phi = 0$. Если выбрать полный лагранжиан квантовой неабелевой теории в виде суммы

$$\mathscr{L} \;=\; \mathscr{L}_{\rm inv} + \delta\Lambda \tag{217}$$

исходного калибровочно инвариантного лагранжиана $\mathscr{L}_{\rm inv}(\varphi)$, содержащего только поля φ, и добавки $\delta\Lambda$ с неинвариантным $\Lambda(\varphi,c,\bar c,b)$, то весь лагранжиан $\mathscr{L}$ будет BRST-инвариантен. Пусть калибровка фиксируется условиями $f_i(\varphi)=0$. Возьмем

$$\Lambda \;=\; (f_i + \frac{\alpha}{2}\,b_i)\,\bar c_i \qquad\Longrightarrow\qquad \mathscr{L} \;=\; \mathscr{L}_{\rm inv} + c_j t_j f_i\bar c_i + f_i b_i + \frac{\alpha}{2}\,b_i b_i\;. \tag{218}$$

Тогда континуальное интегрирование по $c,\bar c$ выдает детерминант $\det(t_j f_i)$ матрицы калибровочного преобразования условий f_i, который в точности соответствует функционалу $\Delta_f[B]$ (207). Интегрирование по полям b порождает $\exp(-if_if_i/2\alpha)$, а при $\alpha=0$ — соответственно, $\delta(f)$, воспроизводя лагранжиан (212).

Особенно прозрачным становится в этом подходе доказательство независимости теории от неинвариантной (фиксирующей калибровку) добавки Λ. Действительно, континуальный интеграл типа (211) с инвариантным Φ,

$$\int\mathscr{D}\phi\,\mathscr{D}\bar c\,\mathscr{D}c\,\mathscr{D}b\;\Phi\;\exp i(\mathscr{L}_{\rm inv}+\delta\Lambda) \;\equiv\int\mathscr{D}\Psi\;\Phi\;\exp i(\mathscr{L}_{\rm inv}+\delta\Lambda)\,, \tag{219}$$

при малых изменениях Λ сам может измениться только на величину вида

$$\int\mathscr{D}\Psi\,\Phi\;\delta X\;\exp i(\mathscr{L}_{\rm inv}+\delta\Lambda) \;=\; \int\delta\big(\mathscr{D}\Psi\;\Phi\;X\;\exp i(\mathscr{L}_{\rm inv}+\delta\Lambda)\big) \;=\; 0\,, \tag{220}$$

равную нулю, поскольку интеграл не меняется при заменах переменных.

7. Регуляризация

Расходимости. Подводя итоги нашего рассмотрения неабелевых калибровочных теорий, можно сказать, что теперь нам известен их полный квантовый лагранжиан. Еще раньше мы познакомились с некоторыми другими примерами лагранжианов, включающих поля изученных нами типов, а также с правилами (Фейнмана) составления диаграмм и вычисления амплитуд по заданному лагранжиану взаимодействия. В частности, было отмечено, что замкнутым петлям в диаграммах соответствуют интеграции по dp. Вскоре мы увидим, что эти интегралы часто оказываются расходящимися, то есть в исходном своем виде бессмысленными. Для преодоления этой трудности в квантовой теории поля разработана достаточно нетривиальная процедура, состоящая из двух основных этапов – *регуляризации* и *перенормировки*. При этом окажется, что доопределение расходящихся интегралов, с целью придания им смысла, замечательным образом укладывается в рамки того остаточного произвола, который был нами упомянут в контексте построения T-экспоненты.

Начнем исследование проблемы расходимостей квантовополевых интегралов с простого примера, отвечающего вкладу однопетлевой диаграммы с безмассовыми скалярными пропагаторами. Явный вид интересующего нас интеграла таков:

$$\int \frac{d^4p}{(p^2+i0)((k-p)^2+i0)} \;\sim\; \int^{\infty} \frac{|p|^3 d|p|}{|p|^4} \;\sim\; \ln\infty\,. \tag{221}$$

Для грубой оценки расходимости данного интеграла мы ввели радиальную переменную $|p|$. Поскольку такого рода замена выглядела бы более естественной в эвклидовом пространстве, произведем в интеграле вида

$$\int \frac{d^4p\, f(p\,,\ldots)}{p^2-l+i0} \;=\; \int \frac{dp_0\, d\mathbf{p}\, f(p\,,\ldots)}{p_0^2-\mathbf{p}^2-l+i0} \tag{222}$$

поворот контура интегрирования по dp_0 в согласии с расположением полюсов,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \;\to \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 \;= -i\int_{\infty}^{-\infty} dp_4 = i\int_{-\infty}^{\infty} dp_4 \qquad\Longrightarrow\qquad \int d^4p \;\to\; i\int d^4\tilde{p}\,, \tag{223}$$

считая, что функция f этому не мешает. Мы ввели здесь эвклидовы переменные

$$p_4 \;=\; ip_0\,, \qquad \tilde{p} \;=\; (\mathbf{p}, p_4)\,, \qquad \tilde{p}^2 \;=\; \mathbf{p}^2+p_4^2 \;=\; -p_0^2+\mathbf{p}^2 \;=\; -p^2\,. \tag{224}$$

С их помощью четырехмерные псевдоэвклидовы интегралы вида

$$\int d^4p\, F(p^2) \;=\; i\pi^2 \int_0^{\infty} d\tilde{p}^2\, \tilde{p}^2\, F(-\tilde{p}^2) \tag{225}$$

сводятся к однократным, взятым по (квадрату) радиальной эвклидовой переменной.

Применим этот результат для более детального анализа интеграла (221). С помощью соотношения $(ab)^{-1} = \int_0^1 dx[\,ax+b(1-x)\,]^{-2}$ и сдвига переменной $p \to p+xk$ его можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4p}{p^2(k-p)^2} \;&=\; \int d^4p \int_0^1 \frac{dx}{[\,p^2(1-x)+(k^2-2kp+p^2)x\,]^2} \;=\; \int_0^1 dx \int \frac{d^4p}{[\,p^2-2kp\,x+xk^2\,]^2} \\ &=\; \int_0^1 dx \int \frac{d^4p}{[\,p^2+k^2x(1-x)\,]^2} \;=\; i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^{\infty} \frac{d\tilde{p}^2\,\tilde{p}^2}{[\,\tilde{p}^2-k^2x(1-x)\,]^2}\,. \end{aligned} \tag{226}$$

Конечно, интеграл остался расходящимся, но теперь его можно регуляризовать, обрезав радиальное интегрирование на верхнем пределе M^2:

$$\int\frac{d^4p}{p^2(k-p)^2} \;\simeq\; i\pi^2\int_0^1 dx\int_0^{M^2}\frac{d\tilde p^2\,\tilde p^2}{[\,\tilde p^2-k^2x(1-x)\,]^2}$$
$$= \; i\pi^2\int_0^1 dx\left[\,\ln\frac{M^2-k^2x(1-x)}{-k^2x(1-x)}-1-\frac{k^2x(1-x)}{M^2-k^2x(1-x)}\,\right]$$
$$= \; i\pi^2\left(\ln\frac{M^2}{k^2}+1\right)+\mathcal{O}(\frac{1}{M^2}) \;=\; i\pi^2\left(\ln\frac{M^2}{\mu^2}-\ln\frac{k^2}{\mu^2}+1\right)+\mathcal{O}(\frac{1}{M^2})\,. \quad (227)$$

