ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 130, № 2
февраль, 2002

И. Д. Манджавидзе*,†, А. Н. Сисакян†

ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЕ ОПИСАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ СВЯЗЯМИ ПРОЦЕССОВ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ[1)]

Дается теоретико-полевое описание процессов диссипации, ограниченных высокой группой симметрии. Формализм излагается на примере процессов множественного рождения адронов, в которых переход к термодинамическому равновесию происходит в результате диссипации кинетической энергии сталкивающихся частиц в массы адронов. Динамика этих процессов ограничена необходимостью учитывать связи, ответственные за невылетание цветового заряда. Развита более общая S-матричная формулировка термодинамики неравновесных диссипативных процессов, найдено необходимое и достаточное условие корректности такого описания, сходное с условием ослабления корреляций, которое по Боголюбову должно иметь место при приближении системы к равновесию. Физически такая ситуация должна возникать в процессах с очень большой множественностью, по крайней мере в случае, если масса адронов отлична от нуля. Излагается также новая схема теории возмущений сильной связи, удобная для учета симметрийных ограничений на динамику процессов диссипации. Приводится обзор литературы, посвященной обсуждаемой проблеме.

Посвящается светлой памяти
Александра Михайловича Балдина –
замечательного ученого и человека

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 180
  1.1. Процессы диссипации энергии и множественное рождение частиц 180
  1.2. Микроканонический формализм 183
  1.3. Квантование со связями 184
  1.4. Основные положения и результаты 188
2. Теория поля в реальном времени и при конечных температурах 189
  2.1. Теория S-матрицы при конечных температурах 189

[1)] Статья написана по заказу Редколлегии.

*Институт физики АН Грузии, Тбилиси, Грузия
†Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

2.2. Унитарное определение меры ... 199
3. Квантование на фактормногообразиях ... 204
3.1. Введение в теорию преобразований ... 204
3.2. Общая теория преобразований ... 208
4. $O(4,2)$-инвариантная скалярная теория ... 215
4.1. Производящий функционал скалярного безмассового поля ... 215
4.2. Структура $O(4,2)/O(4) \times O(2)$-факторпространства ... 216
4.3. Законы сохранения в факторпространстве ... 218
5. Неабелевы калибровочные теории ... 221
5.1. Теория Янга–Миллса на мере Дирака ... 221
5.2. Формализм первого порядка ... 222
5.3. Отображение в факторпространство ... 223
5.4. Калибровочная инвариантность и расходимости ... 226
5.5. Производящий функционал в теории Янга–Миллса ... 227
6. Заключение ... 228

1. ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемом обзоре сделана попытка описать неравновесные процессы, ограниченные высокой группой симметрии. Наиболее близким для авторов примером такого рода являются процессы множественного рождения адронов, хотя, по-видимому, этим не ограничивается разнообразие физических приложений изложенного формализма.

Итак, мы попытаемся сформулировать теорию возмущений для задач неравновесной, в данном случае релятивистской, термодинамики с учетом связей, сопутствующих высокой симметрии задачи. А именно, мы хотим описать диссипацию кинетической энергии сталкивающихся частиц в массы адронов. Этот процесс мы будем понимать как одну из форм термализации начального состояния. Мы будем полагать, что при этом первичная энергия переходит в массы цветовых составляющих адронов и в энергию связи цветовых зарядов.

Надо отметить несомненную важность самой проблемы определения понятия равновесия в диссипативных системах. Например, интерес к этому вопросу зачастую обусловлен тем, что в таких системах переход к равновесию понимается как стремление к определенному "порядку" [1].

В данной постановке задачи нас будет интересовать S-матричная формулировка, в которой мы можем произвольно задать начальное и конечное состояния на бесконечно удаленных гиперповерхностях σ_∞. Мы полагаем, что симметрии посредством соответствующих законов сохранения, включая скрытые ("полиномиального типа"), могут ограничить процесс диссипации и тем самым повлиять на вероятность реализации тех или иных асимптотических состояний на σ_∞. Вопросы, насколько и как они могут это сделать, будут предметом дальнейшего обсуждения.

1.1. Процессы диссипации энергии и множественное рождение частиц. Строго говоря, в экспериментах по неупругому рассеянию релятивистских частиц мы не имеем возможности контролировать время процесса множественного рождения (см.

работы [2], [3], где этот вопрос изучался в рамках формализма функций Вигнера [4], а также книгу [5], где этот же вопрос обсуждался с общих позиций). Поэтому мы можем лишь косвенно оценивать собственное время процесса, контролируя только его результат. Например, введя коэффициент неупругости $\kappa = 1 - \varepsilon_{\max}/E$, где $\varepsilon_{\max}$ – энергия самой быстрой частицы в данной системе отсчета[2)], E – полная энергия, мы можем контролировать степень диссипации, выбирая конкретные значения κ. Можно также рассматривать среднюю кинетическую энергию рожденных частиц $1/\beta_c$, если флуктуации в окрестности β_c не очень велики. Самым простым параметром (однако, возможно, не с точки зрения экспериментатора) является множественность рожденных частиц n. Очевидно, что диссипация будет значительной, если $\kappa \to 1$ или если $n \to n_{\max} = E/m_h$ ($m_h \simeq 0.2$ ГэВ – характерная масса адронов). В этих условиях $\beta_c \to \infty$.

Считается, что в физике адронов связи, которые являются следствием неабелевой калибровочной симметрии, приводят к удержанию цветового заряда внутри бесцветных адронов. Кроме того, и это, по-видимому, более важно, эти же связи препятствуют полной термализации очень "горячего" (при высоких энергиях сталкивающихся частиц) начального состояния. Действительно, при полной термализации средняя множественность рожденных частиц $\bar{n}(E)$ должна быть $\sim E$ [6]. Эксперимент же показывает, что средняя множественность пропорциональна всего лишь $\ln^2(E/m_h)$. Однако возможны редкие флуктуации, когда множественность $n \gg \bar{n}(E)$.

Следовательно, можно считать, что влияние связей на формирование динамики множественного рождения адронов значительно. Однако они не играют здесь решающей роли, в отличие от полностью интегрируемых задач [7], [8], поскольку определенная доля энергии все же диссипирует ($\bar{n}(E) \sim \ln^2(E/m_h) \gg 1$). Поэтому мы будем полагать, что связи лишь как-то ограничивают динамику (подробнее см. п. 1.3). Таким образом, рассматриваемая нами задача описывает процессы, занимающие промежуточное положение между полностью интегрируемыми и полностью термализуемыми задачами, и является поэтому достаточно сложной.

Действительно, в физике множественного рождения почти за три четверти века ее истории (в работах [9] приведены ссылки на пионерские публикации, касающиеся множественного рождения) накоплен огромный фактический материал. Однако строгих результатов не так уж и много. Так, в первую очередь следует выделить результаты, основанные на причинности и унитарности. К ним относится доказательство дисперсионных соотношений для двухчастичных амплитуд (см. [10] и цитируемую там литературу, а также [11]). Имеется также принципиально важное расширение этого подхода на инклюзивные процессы [12]. Что касается асимптотических оценок, то следует отметить теоремы Фруассара и Померанчука для полных сечений (см., например, [13]). И это практически все результаты, относящиеся к формальным основам теории сильных взаимодействий[3)], описывающей процессы множественного рождения.

За десятилетия развития физики множественного рождения было проверено огром-

[2)] Мы будем рассматривать лишь систему центра масс.

[3)] Мы не будем обсуждать такие чисто аксиоматические построения, как функции Вайтмана, или же теорему Хаага.

ное число идей, основанных на эвристических предпосылках. Здесь мы хотели бы выделить некоторые из них. В первую очередь, это идея, базирующаяся на экспериментальном наблюдении, что средний поперечный импульс рожденных адронов ограничен и практически не зависит от энергии E и множественности n (по крайней мере, при "не очень больших" E и n). На этом наблюдении основан мультипериферический подход [14] и примыкающая к нему модель Редже [15]. Эти схемы, даже не имея полного теоретического обоснования, до сих пор остаются основными инструментами количественного описания множественного рождения.

Значительная систематизация экспериментальных данных была достигнута с использованием представления о масштабной инвариантности на малых расстояниях [16]. Далее, представления о дуальности, которая является следствием кроссинг-симметрии и правил сумм при конечной энергии [17], по-видимому, имеют фундаментальный характер [18]. Однако до сих пор мы не располагаем согласованной схемой, основанной на этих идеях, которая бы не противоречила условию унитарности и была бы способна дать экспериментально проверяемые предсказания [19].

С методологической точки зрения нам будет важно учитывать, что процесс диссипации первичной энергии E в массы адронов является многокомпонентным и каждой из компонент этого процесса свойственны свои пространственно-временные масштабы и, по-видимому, различные механизмы множественного рождения. Предпринимались попытки осмыслить эту идею как с феноменологической [20], так и с чисто формальной позиции [21], с использованием разложения по корреляционным функциям. Последнее сходно с групповым разложением Майера [22].

Но несмотря на все эти усилия, мы так и не имеем детальной количественной теории неупругих взаимодействий адронов. Заметим вместе с тем, что неупругие взаимодействия определяют основную долю вкладов в полное сечение адронов (см., например, [23]). Поэтому неточности в количественных оценках роли тех или иных неупругих процессов в значительной степени тормозят дальнейшие экспериментальные исследования, которые в современных задачах весьма чувствительны к фоновым условиям.

Отметим, что физика множественного рождения интересна также и сама по себе, хотя, возможно, она и не является сегодня "магистральной дорогой" развития физики, как, например, стандартная модель и сопутствующие ей задачи (обнаружение хиггсовского бозона, проблема иерархии масс и т.п.). В этом смысле, возможно, процессы рождения очень большого числа адронов представляют особый интерес, поскольку при очень большой множественности должно возбуждаться максимальное число степеней свободы [7].

Итак, сохраняющаяся до сих пор неопределенность в оценке доминантных при высоких энергиях вкладов [24] и то обстоятельство, что фрактальная размерность Реньи нетривиальна и существенно зависит от энергии и типа взаимодействующих частиц [25], несомненно, уменьшают надежду на то, что когда-нибудь будет создана количественная теория множественного рождения адронов в полном объеме (по-видимому, это явление по своей сложности сравнимо, например, с турбулентностью). Непосредственным следствием этого является наблюдающееся последние два десятка лет падение числа публикаций на тему множественного рождения. В этой связи отметим, что именно асимптотика по множественности может оказаться наиболее простой (см. раздел 6), поскольку мы ожидаем, что в этой области значений множественности применимо *статистическое описание* [7], т.е. детали процесса в этих условиях не должны быть столь уж важны.

Здесь, однако, надо подчеркнуть, что в отличие от ранее развиваемых гидродинамических и статистических моделей множественного рождения [26], [6], мы ожидаем наступления гидродинамической стадии [27] процесса термализации лишь в области очень больших значений множественности, т.е. она может реализоваться лишь как достаточно редкая флуктуация в процессе диссипации.

Мы предприняли здесь попытку построить теорию, которая могла бы описать динамику сильных взаимодействий как на малых расстояниях, где, по-видимому, влияние симметрийных связей незначительно, так и на больших, где связи принципиально следует учитывать.

Мы увидим, что конечное выражение (см. ниже (5.38)) для производящего функционала наблюдаемых (сечений рассеяния, корреляционных функций и т.д.), несмотря на формальную компактность, в действительности чрезвычайно громоздко, и поэтому, скорее всего, лишь численные методы могут быть сколько-нибудь эффективны (см. раздел 6). Мы предпринимаем усилия в этом направлении, однако описание предсказаний для эксперимента выходит за рамки данного обзора [28].

1.2. Микроканонический формализм. Строго говоря, амплитуды рождения n частиц зависят от $(3n-4)$ переменных. Это число слишком велико[4], и было бы наивно надеяться построить точную схему описания, если все эти переменные существенны (см. выше, а также [25]). Поэтому чтобы сформулировать задачу количественно, мы прежде попытаемся найти условия, при которых ограниченным числом параметров можно описать систему. Очевидно, что для этого следует предпринять попытку адаптировать методы статистической физики.

Замечательно, что при выполнении условий, напоминающих условие ослабления корреляций Боголюбова [29][5] (см. п. 2.1, где эти условия выводятся), система, которая возникнет в результате рождения частиц, должна становиться *равновесной*. А именно, производящий функционал сечений неупругого рассеяния $\rho(\alpha, z)$, вычисленный с помощью S-матрицы, при выполнении вышеуказанных условий в точности совпадает со статистической суммой равновесной термодинамики в формулировке Швингера–Келдыша [30] с соответствующими периодическими граничными условиями Кубо–Мартина–Швингера [31]. Здесь надо отметить формальное утверждение, что термодинамические теории, построенные на основе периодического граничного условия Кубо–Мартина–Швингера, могут описывать лишь равновесное, в каноническом определении этого слова, состояние системы [32].

---

[4] При энергиях современных ускорителей средняя множественность рожденных частиц достигает сотни.