Мы ввели новый параметр μ, чтобы разнести по отдельным слагаемым величину $\ln(M^2/\mu^2)$, вобравшую в себя всю сингулярность (*логарифмическую* расходимость) исходного интеграла, формально соответствующего пределу $M\to\infty$, и регулярный k-зависимый вклад $\ln(k^2/\mu^2)$. Чтобы не отвлекаться на рассмотрение других возможных особенностей помимо расходимости интеграла на верхнем пределе, мы всегда допускаем нужный знак у k^2 и не делаем разницы между $\ln k^2$ и $\ln(-k^2)$.

Размерная регуляризация. Описанная выше регуляризация весьма наглядна, но при ближайшем рассмотрении у нее обнаруживается ряд существенных недостатков. Поэтому мы сейчас подробно изложим, и будем в дальнейшем использовать, другой метод регуляризации. Он носит название *размерной* (dimensional) регуляризации и имеет широчайшие применения, особенно в калибровочных теориях. Идея метода состоит в том, чтобы слегка уменьшить кратность интегралов, перейдя от размерности 4 к $n=4-2\varepsilon$. Для этого нам не придется строить последовательную теорию нецеломерных пространств: поскольку круг нужных нам подынтегральных выражений достаточно ограничен, то всё фактически сведется к замене целого числа m в формуле для обычного m-мерного эвклидова пространства,

$$\int d^mx\,f(x^2) \;=\; \frac{2\,\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\int_0^\infty dr\;r^{m-1}f(r^2) \;=\; \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\int_0^\infty dy\,y^{\frac{m}{2}-1}f(y)\,, \qquad (228)$$

на нецелое $n=4-2\varepsilon$. Ради удобства при этом еще домножают на $\pi^\varepsilon\Gamma(1-\varepsilon)$. Тогда, в сочетании с проведенной ранее эвклидизацией, базовое определение размерно регуляризованного импульсного интеграла примет вид

$$\int d^4p\;F(p^2) \;\to\int d^np\;F(p^2) \;=\; i\int d^n\tilde p\;F(-\tilde p^2) \;=\; \frac{i\pi^2}{1-\varepsilon}\int_0^\infty dy\;y^{1-\varepsilon}\,F(-y)\,. \quad (229)$$

Именно появление нецелой степени под интегралом и обеспечивает регуляризацию.

Для дальнейшей работы нам понадобится ряд формул. Начнем с Γ-функции:

$$\Gamma(z)\doteq\int_0^\infty dx\;x^{z-1}e^{-x},\qquad \int_0^1 dx\;x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \;=\; \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \;=\int_0^\infty\frac{dy\;y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,, \quad (230)$$

$$\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)\,,\qquad \Gamma(1)=\Gamma(2)=1\,,\qquad \Gamma(m+1)=m!\,,\qquad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\,, \quad (231)$$

$$\Gamma(1+\varepsilon) \;=\; e^{-\gamma\varepsilon}\,\exp\sum_{m=2}^\infty\frac{\zeta(m)}{m}(-\varepsilon)^m \;=\; e^{-\gamma\varepsilon}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\,\zeta(2)-\frac{\varepsilon^3}{3}\,\zeta(3)+\mathcal{O}(\varepsilon^4)\right), \quad (232)$$

$$\gamma \;\approx\; 0.577\,,\qquad \zeta(2)\;=\;\frac{\pi^2}{6}\,,\qquad \zeta(3)\;\approx\;1.202\,,\qquad \zeta(m)\;\doteq\;\sum_{l=1}^\infty\frac{1}{l^m}\,. \qquad (233)$$

Далее идут соотношения, превращающие несколько знаменателей в один,

$$\frac{1}{a^\alpha\, b^\beta} \;=\; \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{dx\; x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}}{[\,ax+b(1-x)\,]^{\alpha+\beta}}\,, \tag{234}$$

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1}\,\ldots\,a_m^{\alpha_m}} \;=\; \frac{\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_m)}{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 dx_1\ldots dx_m\; \frac{x_1^{\alpha_1-1}\ldots\,x_m^{\alpha_m-1}\,\delta(1-x_1-\ldots-x_m)}{[\,a_1x_1+\ldots+a_mx_m\,]^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}}\,, \tag{235}$$

а также (для справок) эквивалентные им и (229) формулы *α-представления*:

$$\frac{1}{A^\lambda} \;=\; \frac{i^{-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty d\alpha\; \alpha^{\lambda-1}\, e^{i\alpha A}\,, \qquad \int d^np\; e^{i(ap^2+2kp)} \;=\; \frac{-i\pi^2\,\Gamma(1-\varepsilon)}{a^{2-\varepsilon}}\; e^{-ik^2/a}\,. \tag{236}$$

Из (229), (230) и (234) без труда выводятся полезные рабочие формулы размерной регуляризации, которые послужат основой всех дальнейших наших вычислений:

$$\int \frac{d^np\;(p^2)^\beta}{(p^2+m^2)^\alpha} \;=\; \frac{i\pi^2\;\Gamma(\alpha-\beta-2+\varepsilon)\,\Gamma(2+\beta-\varepsilon)}{(m^2)^{\alpha-\beta-2+\varepsilon}\;(1-\varepsilon)\,\Gamma(\alpha)}\,, \tag{237}$$

$$\int \frac{d^np}{(p^2)^\alpha\,((k-p)^2)^\beta} \;=\; \frac{i\pi^2\;\Gamma(1-\varepsilon)\,\Gamma(\alpha+\beta-2+\varepsilon)\,\Gamma(2-\alpha-\varepsilon)\,\Gamma(2-\beta-\varepsilon)}{(k^2)^{\alpha+\beta-2+\varepsilon}\;\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(4-\alpha-\beta-2\varepsilon)}\,. \tag{238}$$

Так, можно сразу найти размерно регуляризованное выражение для интеграла (221):

$$\int \frac{d^np}{p^2(k-p)^2} \;=\; \frac{i\pi^2}{(k^2)^\varepsilon}\,\frac{\Gamma(\varepsilon)\,\Gamma^3(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)}\,. \tag{239}$$

При $\varepsilon\neq 0$ оно конечно, но непосредственного перехода к пределу $\varepsilon\to 0$ не допускает, так как Γ-функция в точках $0,-1,-2$ и т. д. имеет полюса. Например,

$$\Gamma(\varepsilon) \;=\; \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\,, \qquad \Gamma(-1+\varepsilon) \;=\; \frac{\Gamma(\varepsilon)}{-1+\varepsilon} \;=\; -\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\,. \tag{240}$$