[5] Важность принципа обращения в нуль корреляторов Боголюбова для процессов множественного рождения адронов неоднократно подчеркивал А. М. Балдин в обсуждениях с одним из авторов (А. Н. С.).

Мы покажем, что вышеуказанное ослабление корреляций оказывается необходимым и достаточным условием того, чтобы наша термодинамика, основанная на S-матричном формализме, стала справедливой. В работе [3] сделана попытка описания кинетической стадии процесса, опирающаяся на гипотезу *локального равновесия* [33]. Если же корреляции не ослабевают, то мы остаемся в рамках обычного S-матричного описания, которое оперирует $(3n-4)$ независимыми переменными. В п. 2.1 мы вернемся к этому вопросу.

Из вышесказанного следует, что упомянутые условия ослабления корреляций, вообще говоря, не должны выполняться в адронных процессах, поскольку имеются симметрийные связи. Однако можно рассмотреть асимптотику по n. Тогда, если законы сохранения, сопутствующие симметрии задачи, лишь ограничивают динамику, то отбирая очень большие множественности, мы тем самым подавляем влияние этих связей, сопутствующих данной симметрии. Это, конечно, должно упростить теорию. (Введение асимптотики по n удобно также и потому, что в теории возникает малый параметр $\sim \bar{n}(E)/n$. Можно использовать также то обстоятельство, что импульсы рожденных частиц должны быть относительно малы.)

Принципиальная важность физики очень больших множественностей подробно обсуждается в работе [7], и мы не будем в дальнейшем касаться этого вопроса. Здесь мы хотели бы отметить, что, по-видимому, в ион-ионных столкновениях *термализация*, т.е. эффект ослабления корреляций, может быть достигнута при меньших значениях $n/\bar{n}(E)$ [34].

Можно заметить, что n определяет лишь число импульсов в аргументе амплитуд множественного рождения $a_n(q_1, q_2, \ldots, q_n; E)$. Поэтому если, например, нас интересует асимптотика по n, то надо вычислять проинтегрированный по всему фазовому объему модуль $\left|a_n(q_1, q_2, \ldots, q_n; E)\right|^2$, так как лишь в этом случае в наших формулах появится n как параметр.

Все это естественно приводит к идее рассматривать вместо многочастичных амплитуд именно производящие функции (или же функционалы) $\rho(\alpha, z)$, которые выражаются через соответствующим образом взвешенные параметрами α и z интегралы от $|a_n|^2$. Так, в простейшем варианте теории, для того чтобы сохранить возможность по нашему усмотрению "регулировать" конечное состояние процесса диссипации первичной энергии, введена зависимость от 4-вектора $\alpha = (-i\beta, \vec{\alpha})$, который сопряжен импульсам рожденных частиц, и от параметра z, который сопряжен числу частиц (см. определение (2.1)).

Итак, сначала мы покажем, как можно ввести ("грубый", если использовать определение, предложенное в [27]) термодинамический формализм, который в значительной степени "экономен", поскольку использует ограниченный набор параметров (температуру ($\sim 1/\beta$), химический потенциал ($\sim \ln z$) и т.п.) и вместе с тем способен описать систему. Будут найдены необходимые и достаточные условия такого описания (см. п. 2.1). Подробности и дополнительный список литературы можно найти в обзорах [7], [3].

1.3. Квантование со связями. Поскольку лагранжианы современных теорий поля обладают высокой группой симметрии [35], [36], а вычислительная схема должна оперировать лишь независимыми степенями свободы, то имеется проблема выделения последних. В каноническом формализме для этого используются соответствующие уравнения связи [37]. Однако эта процедура достаточно сложна и во многом неясна из-за громоздкости.

На раннем этапе построения теории сильных взаимодействий, основанной на калибровочной теории Янга–Миллса, было естественно использовать привычную схему вычислений, которая фактически повторяет отлично зарекомендовавшую себя квантовую электродинамику. При этом существенно то, что в такой формулировке, с применением тождества Славнова–Тейлора [38], теория Янга–Миллса оказывается перенормируемой [39]. Используемый для этого метод Фаддеева–Попова [40] помогает отделить динамические степени свободы от чисто калибровочных. Однако платой за это является неэрмитовость эффективного действия неабелевых калибровочных теорий. Во-первых, это значительно усложняет получение калибровочно-инвариантных результатов, поскольку калибровочная инвариантность восстанавливается лишь в сумме вкладов диаграмм. Во-вторых, сама процедура выделения калибровочных степеней свободы оказывается неоднозначной в сильных калибровочных полях [41], [42]. В связи с этим в ряде работ (см., например, [43]) предлагается переформулировать теорию возмущений в терминах калибровочно-инвариантных полей. Как это сделать, мы покажем ниже (см. п. 5.4).

Эти проблемы не играют особой роли, если в рассматриваемых приложениях взаимодействия и соответственно поля слабы. В результате в этом *режиме слабой связи* была предсказана *асимптотическая свобода*, в основе которой лежит явление антиэкранировки цветового заряда [44]: “бегущий” параметр разложения

$$\alpha_s \propto \frac{1}{\ln(q^2/\Lambda^2)} \ll 1 \tag{1.1}$$

при $q^2 \gg \Lambda^2$. Этот факт оказал решающее влияние на формирование адронной феноменологии последних десятилетий. Так, было найдено естественное объяснение масштабной инвариантности в глубоко неупругих процессах [45], было предсказано образование (КХД) струй [46].

Вместе с тем из (1.1) видно, что теория возмущений слабой связи имеет ограниченную область применимости из-за наличия полюса в выражении для α_s при $q^2 = \Lambda^2$. Эту трудность можно устранить, введя в теорию определенное условие аналитичности [47]. Предпринимаются также усилия “исправить” теорию с учетом степенных поправок [48].

Однако все же остается проблема связей, в частности калибровочных, которые существенны на больших расстояниях, где поля сильны и, следовательно, должны влиять на спектры “мягких” частиц. А именно, такие частицы рождаются в области очень больших множественностей, и их, как отмечалось выше, желательно научиться описывать в первую очередь, так как они, по-видимому, особенно просты [7].

Для учета связей мы воспользуемся идеей [49], которая весьма популярна в силу ее очевидности. Так, можно заметить, что инвариантная гиперповерхность W, которая сохраняет связи группы симметрии, определяется частным решением уравнения Лагранжа[6]. Тогда задача квантования может быть сведена к квантованию инвариантной гиперповерхности W, что значительно проще, поскольку она может совпадать с фактор-пространством $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, а оно по определению однородно и изотропно в квазиклассическом приближении. Действительно, $\mathcal{G}$ – группа симметрии задачи и $\mathcal{H}$ – группа симметрии данного решения, и поэтому гиперповерхность $W = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ определяется сохраняющимся в квазиклассическом случае генератором подгруппы, нарушенной данным решением.

Надо отметить, что оба подхода – как прямой, через непосредственный учет связей при квантовании, так и косвенный, через отображение задачи в пространство W, – должны быть равнозначны. Основные положения нашей схемы, а также некоторые примеры ее приложения были изложены в работах [50]–[53], [7]. Она использует косвенный метод учета связей через отображение квантовой задачи в пространство W.

Имеется обширный список работ, посвященных квантованию систем со связями. Отметим, что эта проблема существенна, когда кинетическая и потенциальная части лагранжиана одинаково значимы с точки зрения динамики. Именно такая кинематика реализуется при рождении "мягких" частиц.

В наиболее ранних работах рассматривалось квазиклассическое разложение Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [54], которое является прямым обобщением хорошо известного метода стационарной фазы. В дальнейшем этот формализм получил развитие в работах [55], где были предложены удобные граничные условия, что в значительной степени упростило вычисления. Эти работы были важны, поскольку позволили в полной мере осознать трудности "наивного" подхода к проблеме квантования теорий с высокой группой симметрии. Однако мы увидим, что ВКБ-схема квантования оказывается единственно возможной, поскольку только она сохраняет полную вероятность [56], [50], [51].

В работе [57] на первый план была выдвинута проблема выделения нединамических степеней свободы – *нулевых мод*. Для этого на основании более ранних работ (см., например, [58]) было предложено воспользоваться понятием *коллективных переменных*.

Для интегрируемых $(1+1)$-мерных теорий поля обратная задача рассеяния является каноническим преобразованием к переменным типа "действие–угол" (см. подробное изложение этого вопроса в книге [59]). Тогда естественно квантовать протяженные объекты типа солитонов в терминах именно коллективных переменных, если они находятся в инволюции [60], [61]. Именно коллективные переменные были использованы как локальные координаты пространства W в работе [52].

Таким образом, нам предстоит найти и описать полный набор квантовых состояний в пространстве W[7]. Эта задача очень сложна, если мы не знаем обратной задачи рассеяния, как в рассматриваемой нами в разделах 4 и 5 $(3+1)$-мерной теории поля в метрике Минковского. Мы увидим, что определяющую роль в этом процессе будет играть именно равенство $W = \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

В обычных формулировках квантовой теории проблема отображения в пространст-

---

[6] Если связей недостаточно, чтобы выделить гиперповерхность W, тогда они не играют никакой роли в динамике (см. правило отбора в предложении 8, приведенное ниже).

[7] Для квантовой теории солитонов важно, что S-матрицы солитонов факторизуются [62].

во W оказывается практически неразрешимой [63]. Попытки использовать для этого разложение континуального интеграла на решетке содержат значительную неопределенность, которая становится заметной при переходе к континуальному пределу [64].

Учитывая вышеприведенный опыт, мы поступим следующим образом. Рассмотрим для примера движение частицы в потенциальной яме. Спектральное представление для соответствующей амплитуды имеет вид

$$A(E, x_1, x_2) = \sum_l \frac{\psi(x_1)\psi^*(x_2)}{E - E_l + i\varepsilon}.$$

Если не интересоваться координатами, то удобно рассмотреть величину [55]

$$a(E) = \int dx\, A(E, x, x) = \sum_l \frac{1}{E - E_l + i\varepsilon} = \sum_l \mathcal{P}\frac{1}{E - E_l} + i\pi \sum_l \delta(E - E_l),$$

где была использована ортонормируемость волновых функций $\psi(x)$.

Отметим, что в действительности нас не интересуют ненаблюдаемые значения $E \neq E_l$. Тогда достаточно вычислять лишь абсорбционную часть

$$\operatorname{Im} a(E) = \pi \sum_l \delta(E - E_l).$$

Это означает, что мы отбрасываем континуум (не реализуемых в природе) состояний с $E \neq E_l$.

Однако мы не умеем формулировать теорию в терминах абсорбционных частей амплитуд. Чтобы обойти эту трудность, рассмотрим интегральную вероятность

$$r(E) = \int dx_1\, dx_2 \left|A(E, x_1, x_2)\right|^2 = \sum_l \left|\frac{1}{E - E_l + i\varepsilon}\right|^2$$

и воспользуемся оптической теоремой (условием унитарности)

$$\varepsilon r(E) = \varepsilon \sum_l \left|\frac{1}{E - E_l + i\varepsilon}\right|^2 = \frac{1}{2i} \sum_l \left\{\frac{1}{E - E_l - i\varepsilon} - \frac{1}{E - E_l + i\varepsilon}\right\} =$$
$$= \pi \sum_l \delta(E - E_l) = \operatorname{Im} a(E),$$

которая указывает на то, что наблюдаемые определяются абсорбционными частями амплитуд. Это общее положение, и оно должно выполняться всегда.

Формально условие унитарности, обеспечивающее сохранение полной вероятности, реализуется в результате сокращения действительной части. Мы хотим воспользоваться этим сокращением, чтобы доопределить функциональную меру интегралов для амплитуд [56].

Обобщению этого механизма сокращения на теоретико-полевую задачу посвящены разделы 3 и 4. А именно, мы покажем, что функциональная мера для $\rho(\alpha, z)$ содержит функциональную δ-функцию, которая определяет полный набор вкладов. Это, в свою очередь, дает возможность отобразить *квантовую* теорию на любое многообразие и, в частности, на факторпространство.

Подчеркнем еще раз, что мы решаем ограниченную задачу вычисления вероятностей, которые по определению задаются модулями соответствующих амплитуд. Или же используя условие унитарности, мы ограничимся вычислением абсорбционных частей амплитуд. Следует отметить, однако, что если квантовые возмущения включаются адиабатически [10], то, применяя дисперсионные соотношения, мы можем вычислить также и полные амплитуды.

Подчеркнем, что, как отмечалось выше, производящая функция $\rho(\alpha, z)$ определяется интегралами именно от $|a_n|^2$. Тогда, используя оптическую теорему, мы выразим $\rho(\alpha, z)$ через абсорбционную часть, что и замыкает наш формализм, поскольку последняя будет определена на δ-образной функциональной мере.