Мы видим, что в размерной регуляризации сингулярности интегралов принимают вид отрицательных степеней параметра ε. Отметим, что появление $\Gamma(-1+\varepsilon)$ возможно в случае *квадратичной* расходимости интегралов, которая в первой регуляризации порождала бы вклады $\sim M^2$. Удобно обезразмерить интеграл (239) домножением на фактор $(\mu^2)^\varepsilon$. Теперь можно разложить ответ по степеням ε:

$$\frac{(\mu^2)^\varepsilon}{(k^2)^\varepsilon} \;=\; \exp\bigl(-\varepsilon\ln\frac{k^2}{\mu^2}\bigr)\,, \qquad (\mu^2)^\varepsilon\int \frac{d^np}{p^2(k-p)^2} \;=\; i\pi^2\,\bigl(\,\frac{1}{\varepsilon}-\ln\frac{k^2}{\mu^2}+2\,\bigr)+\mathcal{O}(\varepsilon)\,. \tag{241}$$

Сравнение с (227) показывает, что k-зависимость результата в двух регуляризациях получилась одинаковой, а константные вклады, в том числе сингулярные – разными. Важнейшее значение для предстоящей процедуры перенормировки будет иметь тот факт, что в обеих регуляризациях коэффициенты при сингулярных величинах, т. е. при $\ln(M^2/\mu^2)$ и $1/\varepsilon$ соответственно, не зависят от внешнего импульса k.

Выполнив первый конкретный расчет в технике размерной регуляризации, доведем теперь до конца формулировку ее базовых принципов. К размерно регуляризуемым интегралам принято относить те, чьи подынтегральные выражения удается привести к каноническому виду (229) с помощью алгебраических преобразований,

например, интегральных параметризаций типа (234)–(236), а также сдвигами импульсов интегрирования. В размерной регуляризации допускается дифференцирование по внешним импульсам, массам и другим параметрам:

$$\int d^n p\,\frac{\partial}{\partial k_\mu} f(p\,,k\,,\ldots) \;\doteq\; \frac{\partial}{\partial k_\mu}\int d^n p\, f(p\,,k\,,\ldots)\,, \qquad \int d^n p\,\frac{\partial}{\partial p_\mu} f(p\,,\ldots) \;=\; 0\,. \quad (242)$$

Второе равенство, эквивалентное инвариантности относительно сдвигов, дает возможность интегрировать по частям. Дифференцированием соотношений (237),(238) выводятся формулы для интегралов с компонентами импульса в числителе:

$$\int\frac{d^n p\;\; p_\mu p_\nu\,(p^2)^\beta}{(p^2+m^2)^\alpha} \;=\; \frac{g_{\mu\nu}\;\; i\pi^2\;\Gamma(\alpha-\beta-3+\varepsilon)\,\Gamma(3+\beta-\varepsilon)}{(m^2)^{\alpha-\beta-3+\varepsilon}\;(4-2\varepsilon)\,(1-\varepsilon)\,\Gamma(\alpha)}\;, \quad (243)$$

$$\int\frac{d^n p\;\; p_\mu}{(p^2)^\alpha\,((k-p)^2)^\beta} \;=\; \frac{i\pi^2\,k_\mu\;\Gamma(1-\varepsilon)\,\Gamma(\alpha+\beta-2+\varepsilon)\,\Gamma(3-\alpha-\varepsilon)\,\Gamma(2-\beta-\varepsilon)}{(k^2)^{\alpha+\beta-2+\varepsilon}\;\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(5-\alpha-\beta-2\varepsilon)}\,, \quad (244)$$

$$\begin{aligned}\int\frac{d^n p\;\; p_\mu p_\nu}{(p^2)^\alpha\,((k-p)^2)^\beta} \;=\; & \frac{i\pi^2\,\Gamma(1-\varepsilon)}{(k^2)^{\alpha+\beta-2+\varepsilon}}\left[k_\mu k_\nu\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta-2+\varepsilon)\,\Gamma(4-\alpha-\varepsilon)\,\Gamma(2-\beta-\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(6-\alpha-\beta-2\varepsilon)}\right.\\ & \left.+\;\frac{g_{\mu\nu}k^2}{2}\;\frac{\Gamma(\alpha+\beta-3+\varepsilon)\,\Gamma(3-\alpha-\varepsilon)\,\Gamma(3-\beta-\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(6-\alpha-\beta-2\varepsilon)}\right]\,. \quad (245)\end{aligned}$$

Приведем (без вывода) еще одно интересное соотношение,

$$\int\frac{d^n p}{(p^2)^\alpha} \;=\; \frac{2\pi^3\;\delta(\alpha-n/2)}{1-\varepsilon} \;=\; \frac{2\pi^3\;\delta(\alpha-2+\varepsilon)}{1-\varepsilon} \;\simeq\; 0\,. \quad (246)$$

Появление δ-функции отражает тот факт, что регуляризованный интеграл (229) не при всех F конечен. Однако на практике правую часть можно всегда считать нулем. Наконец, тензор $g_{\mu\nu}$ и матрицы γ_μ в рамках метода размерной регуляризации превращаются в формальные символы, наделяемые самосогласованным набором свойств:

$$g_{\mu\nu} \;=\; g_{\nu\mu}\,, \quad g_{\mu\nu}p_\nu \;=\; p_\mu\,, \quad g_{\mu\mu}=4-2\varepsilon\,, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{1} \;=\; 4\,, \quad (247)$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu \;=\; 2\,g_{\mu\nu}\,, \quad \gamma_\mu\gamma_\mu \;=\; 4-2\,\varepsilon\,, \quad \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu \;=\; (2\,\varepsilon-2)\,\gamma_\nu\,, \quad (248)$$

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu \;=\; -2\,\varepsilon\,\gamma_\alpha\gamma_\beta+4\,g_{\alpha\beta}\,, \quad \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\mu \;=\; 2\,\varepsilon\,\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\lambda-2\,\gamma_\lambda\gamma_\beta\gamma_\alpha\,. \quad (249)$$

Размерная регуляризация достаточно удобна в обращении и позволяет вычислять (аналитически) и более сложные интегралы, чем (237),(238). Но главным преимуществом этой регуляризации оказывается ее инвариантность относительно широкого класса симметрий, важнейшими из которых являются, конечно, калибровочные. Такая инвариантность объясняется тем, что данная регуляризация не искажает вида подынтегральных выражений и, вдобавок, сохраняет практически все свойства обычных интегралов. Благодаря этому, тождества Уорда, выражающие симметрию теории, как правило, выполняются тождественно по ε. Исключение представляют собой симметрии, существенно привязанные к конкретной размерности пространства. Так, ввести в размерной регуляризации аналог матрицы γ_5 удается лишь ценой отказа от равенства $[\gamma_5,\gamma_\mu]_+=0$, что ведет к нарушению киральной симметрии и возникновению аномалий. Схожие проблемы имеются и во взаимоотношениях размерной регуляризации и суперсимметрии (что не помешало, однако, успешному осуществлению ряда многопетлевых расчетов в суперсимметричных моделях).

8. Перенормировка

Структура сингулярностей однопетлевых диаграмм. На стадии регуляризации мы избавились от явных бесконечностей, заменив их сингулярными величинами типа $\ln(M^2/\mu^2)$ и $1/\varepsilon$. Но что с ними делать дальше? Ответ на этот вопрос подскажет анализ структуры сингулярностей интегралов, отвечающих однопетлевым диаграммам. Мы уже обращали внимание на тот факт, что сингулярные части (227) и (241) оказались константами – они не зависят от импульса k. Причина этого будет видна из следующего примера. Рассмотрим обобщение интеграла (239) на случай $m \neq 0$,

$$\int \frac{d^n p}{(p^2 - m^2)((k-p)^2 - m^2)} \,, \tag{250}$$

причем нас будет интересовать не полное аналитическое выражение (оно несколько громоздко), а только его сингулярная часть, имеющая вид A/ε. Сразу становится ясно, что коэффициент A не может зависеть ни от k, ни от m, поскольку дифференцирование подынтегрального выражения по k_μ или по m^2 делает интеграл сходящимся, то есть несингулярным, а это означает $\partial A/\partial k_\mu = \partial A/\partial m^2 = 0$, что и утверждалось. Если теперь поместить в числитель (250) некоторый полином по p, то после нескольких (конечного числа) аналогичных дифференцирований интеграл тоже станет сходящимся. Мы приходим к важному выводу: сингулярности однопетлевых интегралов могут зависеть от масс и внешних импульсов полиномиально (степень полинома определяется размерностью интеграла) либо не зависеть вообще.

Фурье-образом константы является δ-функция, а полинома – производная конечного порядка от нее. Если записать вклад однопетлевой диаграммы (скажем, треххвостки) в T-экспоненту как $G = \int dx\, dy\, dz\, \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)F(x,y,z)$, где поля φ отвечают внешним линиям, то фурье-образ $\tilde{F}(p,q,k)$ функции $F(x,y,z)$ можно будет, как мы только что выяснили, представить (с учетом сохранения импульса) в виде $\delta(p+q+k)[A/\varepsilon + \mathcal{O}(1)]$, а сингулярную часть самой функции $F(x,y,z)$ – в виде

$$\frac{A}{\varepsilon}\int dp\, dq\, dk\, e^{ipx+iqy+ikz}\delta(p+q+k) \;\sim\; \frac{A}{\varepsilon}\,\delta(x-z)\,\delta(y-z)\,. \tag{251}$$

Следовательно, сингулярная часть G оказывается *однократным* интегралом вида $A\,\varepsilon^{-1}\int d^4x\,\varphi^3(x)$ (если A – константа; если же сингулярность $\tilde{F}$ была полиномиальна по импульсам, то под знаком интеграла появятся производные от φ). На этом основании принято называть сингулярные части однопетлевых диаграмм *локальными*, понимая под этим в импульсном представлении их полиномиальность, а в координатном – то, что выполняется *одно* интегрирование от *локального* по x выражения. Конечно, полное (включающее и регулярную часть) выражение для G не будет локальным ни в p-, ни в x-представлении.

Ренормируемые и неренормируемые теории. Итак, сингулярные вклады однопетлевых диаграмм локальны, а значит по своей форме могут совпадать со слагаемыми (интеграла от) лагранжиана $\int dx\mathscr{L} = \int dx(\mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I)$. Но имеется ли здесь точное соответствие? Такая постановка вопроса делит все модели квантовой теории поля на два класса – на *ренормируемые* и *неренормируемые*. В ренормируемых теориях сингулярности однопетлевых диаграмм в точности соответствуют структурам исходного лагранжиана. Например, в модели $h\varphi^4$ это структуры $(\partial_\mu\varphi)^2, \varphi^2, \varphi^4$, и никаких иных типов сингулярностей однопетлевых диаграмм в этой модели нет. К ренормируемым теориям относятся также КЭД, КХД и ряд других. Модель $g\varphi^3$ называют

даже *супер-ренормируемой* за то, что у нее меньше сингулярностей, чем слагаемых в лагранжиане. Интересный пример являет собой модель $g\varphi\overline{\psi}\psi$. Диаграмма в виде фермионной петли с четырьмя скалярными внешними линиями расходится, и ее сингулярный вклад, естественно, пропорционален φ^4, хотя такой структуры в исходном лагранжиане нет. Однако в данном случае ситуацию легко поправить, просто добавив к лагранжиану эту недостающую структуру: модель $\mathscr{L}_I = g\varphi\overline{\psi}\psi + h\varphi^4$ уже будет ренормируемой. Пример неренормируемой теории дает модель четырехфермионного взаимодействия $g(\overline{\psi}\psi)^2$: здесь однопетлевая шестихвостка порождает сингулярный вклад $\sim (\overline{\psi}\psi)^3$, и т. д. Попытка включить такого рода вклады в лагранжиан только усугубляет трудности – появляются всё новые и новые типы сингулярностей.

Удобное мнемоническое правило позволяет сразу узнать, является ли теория ренормируемой или нет, исходя из размерности констант связи. Поскольку интеграл $\int dx\mathscr{L}$, стоящий в показателе экспоненты, обязан быть безразмерной величиной, то легко найти размерности (в единицах массы) всех объектов, входящих в соответствующий лагранжиан. Этим способом находим (в четырехмерном пространстве) размерности полей, $[\varphi] = [A_\mu] = 1$, $[\psi] = 3/2$, а затем и констант связи: они оказываются равными нулю для всех ренормируемых моделей, $+1$ – для суперренормируемой модели $(g\varphi^3)$, и *отрицательными* – для неренормируемых. Исключением из этого универсального правила выглядит пример *массивного* векторного поля, так как модели с такими полями могут быть неренормируемыми, но не за счет взаимодействия, а в силу специфического вида пропагатора (102), способствующего появлению расходимостей. К счастью, сказанное не относится к случаю, когда векторные поля приобретают массу за счет *спонтанного нарушения симметрии*; в частности, Стандартная модель оказывается ренормируемой. Отметим еще, что в размерной регуляризации размерности констант связи немного изменяются и (в ренормируемых моделях) принимают характерное значение $[h] = [g^2] = [e^2] = 2\varepsilon$ (в КЭД и КХД теория возмущений развивается по степеням *квадратов* зарядов e и g). Отсюда и возникает тот самый множитель $(\mu^2)^\varepsilon$, который появился в (241): изначально он задуман для обезразмеривания констант связи, а эффективно это приводит к домножению на соответствующий фактор каждого интеграла по $d^n p$.