Таким образом, в первую очередь мы определим структуру теории возмущений в терминах полевых переменных, которая совпадает с обычной ВКБ-схемой, и затем, воспользовавшись δ-образностью функциональной меры, мы отобразим теорию возмущений в пространство $W = \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Итак, в разделах 3 и 4 будет приведена теория возмущений в факторпространстве $W = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ более простой конформной $(3+1)$-мерной скалярной теории в реальном времени. Мы не знаем общей структуры пространства W, поэтому рассмотренная в данном обзоре реализация в пространстве $W = O(4,2)/O(4) \times O(2)$ [65] является только примером. В остальном приведенная ниже формула (5.38) для производящих функций сечений множественного рождения точна.

Теория Янга–Миллса будет рассмотрена в разделе 5. Важнейшим результатом является теория возмущений, которая не требует фиксации калибровки (п. 5.4). Очевидно, что это достигается тем, что мы описываем квантовые возмущения в пространстве W, а не в пространстве полей (точнее, потенциалов калибровочных полей Янга–Миллса).

1.4. Основные положения и результаты. Опишем кратко содержание обзора. В разделе 2 описывается связь с термодинамикой в реальном времени. Основным результатом п. 2.1 является факторизованное представление $\rho(\alpha, z)$ (см. ниже предложение 1), которое позволяет не различать механические и термодинамические возмущения. Этот результат важен, поскольку, строго говоря, квантовые возмущения могут влиять на термодинамику и наоборот. Поэтому всегда существовала проблема временного упорядочения этих возмущений [66]. Например, в работе [67] предлагалось рассматривать "термальные" возмущения отдельно от "механических". Поэтому результат, полученный в п. 2.1, имеет самостоятельную ценность. В п. 2.2 мы воспользовались возможностью записать $\rho(\alpha, z)$ в факторизованном виде и показали, что $\rho(\alpha, z)$ определена на δ-образной функциональной мере Дирака, что доказывает унитарность ВКБ-схемы.

В разделах 3 и 4 строится теория возмущений в факторпространстве. В п. 3.1 рассмотрен простейший пример отображения в пространство W, а в п. 3.2 приведена общая теория отображений. Нам важно показать возможность редукции к W и механизм расслоения $W = T^*W \times R$, где q-числа принадлежат T^*W и R включает c-числовые нулевые моды.

Все это мы демонстрируем сначала на примере более простой $O(4,2)$-инвариантной скалярной теории поля. Здесь нам важно уметь найти меру $\rho(\alpha, z)$, которая бы учитывала законы сохранения энергии-импульса. Этот вопрос нетривиальный, поскольку мы описываем неупругое рассеяние частиц через протяженный, подобный солитонам, объект (см. п. 4.3).

И, наконец, в разделе 5 приведено явное выражение для производящего функционала $\rho(\alpha, z)$ в теории Янга–Миллса. Результатом является теория возмущений в сильной связи (разложение по обратным степеням константы взаимодействия) для $\rho(\alpha, z)$. Мы показываем, что новая теория возмущений свободна от расходимостей, по крайней мере в секторе векторных полей, и сформулирована так, что не требует фиксации калибровки (см. п. 5.4). Последнее избавляет нас от необходимости вводить *ду́хи* Фаддеева–Попова и бороться с неоднозначностями Грибова.

2. ТЕОРИЯ ПОЛЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ И ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В S-матричной интерпретации термодинамики роль частицы играет точка, откуда излучается (или где поглощается) частица с данным импульсом. При этом надо иметь в виду, что, вообще говоря, 4-координата этой точки не имеет смысла, поскольку следует учитывать соотношение неопределенностей. Эта картина двойственна, так как, с одной стороны, находясь на массовой поверхности, излученные частицы свободны, но с другой стороны, импульсное распределение этих частиц не совпадает с излучением черного тела, поскольку эти частицы излучаются взаимодействующими полями. Об этих особенностях развиваемой интерпретации желательно помнить далее при чтении статьи [7], [3].

2.1. Теория S-матрицы при конечных температурах. Здесь мы покажем, что при определенных условиях можно установить изоморфизм между термодинамическим описанием систем большого числа частиц и S-матричным формализмом, принятым для описания процесса множественного рождения. Для простоты изложения мы начнем рассмотрение с простейшей массивной скалярной действительной теории поля. Конкретный вид лагранжиана при этом нам не важен.

Итак, в первую очередь надо ввести понятие производящего функционала сечений $\rho(\alpha, z) \equiv \rho(\alpha_{\mathrm{i}}, \alpha_{\mathrm{f}}; z_{\mathrm{i}}, z_{\mathrm{f}})$. В рассматриваемом простейшем варианте теории мы можем следить лишь за импульсами частиц q_j и p_j данной массы m, $p_j^2 = q_j^2 = m^2$. Будем полагать, что

$$|a_{mn}(p_1, p_2, \ldots, p_m; q_1, q_2, \ldots, q_n)|^2 \delta\Bigl(P - \sum_{j=1}^{m} p_j\Bigr) \delta\Bigl(P - \sum_{j=1}^{n} q_j\Bigr) =$$

$$= \int \frac{d^4\alpha_{\rm i}}{(2\pi)^4}\frac{d^4\alpha_{\rm f}}{(2\pi)^4} e^{iP(\alpha_{\rm i}+\alpha_{\rm f})} \prod_{j=1}^{m} \frac{\epsilon(p_j)}{(2\pi)^3}\frac{\delta}{\delta z_{\rm i}(p_j)}\times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n} \frac{\epsilon(q_j)}{(2\pi)^3}\frac{\delta}{\delta z_{\rm f}(q_j)}\rho(\alpha,z)\bigg|_{z_{\rm i}=z_{\rm f}=0}, \tag{2.1}$$

где $a_{mn}(p_1,p_2,\ldots,p_m;q_1,q_2,\ldots,q_n) = a_{mn}(p;q)$ – амплитуда перехода m-частичного состояния в n-частичное, P – полный 4-импульс сталкивающихся частиц:

$$P = \sum_j p_j = \sum_j q_j.$$

Обратив равенство (2.1), найдем $\rho(\alpha,z)$.

Покажем (см. также [68]), что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если справедлива редукционная формула и если поверхностный член*

$$\int dx\,\partial_\mu\{u\,\partial^\mu u\} = \int_{\sigma_\infty} dx_\mu\,\{u\,\partial^\mu u\} = 0, \tag{2.2}$$

где σ_∞ – бесконечно удаленная гиперповерхность, то производящий функционал сечений множественного рождения $\rho(\alpha,z)$ представим в факторизованном виде:

$$\rho(\alpha,z) = e^{-\mathbf{N}(\varphi;\alpha,z)}\rho_0(\varphi), \tag{2.3}$$

функционал $\rho_0(\varphi)$ определен ниже в (2.14), *а* $\mathbf{N}(\varphi;\alpha,z)$ – *в* (2.15).