Вычитания и контрчлены. Мы установили, что сингулярные вклады однопетлевых диаграмм повторяют структуру исходного лагранжиана: можно считать, что они как бы добавляются к нему. Но тогда возникает следующая идея: нельзя ли теперь *вычесть* эти вклады, чтобы избавиться хотя бы от однопетлевых сингулярностей? Это предложение относится, конечно, только к ренормируемым теориям, на которых мы теперь полностью и сосредоточимся, поскольку в неренормируемых, как мы видели, сингулярности размножаются неконтролируемым образом. Прежде чем развивать данную идею дальше, бросим взгляд на расходимости следующих порядков теории возмущений, рассмотрев пример двухпетлевого интеграла в модели φ^4:

$$(\mu^2)^{2\varepsilon}\int \frac{d^n p\; d^n q}{p^2(k-p)^2 q^2 (p-q)^2} \;=\; -\pi^4\left(\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{5}{2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\,\ln\frac{k^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(1)\,. \qquad (252)$$

При его вычислении была дважды использована формула (238), так как результат первого интегрирования по $d^n q$ получился пропорциональным $(p^2)^{-\varepsilon}$. Интереснейшей особенностью ответа является появление *нелокального*, но *сингулярного* слагаемого $\sim \varepsilon^{-1}\ln(k^2/\mu^2)$. Оно явно не вписывается в структуру (локального) лагранжиана и его просто так не вычтешь. Но происходит замечательная вещь: если бы мы всё же сделали в лагранжиане вычитания, необходимые для устранения *однопетлевых* син-

гулярностей, то *заодно с ними* исчезло бы и это (двухпетлевое) нелокальное сингулярное слагаемое. Убедиться в этом можно и без рисования диаграмм (и нахождения их комбинаторных множителей), прямо по интегралу (252): часть его подынтегрального выражения, $d^n q/q^2(p-q)^2$, отвечает *расходящемуся подграфу*, сингулярность которого, согласно (241), есть $i\pi^2/\varepsilon$. Вычитая из интеграла (252) эту *однопетлевую* подрасходимость, мы делаем результирующую сингулярность локальной,

$$(\mu^2)^\varepsilon \int \frac{d^n p}{p^2(k-p)^2} \left[(\mu^2)^\varepsilon \int \frac{d^n q}{q^2(p-q)^2} \; - \; \frac{i\pi^2}{\varepsilon} \right] \; = \; \pi^4 \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(1) \; . \qquad (253)$$

Это вполне логично, поскольку дифференцирование левой части (253) по внешнему импульсу k убивает расходимость интеграла по p, тогда как выражение в квадратных скобках регулярно по построению: в совокупности это и означает, что сингулярность вычтенного интеграла (253) не должна зависеть от k.

Ограничившись этим полезным примером, перейдем к общим утверждениям *теории перенормировок*. Устранение бесконечностей происходит по следующей схеме: вводя сингулярные добавки в лагранжиан для компенсации однопетлевых расходимостей, мы попутно добиваемся локальности двухпетлевых сингулярных вкладов; компенсируя их новыми добавками – делаем заодно локальным трехпетлевой вклад, и т. д. На языке диаграмм эта процедура сводится к последовательным вычитаниям сингулярных частей расходящихся подграфов и носит название R-операции. В лагранжиане ей соответствует введение *контрчленов* – компенсирующих сингулярных добавок. Их сумма по всем порядкам теории возмущений эквивалентна домножению каждой структуры лагранжиана $\mathscr{L}$ (типа $(\partial\varphi)^2, \varphi^4$ и т. п.) на некоторую *константу перенормировки* Z. Такие константы имеют вид формальных рядов по степеням константы связи и обратным степеням ε. Например, в модели $h\varphi^4$

$$Z(h\,,\varepsilon^{-1}) \; = \; 1 + \frac{Ah}{\varepsilon} + \frac{Bh^2}{\varepsilon^2} + \frac{Ch^2}{\varepsilon} + \mathcal{O}(h^3) \; = \; 1 + \frac{A(h)}{\varepsilon} + \frac{B(h)}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{\varepsilon^3}\big) \; . \qquad (254)$$

Из Z составляются *сингулярные* заряд $h_B = hZ_4 Z_2^{-2}$ и масса $m_B^2 = m^2 Z_m Z_2^{-1}$:

$$\frac{Z_2}{2}\,(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2 Z_m}{2}\,\varphi^2 + hZ_4\varphi^4 \; = \; \frac{1}{2}\,(\partial\varphi')^2 - \frac{m_B^2}{2}\,(\varphi')^2 + h_B(\varphi')^4\,, \qquad \varphi' = \sqrt{Z_2}\varphi\,. \quad (255)$$

Ввиду $\int \mathscr{D}\varphi\,\varphi^n \exp i\mathscr{L}(\varphi') \; = \; Z_2^{-n/2} \int \mathscr{D}\varphi\,\varphi^n \exp i\mathscr{L}(\varphi)$, переход к полям φ' домножает n-хвостки на $Z_2^{-n/2}$, а в амплитудах перенормирует in- и out-состояния, что, согласно (75), не влияет на наблюдаемые величины. Включая $(\mu^2)^\varepsilon$ в определение h_B, чтобы сделать h безразмерным, мы приходим к финальному результату

$$Z_F(h\,,\varepsilon^{-1}) \cdot F\big(\{k_i\},\, h_B(\mu^2, h\,, \varepsilon^{-1}),\, m_B^2(m^2, h\,, \varepsilon^{-1}),\, \varepsilon\big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F_{\rm ren}(\{k_i\}, \mu^2, h\,, m^2)\,, \quad (256)$$

$$h_B \; = \; (\mu^2)^\varepsilon \big(h + \frac{ah^2}{\varepsilon} + \frac{bh^3}{\varepsilon^2} + \frac{ch^3}{\varepsilon} + \mathcal{O}(h^4) \big)\,, \qquad m_B^2 \; = \; m^2 \big(1 + \frac{Ah}{\varepsilon} + \mathcal{O}(h^2) \big)\,, \quad (257)$$

смысл которого в том, что после введения контрчленов (эквивалентно: после замены исходных зарядов и масс на сингулярные, а также, возможно, домножения на константу Z_F, если F не физическая наблюдаемая величина, а скажем, n-хвостка) мы можем, наконец, перейти к пределу $\varepsilon \to 0$, то есть *снять регуляризацию*. Должным образом подобранные сингулярности контрчленов сократят сингулярности, идущие из расходящихся диаграмм, и *перенормированная* величина $F_{\rm ren}$ окажется конечной.

9. Ренормгруппа

Попробуем изобразить историю борьбы с расходимостями в виде схемы:

$$F(k,g,m) \;\xrightarrow{\infty}\; F_{\rm reg}(k,M,g,m) \;\xrightarrow{M\to\infty}\; F_{\rm ren}(k,\mu,g,m) \;\xrightarrow{\text{РГ}}\; F_{\rm phys}(k,\Lambda,m)\,. \qquad (258)$$

Здесь k условно обозначает все импульсные аргументы, μ можно понимать как $\sqrt{\mu^2}$, и т. п. Смысл этой диаграммы такой. Сначала, еще не зная ни о каких расходимостях, мы могли ожидать, что некая интересующая нас функция F будет зависеть от внешних импульсов k, константы связи g и массы m. Но вмешались бесконечности, и нам пришлось ввести регуляризацию (M). Добавив в лагранжиан сингулярные контрчлены, мы смогли перейти к пределу $M\to\infty$ и получить перенормированную функцию $F_{\rm ren}$, свободную от бесконечностей (заработав, правда, при этом новый параметр μ; такого рода *ренормировочный параметр* с неизбежностью появляется при любой регуляризации). Но на последнем шаге (он еще не сделан) мы фактически освободимся и от μ, ибо на самом деле $F_{\rm ren}$ окажется функцией от некоторой комбинации $\Lambda(\mu,g)$, вобравшей в себя всю зависимость от μ и g. Тем самым, эффективное число аргументов функции F вернется к прежнему значению, только вместо безразмерного заряда g будет фигурировать размерная величина Λ.

Этот оставшийся шаг основан на идеях *ренормгруппы* и тесно связан с вопросом об однозначности определения функции $F_{\rm ren}$ в процессе перенормировки. С одной стороны, сингулярные компенсирующие вклады (контрчлены) произвольно менять нельзя, иначе не сократятся расходимости. Но с другой – никто не мешает, наряду с сингулярными, добавлять к лагранжиану и конечные поправки, тем более что такие действия вполне укладываются в рамки произвола, изначально заложенного в определение T-экспоненты. С физической же точки зрения, добавление контрчленов (конечных и даже бесконечных) может быть оправдано тем, что истинные значения g, m и других возможных параметров лагранжиана a priori все равно неизвестны, и выясняются только по результатам сравнения предсказаний теории с экспериментом.

Эффективный заряд и β-функция. В основе ренормгруппы лежит следующий фундаментальный *принцип ренорм-инвариантности*, эквивалентный утверждению о перенормируемости теории: добавление любых конечных (несингулярных) контрчленов в точности компенсируется конечным изменением масс и зарядов. Под точной компенсацией имеется в виду неизменность *любых* физических величин, вычисляемых в данной теории (*нефизические* величины типа n-хвосток могут при этом приобретать дополнительный множитель). Рассмотрим очевидный (хотя и не самый общий) пример введения конечных контрчленов – изменение значения ренормировочного параметра $\mu\to\mu'$. Отвечающее ему конечное изменение заряда

$$g \;\to\; g' \;=\; \overline{g}\big(\frac{\mu'}{\mu}\,,g\big) \qquad\Longrightarrow\qquad f\big(\frac{k}{\mu}\,,g\big) \;=\; f\big(\frac{k}{\mu'}\,,g'\big) \;=\; f\big(\frac{k}{\mu'}\,,\overline{g}\big(\frac{\mu'}{\mu}\,,g\big)\big) \qquad (259)$$

подбирается так, чтобы физика (в лице безразмерной функции f) оставалась неизменной. Функция $\overline{g}(\mu'/\mu\,,g)$ – *эффективный заряд* или *бегущая константа связи* (running coupling) – задает преобразование заряда $g\to g'$ в явном виде. (Для простоты изложения мы забываем про массы; в общем случае надо еще вводить *эффективную массу* $\overline{m}$). Исходно, термин *ренормгруппа* относился именно к этой однопараметрической группе преобразований $\mu\to\mu', g\to g'$. По сути, речь идет о функциональной зависимости $g(\mu)$, налагаемой требованием физической инвариантности и

реализуемой функцией $\overline{g}$. Очевидное условие согласования для $\overline{g}$,

$$g'' \;=\; \overline{g}\big(\frac{\mu''}{\mu}\,,g\big) \;=\; \overline{g}\big(\frac{\mu''}{\mu'}\,,g'\big) \;=\; \overline{g}\big(\frac{\mu''}{\mu'}\,,\overline{g}\big(\frac{\mu'}{\mu}\,,g\big)\big)\,, \tag{260}$$

выражает тот факт, что путь $\mu\to\mu'\to\mu''$ можно пройти и за один шаг, и за два.

Центральное место в аппарате ренормгруппы занимает *β-функция* – скорость изменения заряда g в ответ на изменение μ, иначе говоря – производная функции $\overline{g}$:

$$\beta(g) \;\doteq\; \frac{dg}{d\ln\mu}\bigg|_{\text{физ = const}} \;=\; \frac{dg'}{d\ln\mu'}\bigg|_{g'=g} \;=\; \frac{\partial}{\partial\ln t}\,\overline{g}(t,g)\,\big|_{t=1} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\,\overline{g}(t,g)\,\big|_{t=1}\,. \tag{261}$$

С ее помощью ренормгрупповую зависимость $g(\mu)$ можно представить в виде

$$d\ln\mu=\frac{dg}{\beta(g)}\equiv\,d\psi(g) \quad\Longleftrightarrow\quad d\Lambda=0\,, \quad \psi(g)=\int^g\frac{du}{\beta(u)}\,, \quad \Lambda(\mu,g)=\mu\,e^{-\psi(g)}\,. \tag{262}$$

Точкам на плоскости $\{\mu,g\}$, связанным преобразованиями ренормгруппы, соответствует одна и та же физика, и одно и то же значение $\Lambda(\mu,g)$. Это и означает, что наблюдаемые величины реально зависят от Λ, а не от μ и g по отдельности.

Несколько слов о методике практического вычисления β-функций. Как видно из (256), ренормгрупповую зависимость $g(\mu)$ можно задавать не только в форме (262), но и условием $g_B=\text{const}$. Значит, определение (261) можно переписать и так:

$$\beta(g) \;=\; \frac{dg}{d\ln\mu}\bigg|_{g_B=\text{const}} \;=\; -\frac{\partial g_B/\partial\ln\mu}{\partial g_B/\partial g}\,. \tag{263}$$

Например, в M-регуляризации сингулярный заряд есть формальный ряд вида

$$g_B\big(\ln\frac{M}{\mu},g\big) \;=\; g+a(g)\ln\frac{M}{\mu}+b(g)\ln^2\frac{M}{\mu}+\mathcal{O}\big(\ln^3\frac{M}{\mu}\big)\,, \tag{264}$$

поэтому

$$\beta(g) \;=\; \frac{a(g)+2b(g)\ln(M/\mu)+\ldots}{1+a'(g)\ln(M/\mu)+\ldots} \;=\; a(g)+\big[2b(g)-a(g)a'(g)\big]\ln\frac{M}{\mu}+\mathcal{O}\big(\ln^2\frac{M}{\mu}\big)\,.$$

Все сингулярности в выражении для $\beta(g)$ обязаны сократиться, так что из правой части мы извлекаем не только ответ для β-функции, но и явные формулы, выражающие через нее коэффициентные функции при любых старших степенях $\ln(M/\mu)$:

$$\beta(g) \;=\; a(g)\,, \qquad b(g) \;=\; \frac{1}{2}\,a(g)\,a'(g) \;=\; \frac{1}{2}\,\beta(g)\beta'(g)\,, \quad \ldots \tag{265}$$

Аналогичное вычисление в ε-регуляризации имеет ту особенность, что в определении (263) надо еще взять предел $\varepsilon\to0$:

$$g_B \;=\; \mu^\varepsilon\big(g+\frac{a(g)}{\varepsilon}+\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon^2})\big)\,, \qquad \beta(g) \;=\; -\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\partial g_B/\partial\ln\mu}{\partial g_B/\partial g} \;=\; \big(g\frac{\partial}{\partial g}-1\big)\,a(g)\,. \tag{266}$$

Несмотря на некоторое различие правил нахождения β-функции в этих двух подходах, общий принцип ясен: $\beta(g)$ определяется коэффициентной функцией при самой *младшей* сингулярности, а коэффициенты при всех старших через нее выражаются.