Это представление для производящего функционала будет играть ключевую роль, так как вся информация о внешних условиях (зависимость от параметров α и z) содержится в операторе $\mathbf{N}(\varphi;\alpha,z)$, а информация о взаимодействующих полях включена в функционал $\rho_0(\varphi)$.

Можно полагать, что оператор $\mathbf{N}(\varphi;\beta,z)$ проецирует систему взаимодействующих полей на наблюдаемые состояния. Причем, поскольку внешнее влияние включено адиабатически, предполагается, что функционал $\rho_0(\varphi)$ и все его производные существуют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Введем стандартное определение амплитуд (см. [3] и цитируемую там литературу) через редукционную формулу [69]

$$a_{mn}(p;q) = \prod_{k=1}^{m}\widehat{\varphi}(p_k)\prod_{k=1}^{n}\widehat{\varphi}^*(q_k)Z(\varphi), \tag{2.4}$$

где символ $\widehat{\ }$ означает вариационную (или обычную) производную в точке ноль. Например,

$$\widehat{\varphi}(q) \equiv \int dx\,e^{-iqx}\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \equiv \int dx\,e^{-iqx}\widehat{\varphi}(x), \tag{2.5}$$

и в конце вычислений вспомогательное поле φ следует положить равным нулю.

Амплитуда перехода вакуума в вакуум во внешнем (вспомогательном) поле $\varphi(x)$ имеет вид

$$Z(\varphi) = \int Du\, e^{iS_0(u)} e^{-iV(u+\varphi)}, \tag{2.6}$$

где S_0 – свободная часть действия:

$$S_0(u) = \frac{1}{2}\int_{C_+} dx\,\left((\partial_\mu u)^2 - m^2u^2\right), \tag{2.7}$$

и V описывает взаимодействия:

$$V(u) = \int_{C_+} dx\, v(u). \tag{2.8}$$

Интегралы по времени в (2.7) и (2.8) определены на временном контуре Миллса [70], который мы выбираем следующим образом:

$$C_\pm : t \to t \pm i\epsilon, \qquad \epsilon \to +0, \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty, \tag{2.9}$$

что эквивалентно $i\epsilon$-предписанию Фейнмана.

Рассмотрим величину

$$r(P;z) = \sum_{n,m} \frac{1}{m!\,n!} \int d\omega_m(p;z_{\mathrm{i}})\, d\omega_n(q;z_{\mathrm{f}})\, \delta\Big(P - \sum_{k=1}^{m} p_k\Big)\delta\Big(P - \sum_{k=1}^{n} q_k\Big)|a_{mn}|^2, \tag{2.10}$$

где элемент фазового объема

$$d\omega_m(q;z) = \prod_{k=1}^{m} \frac{dq_k\, z(q_k)}{(2\pi)^3\, 2\varepsilon(q_k)}, \qquad \varepsilon(q) = (q^2 + m^2)^{\frac{1}{2}},$$

включает “хорошую” весовую функцию $z(q)$.

Подставив (2.4) в (2.10) и используя фурье-разложение для δ-функций, найдем

$$r(P;z) = \int \frac{d\alpha_{\mathrm{i}}}{(2\pi)^4} \frac{d\alpha_{\mathrm{f}}}{(2\pi)^4} e^{iP(\alpha_{\mathrm{i}}+\alpha_{\mathrm{f}})} \rho(\alpha, z), \tag{2.11}$$

где

$$\rho(\alpha, z) = e^{-\mathbf{N}_+(\widehat{\varphi};\alpha_{\mathrm{i}},z_{\mathrm{i}}) - \mathbf{N}_-(\widehat{\varphi};\alpha_{\mathrm{f}},z_{\mathrm{f}})} \rho_0(\varphi), \tag{2.12}$$

$$\mathbf{N}_\pm(\widehat{\varphi};\alpha,z) \equiv \int d\omega_1(q;z)\, e^{-iq\alpha} \widehat{\varphi}_\pm(q) \widehat{\varphi}^*_\mp(q), \tag{2.13}$$

$$\rho_0(\varphi) = Z(\varphi_+) Z^*(-\varphi_-). \tag{2.14}$$

Если ввести обозначение

$$\mathbf{N}(\widehat{\varphi};\alpha,z) = \mathbf{N}_+(\widehat{\varphi};\alpha_{\mathrm{i}},z_{\mathrm{i}}) + \mathbf{N}_-(\widehat{\varphi};\alpha_{\mathrm{f}},z_{\mathrm{f}}), \tag{2.15}$$

то выражения (2.13), (2.15) дают определение оператора $\mathbf{N}(\widehat{\varphi};\alpha,z)$, а формула (2.14) определяет $\rho_0(\varphi)$.

Подчеркнем, что основная рассматриваемая величина – квадрат модуля $|a_{mn}|^2$ – фактически содержит удвоенное число степеней свободы, т.е. является величиной, более сложной, чем просто амплитуда a_{mn}. Поэтому на первый взгляд кажется, что было бы естественно попытаться найти аналогию с термодинамикой, оперируя лишь амплитудами. Такие попытки были сделаны, однако при этом возникали нефизические *пинч-сингулярности*, которые сокращались лишь при удвоении числа степеней свободы. Более того, опыт термополевого описания показывает, что подобное усложнение необходимо. Достаточно подробное обсуждение этого вопроса можно найти в [71], [5].

Предложение 2. *Представление* (2.3) *допускает вместо* (2.2) *периодическое граничное условие*

$$\int_{C_+} dx\,\partial_\mu\{u_+\partial^\mu u_+\} - \int_{C_-} dx\,\partial_\mu\{u_-\partial^\mu u_-\} = 0, \tag{2.16}$$

где u_+ и u_- – полностью независимые друг от друга поля на контурах C_+ и C_-, соответственно.

Доказательство. Напомним, что равенство (2.4) представляет собой редукционную формулу, которая основана на важном предположении о "достаточно хорошем" поведении полей на бесконечности. Предложение 2 означает, что, рассматривая величины $|a_{mn}|^2$, мы можем использовать более слабое, чем (2.2), условие (2.16), которое также обеспечивает отсутствие поверхностного члена, но не предполагает, что поля (и их первые производные) должны достаточно быстро убывать на бесконечности.