Уравнения ренормгруппы. Перепишем условия (259),(260) в более удобном виде

$$f(xt,g) \;=\; f\big(x,\overline{g}(t,g)\big)\,, \qquad \overline{g}(xt,g) \;=\; \overline{g}\big(x,\overline{g}(t,g)\big)\,, \qquad \overline{g}(1,g) \;=\; g\,. \tag{267}$$

Дифференцируя второе из этих равенств по x в точке $x=1$, и привлекая определение β-функции (261), получим ренормгрупповое уравнение для $\overline{g}(t,g)$:

$$t\frac{\partial}{\partial t}\,\overline{g}(t,g) \;=\; \beta(\overline{g}(t,g))\,. \tag{268}$$

Выразить t-зависимость функции $\overline{g}(t,g)$, считая g просто параметром, можно и в виде следующих соотношений, эквивалентных уравнению (268):

$$d\ln t \;=\; \frac{d\overline{g}(t,g)}{\beta(\overline{g}(t,g))} \;=\; d\psi(\overline{g}(t,g))\,, \qquad \ln t \;=\; \psi(\overline{g}(t,g)) - \psi(g) \;=\int_g^{\overline{g}(t,g)} \frac{du}{\beta(u)}\,. \tag{269}$$

Аналогично, дифференцируя два первых равенства в (267) по t при $t=1$, а потом переобозначая x через t, приходим к альтернативной форме уравнений ренормгруппы:

$$\big(t\frac{\partial}{\partial t} - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\big)\overline{g}(t,g) \;=\; 0\,, \qquad\qquad \big(t\frac{\partial}{\partial t} - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\big)f(t,g) \;=\; 0\,. \tag{270}$$

Ясно, что с учетом начального условия $\overline{g}(1,g)=g$ эффективный заряд $\overline{g}(t,g)$ однозначно восстанавливается по функции $\beta(g)$ с помощью любого из уравнений (268), (270) – в этом смысле они эквивалентны. Далее, подставляя формальное разложение $\overline{g}(t,g)$ по степеням $\ln t$ в первое равенство (270), получаем

$$\overline{g}(t,g) \;=\; g + \beta(g)\ln t + b(g)\ln^2 t + \ldots\,, \qquad b(g) \;=\; \frac{1}{2}\beta(g)\beta'(g)\,, \quad \ldots \tag{271}$$

и приходим к следующему выводу: зная коэффициент при первой степени $\ln t$, т. е. функцию $\beta(g)$, мы знаем и весь ряд (271). Другими словами, ренормгруппа восстанавливает все логарифмические вклады по самому младшему из них.

Особенно важно, что при этом мы иногда имеем возможность улучшать свойства рядов теории возмущений. Пусть t в первом из равенств (267) имеет смысл большого по величине импульсного аргумента (точнее, большого множителя, *равномерно* увеличивающего *все* импульсы, ибо *неоднородные* асимптотики часто выходят за рамки возможностей ренормгруппы). Мы видим, что асимптотическая зависимость f от импульса эффективно перешла в заряд, оправдывая название функции $\overline{g}$. Если же $\overline{g}(t,g)$ при больших t еще и стремится к нулю, то действительно можно говорить об улучшении теории возмущений: вместо исходного заряда g (малым параметром, возможно, не являющегося) мы получаем право использовать асимптотически малую величину $\overline{g}(t,g)$ в качестве нового параметра разложения. Такая ситуация носит название *асимптотической свободы* и осуществляется при *отрицательном* знаке однопетлевого вклада в β-функцию: $\beta(g) = ag^2 + \mathcal{O}(g^3)$, $a<0$. Ограничиваясь этим приближением для $\beta(g)$, получим из ренормгруппового уравнения (268)

$$t\frac{\partial}{\partial t}\,\overline{g}(t,g) \;=\; a\,\overline{g}^2(t,g) \qquad\Longrightarrow\qquad \overline{g}(t,g) \;=\; \frac{g}{1-ag\ln t} \;\sim\; \frac{1}{|a|\ln t}\,, \tag{272}$$

то есть эффективный заряд в этом случае логарифмически убывает при больших t. По сути, единственным примером асимптотически свободной теории служит КХД,

в которой $a \sim (-11 + \frac{2}{3}n_f)$, где n_f – число сортов кварков. По современным представлениям $n_f = 6$, благодаря чему a оказывается отрицательным.

Как было отмечено выше, у n-хвосток и им подобных объектов (обозначим их Γ) закон ренормгруппового преобразования отличается от (267) на фактор Z_Γ:

$$\Gamma(xt, g) = Z_\Gamma^{-1}(t, g)\Gamma(x, \overline{g}(t, g))\,, \;\; Z_\Gamma(xt, g) = Z_\Gamma(t, g)Z_\Gamma(x, \overline{g}(t, g))\,, \;\; Z_\Gamma(1, g) = 1\,. \quad (273)$$

Дифференцированием получаем отсюда уравнения ренормгруппы для Z_Γ и Γ:

$$t\frac{\partial}{\partial t}\ln Z_\Gamma(t, g) \;=\; \gamma_\Gamma(\overline{g}(t, g))\,, \qquad \big(t\frac{\partial}{\partial t} - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + \gamma_\Gamma(g)\big)\Gamma(t, g) \;=\; 0\,. \quad (274)$$

Введенную здесь функцию

$$\gamma_\Gamma(g) \;\doteq\; \frac{\partial}{\partial t}\,\ln Z_\Gamma(t, g)\,\big|_{t=1} \quad (275)$$

называют *аномальной размерностью*. Ее, как и $\beta(g)$, вычисляют по теории возмущений. Решения уравнений (274) можно, с помощью (269), записать в виде

$$Z_\Gamma(t, g) \;=\; \exp\int_1^t \frac{du}{u}\,\gamma_\Gamma(\overline{g}(u, g)) \;=\; \exp\int_g^{\overline{g}(t,g)} \frac{du\,\gamma_\Gamma(u)}{\beta(u)}\,, \quad (276)$$

$$\Gamma(xt, g) \;=\; \Gamma(x, \overline{g}(t, g))\,\exp\left[-\int_g^{\overline{g}(t,g)} \frac{du\,\gamma_\Gamma(u)}{\beta(u)}\right]\,, \quad (277)$$

чтобы затем разлагать (в случае асимптотической свободы) по степеням $\overline{g}(t, g)$.