В нашем случае необходимо и достаточно предположить, что поля u_+ и u_- и их первые производные совпадают на σ_∞:

$$u_+(x\in\sigma_\infty) = u_-(x\in\sigma_\infty). \tag{2.17}$$

Мы будем называть это условие *периодическим граничным условием*. Оно является наиболее общим и будет сохранено до конца вычислений.

Равенство (2.12) может быть записано также в виде

$$\rho(\alpha,z) = \exp\left\{i\int dx\,dx'\,\big(\hat\phi_+(x)D_{+-}(x-x';z_{\mathrm f},\alpha_{\mathrm f})\hat\phi_-(x') - \right.$$
$$\left. - \hat\phi_-(x)D_{-+}(x-x';z_{\mathrm i},\alpha_{\mathrm i})\hat\phi_+(x')\big)\right\}\rho_0(\phi), \tag{2.18}$$

где, если взять $z=1$, D_{+-} и D_{-+} – обычные положительно-частотная и отрицательно-частотная функции Грина [10]. Так, функция

$$D_{+-}(x-x';z,\alpha) = -i\int d\omega_1(q)\,z e^{iq(x-x'-\alpha)}$$

описывает процесс распространения частицы, рожденной в момент x_0 и поглощенной в момент x'_0, $x_0 > x'_0$, где α совпадает с 4-координатой системы. Эти функции удовлетворяют однородным уравнениям

$$(\partial^2 + m^2)_x D_{+-} = (\partial^2 + m^2)_x D_{-+} = 0.$$

Предположим теперь, что производящий функционал $Z(\phi)$ может быть вычислен в виде ряда по степеням константы взаимодействия. При этом удобно воспользоваться следующим преобразованием (напомним, что $\widehat{X}$ означает производную по X в нуле):

$$e^{-iV(\phi)} = \exp\left\{-i\int dx\,\hat{j}(x)\hat{\phi}'(x)\right\}\exp\left\{i\int dx\,j(x)\phi(x)\right\}e^{-iV(\phi')} =$$
$$= \exp\left\{\int dx\,\phi(x)\hat{\phi}'(x)\right\}e^{-iV(\phi')} = e^{-iV(-i\hat{j})}\exp\left\{i\int dx\,j(x)\,\phi(x)\right\}. \quad (2.19)$$

Выбрав тогда первое равенство в (2.19), мы найдем

$$Z(\phi) = \exp\left\{-i\int dx\,\hat{j}(x)\widehat{\Phi}(x)\right\}e^{-iV(\Phi+\phi)}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{i}{2}\int dx\,dx'\,j(x)D_{++}(x-x')j(x')\right\}, \quad (2.20)$$

где D_{++} – обычные причинные функции Грина:

$$(\partial^2 + m^2)_x D_{++}(x-y) = \delta(x-y).$$

Подставив (2.20) в (2.18), после простых действий с дифференциальными операторами мы найдем выражение

$$\rho(\alpha, z) = e^{-iV(-i\hat{j}_+)+iV(-i\hat{j}_-)}\exp\left\{\frac{i}{2}\int dx\,dx'\,\big(j_+(x)D_{+-}(x-x';\alpha_1)j_-(x')-\right.$$
$$-j_-(x)D_{-+}(x-x';\alpha_2)j_+(x') - j_+(x)D_{++}(x-x')j_+(x')+$$
$$\left.+j_-(x)D_{--}(x-x')j_-(x')\big)\right\}, \quad (2.21)$$

где $D_{--} = (D_{++})^*$ – антикаузальная функция Грина.

Рассматривая систему большого числа частиц, можно упростить задачу, выбрав систему центра масс $P = (P_0 = E, \vec{0})$. При этом можно полагать, что $\alpha_{0,k}$: $\alpha_{0,k} = -i\beta_k$, $\operatorname{Im}\beta_k = 0$, $k = \mathrm{i}, \mathrm{f}$ [72], [73]. В этом случае мы будем иметь $\rho = \rho(\beta, z)$.

В дальнейшем мы хотим использовать величину β наравне с энергией как еще один параметр, характеризующий систему рожденных частиц. Следует помнить, однако, что для этого необходимы специальные условия, при которых β можно измерять одновременно с энергией. Эти условия можно сформулировать следующим образом [7]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Спектр энергии вторичных частиц описывается экспонентой Больцмана тогда и только тогда, когда центральные по энергии моменты K_l достаточно малы:*

$$\left|K_l(n)\right|^{\frac{2}{l}} \ll K_2(n), \qquad l = 3, 4, \dots . \tag{2.22}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что эти условия напоминают принцип ослабления корреляций Боголюбова при приближении к состоянию равновесия [29][8]. Напомним, что $K_1(n) = \langle\varepsilon; n\rangle$ – средняя энергия рожденных частиц, $K_2(n) = \langle\varepsilon^2; n\rangle - \langle\varepsilon; n\rangle^2$ – дисперсия распределения вторичных частиц по энергии, $K_3(n) = \langle\varepsilon^3; n\rangle - 2\langle\varepsilon^2; n\rangle\langle\varepsilon; n\rangle + 3\langle\varepsilon; n\rangle^3$ – третий центральный по энергии момент и т.д.

Покажем, как получить условия (2.22) и доказать справедливость определения

$$\langle\varepsilon^l; n\rangle = \frac{1}{\sigma_n}\int d\omega_l(q)\prod_{i=1}^{l}\varepsilon(q_i)\frac{d^l\sigma_n}{dq_1\dots dq_l}, \qquad \varepsilon(q) = \sqrt{q^2 + m_{\mathrm{h}}^2}, \tag{2.23}$$

где σ_n – сечение рождения n частиц и $d^l\sigma_n/(dq_1\dots dq_l)$ – дифференциальное сечение (см. ниже (2.29)).

Чтобы получить условия (2.22), рассмотрим интегралы

$$a_{mn}(E; z) = \oint \frac{dz_{\mathrm{i}}}{2\pi i z_{\mathrm{i}}^{m+1}}\frac{dz_{\mathrm{f}}}{2\pi i z_{\mathrm{f}}^{n+1}}\int\frac{d\beta_{\mathrm{i}}}{2\pi i}\frac{d\beta_{\mathrm{f}}}{2\pi i}e^{(\beta_{\mathrm{i}}+\beta_{\mathrm{f}})E}e^{-F(z,\beta)}, \tag{2.24}$$

где замкнутый контур по z охватывает точку $z = 0$ и

$$F(z,\beta) = -\ln\rho(\beta, z). \tag{2.25}$$

Интегралы в (2.24) будем вычислять методом стационарной фазы. Для этого, так же как в микроканоническом формализме, следует найти решение уравнения состояния

$$E = \frac{\partial}{\partial\beta_k}F(\beta, z), \qquad k = \mathrm{i}, \mathrm{f}, \tag{2.26}$$

что определяет наиболее вероятные значения β_k при данном E (и z). Уравнения (2.26) всегда имеют положительные действительные решения [73]. Причем в силу закона сохранения энергии решения совпадают:

$$\beta_k = \tilde{\beta}(E, z), \qquad \tilde{\beta} > 0.$$

Чтобы найти наиболее вероятные значения z, следует решить уравнения

$$m = -z_{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial z_{\mathrm{i}}}F(\beta, z), \qquad n = -z_{\mathrm{f}}\frac{\partial}{\partial z_{\mathrm{f}}}F(\beta, z). \tag{2.27}$$

[8] В англоязычной литературе [74] используется термин “the principle of vanishing correlation”.