Схемная зависимость. Нам осталось объяснить, как осуществляется переход к аргументу Λ. Совместим это с изучением проблемы зависимости ренормгрупповых величин от схемы перенормировки. То, что различные варианты процедуры перенормировки (например, основанные на разных регуляризациях) приводят к различным выражениям для β-функции и многих других объектов, не удивительно. Однако физические величины не должны, по идее, зависеть от этого. Снова переписав ключевое соотношение (259), на этот раз в форме

$$f\big(\frac{k}{\mu}, g\big) \;=\; f\big(1\,, \overline{g}\big(\frac{k}{\mu}, g\big)\big) \;\doteq\; \Phi\,\big(\ln\frac{k}{\Lambda}\big)\,, \quad (278)$$

можно ожидать, что схемная зависимость, если она есть в функциях f и $\overline{g}$, должна каким-то образом сократиться. При этом выяснится, что функция Φ от перенормировочной схемы практически не зависит.

Согласно принципу ренорм-инвариантности, разные способы перенормировки могут отличаться лишь на конечные контрчлены. Если условиться в обеих схемах обозначать ренормировочный параметр через μ, то всё различие схем должно свестись к переопределению заряда $g \to \tilde{g}(g)$ (массы мы не рассматриваем). Соответственно, для физических (f) и нефизических (Γ) объектов формулы перехода имеют вид

$$f\big(\frac{k}{\mu}, g\big) \;=\; \tilde{f}\big(\frac{k}{\mu}, \tilde{g}(g)\big)\,, \qquad \Gamma\big(\frac{k}{\mu}, g\big) \;=\; q(g)\,\tilde{\Gamma}\big(\frac{k}{\mu}, \tilde{g}(g)\big)\,. \quad (279)$$

Далее, прямыми следствиями определений (262) являются равенства

$$\frac{dg}{\beta(g)} \;=\; d\psi(g) \;=\; d\ln\mu \;=\; d\tilde{\psi}(\tilde{g}) \;=\; \frac{d\tilde{g}}{\tilde{\beta}(\tilde{g})}\,, \quad (280)$$

которые говорят о том, что весь схемный произвол в $\psi(g)$ сводится к аддитивной, а в Λ – к мультипликативной константе (*не зависящей* от g):

$$\tilde\psi(\tilde g(g)) \;=\; \psi(g)+\mathrm{const}\,, \qquad \tilde\Lambda(\mu,\tilde g(g)) \;=\; \mu\,\exp\bigl(-\tilde\psi(\tilde g(g))\bigr) \;=\; \Lambda(\mu,g)\cdot\mathrm{const}\,. \quad (281)$$

Впрочем, при внимательном рассмотрении формул (262) становится ясно, что именно такие допуски были предусмотрены уже в определениях этих функций. Приведем также вытекающее из (280) правило пересчета β-функции в другую схему, а заодно и аналогичную формулу для аномальной размерности:

$$\tilde\beta(\tilde g(g)) \;=\; \beta(g)\,\frac{d\tilde g(g)}{dg}\,, \qquad \tilde\gamma_{\Gamma}(\tilde g(g)) \;=\; \gamma_{\Gamma}(g)-\beta(g)\,\frac{d\ln q(g)}{dg}\,. \quad (282)$$

Применяя формулу для β в стандартной ситуации

$$\beta(g)=ag^2+bg^3+cg^4+\dots\,, \qquad \tilde\beta(g)=\tilde ag^2+\tilde bg^3+\tilde cg^4+\dots\,, \qquad \tilde g(g)=g+Ag^2+\dots\,,$$

наблюдаем любопытный эффект: два первых коэффициента β-функции не зависят от схемы, зависимость начинается только с третьего, $\tilde a=a$, $\tilde b=b$, $\tilde c\neq c$.

Чтобы найти связь между $\overline{g}$ и Λ, а также явный вид Φ, объединим (269) и (278):

$$\psi\bigl(\overline{g}(\frac{k}{\mu},g)\bigr) \;=\; \psi(g)+\ln\frac{k}{\mu} \;=\; \ln\frac{k}{\Lambda} \;\doteq\; L\,, \qquad \overline{g} \;=\; \psi^{-1}(L)\,, \qquad f(1,\overline{g}) \;=\; \Phi(L)\,. \quad (283)$$

Итак, для перехода к (более физическому) аргументу L надо обратить функцию ψ. После этого, подстановка результата в f даст Φ. Применим (279) для выяснения схемной зависимости функции Φ:

$$\Phi(\psi(x)) \;=\; f(1,x) \;=\; \tilde f(1,\tilde g(x)) \;=\; \tilde\Phi(\tilde\psi(\tilde g(x))) \;=\; \tilde\Phi(\psi(x)+\mathrm{const})\,. \quad (284)$$

Она, как видим, исчерпывается возможностью сдвига аргумента на константу, что как раз соответствует мультипликативному произволу в Λ или аддитивному в L.

Явное нахождение $\psi(g)$ потребует разложения подынтегрального выражения из определения (262) в формальный ряд. Типичный вид ответа таков:

$$\beta(g) \;=\; ag^2+bg^3+\mathcal{O}(g^4) \quad\Longrightarrow\quad \psi(g) \;=\; -\frac{1}{ag}-\frac{b}{a^2}\ln g+\mathrm{const}+\mathcal{O}(g)\,. \quad (285)$$

Обратная функция ψ^{-1}, нужная нам для замены $\overline{g}$ на L, тоже ищется в виде формального разложения. Окончательные результаты обычно выглядят примерно так:

$$\overline{g} \;=\; \psi^{-1}(L) \;=\; -\frac{1}{aL}-\frac{b}{a^3}\frac{\ln L}{L^2}+\frac{c}{L^2}+\mathcal{O}(\frac{\ln^2 L}{L^3})\,, \quad (286)$$

$$f\bigl(\frac{k}{\mu},g\bigr) \;=\; f(1,\overline{g}) \;=\; \Phi(L) \;=\; 1+\frac{A}{L}+\frac{B\ln L}{L^2}+\frac{C}{L^2}+\mathcal{O}(\frac{\ln^2 L}{L^3}) \;=\; \sum_{mn}A_{mn}\frac{\ln^m L}{L^n}\,. \quad (287)$$

Преимущество разложений по $1/L$ вида (287) над рядами улучшенной теории возмущений по степеням $\overline{g}$ заключается в их практической независимости от схемы перенормировки. Точнее говоря, наборы коэффициентов A_{mn} в двух разных схемах могут поначалу различаться, но одна-единственная операция – сдвиг L на надлежащую константу – эту разницу полностью устраняет.