Уравнения (2.26) и (2.27) надо решать совместно. В физике частиц число начальных частиц $m = 2$, и поэтому достаточно знать лишь решение $z_c = \tilde{z}(\beta_c, n) = z_c(E, n)$ уравнения для z_f.

Разложение подынтегрального выражения в (2.24) в окрестности $\tilde{\beta}(E, z) = \beta_c(E, n)$ дает асимптотический ряд, поскольку функция (2.25) существенно нелинейная. Это означает, что, вообще говоря, флуктуации в окрестности $\beta_c(E, n)$ произвольно велики. Следует полагать при этом, что разложение в окрестности $\beta_c(E, n)$ существует, например, в смысле Бореля[9)]. Тогда можно найти асимптотическую оценку ряда. Условиями справедливости этой оценки будут неравенства

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial\beta^l}F(\beta_c, z_c)\right|^{\frac{2}{l}} \ll \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}F(\beta_c, z_c), \qquad l > 2. \tag{2.28}$$

Отсюда нетрудно найти условия (2.22) и соответствующее определение (2.23).

Определим теперь явный вид производной $\partial^l F(z, \beta)/\partial\beta^l$. Начнем со случая $l = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}F(\beta, z) &= \frac{1}{\rho(\beta, z)}\frac{\partial}{\partial\beta}\rho(\beta, z) = \\ &= \frac{1}{\rho(\beta, z)}\sum_n n\int d\omega_n(q; z)\,\exp\left\{-\beta\sum_j \varepsilon(q_j)\right\}\varepsilon(q_1)|a_n|^2.\end{aligned}$$

Здесь коэффициент n появляется вследствие тождественности частиц. Введем теперь не нормированное на поток сталкивающихся частиц дифференциальное сечение:

$$\frac{d^l\tilde{\sigma}(\beta, z)}{dq_1\, dq_2 \ldots dq_l} = \sum_{n\geqslant l} n(n-1)\ldots(n-l+1)\int d\omega_{n-l}(q; z)\,\exp\left\{-\beta\sum_j \varepsilon(q_j)\right\}|a_n|^2,$$

где вновь учтена тождественность частиц.

Если полная энергия E и число частиц n заданы, то надо, положив $z = \mathrm{const}$, рассматривать величину

$$\frac{d^l\sigma_n(E)}{dq_1\, dq_2 \ldots dq_l} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z^{n+1}}\int \frac{d\beta}{2\pi i}e^{\beta E}\frac{d^l\tilde{\sigma}(\beta, z)}{dq_1\, dq_2 \ldots dq_l}. \tag{2.29}$$

Вообще говоря, интегралы по z и β фиксируют точные законы сохранения числа частиц и энергии. Однако предположим, что эти законы сохранения можно учесть приближенно. В этом случае сумма энергий рожденных частиц равна E лишь с экспоненциальной точностью. То же самое мы предполагаем относительно числа рожденных частиц. Чтобы найти, в окрестности каких значений энергии $1/\beta_c$ и числа рожденных частиц $1/\ln z_c$

[9)] Этот вопрос практически не изучен. Можно, однако, воспользоваться аналогией между высокотемпературным разложением равновесной термодинамики, т.е разложением по степеням β, и разложением по константе взаимодействия. В этом смысле положительный ответ на вопрос о существовании рядов по степеням β представляется естественным.

концентрируются значения энергии и числа рожденных частиц, надо решить уравнения (2.26) и (2.27). Тогда

$$\frac{d^l\sigma_n(E)}{dq_1dq_2\ldots dq_l} = z_c^{-(n+1)}e^{\beta_c E}\frac{d^l\tilde{\sigma}(\beta_c,z_c)}{dq_1dq_2\ldots dq_l}\Upsilon_l(E,n),$$

где $\Upsilon_l(E,n)$ включает гауссовы поправки от интегрирования в окрестностях $\beta_c(E,n)$ и $z_c(E,n)$. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial\beta_c}F(\beta_c,z_c) = \frac{\Upsilon_1(E,n)e^{\beta_c E}}{z_c^{n+1}\rho(\beta_c,z_c)}\int\varepsilon(q_1)\,d\omega_1(q_1;z_c)\frac{d\tilde{\sigma}(\beta_c,z_c)}{dq_1} =$$
$$= \frac{1}{\rho(\beta_c,z_c)}\int\varepsilon(q_1)\,d\omega_1(q_1;1)\frac{d\sigma_n(E)}{dq_1} = \langle\varepsilon^1;n\rangle = K_1(n).$$

Поступая аналогично, можно найти, что

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta_c^2}F(\beta_c,z_c) = \frac{1}{\rho(\beta_c,z_c)}\int\varepsilon(q_1)\,d\omega_1(q_1;1)\,\varepsilon(q_2)\,d\omega_1(q_2;1)\,\frac{d^2\sigma_n(E)}{dq_1\,dq_2} -$$
$$-\left\{\frac{1}{\rho(\beta_c,z_c)}\int\varepsilon(q_1)\,d\omega_1(q_1;1)\frac{d\sigma_n(E)}{dq_1}\right\}^2 = K_2(n). \qquad (2.30)$$

В общем случае будем иметь

$$\frac{\partial^l}{\partial\beta_c^l}F(\beta_c,z_c) = K_l(n). \qquad (2.31)$$

Подставив это выражение в (2.28), мы найдем (2.22).

Те же самые соображения могут быть применимы для z. Тогда, если условия справедливости асимптотических оценок выполняются, мы могли бы интерпретировать β_c как температуру, $\mu_c = (\ln z_c)/\beta_c$ как химический потенциал и, наконец, $F(z_c,\beta_c)/\beta_c$ как свободную энергию. Если эта интерпретация справедлива, то точку, из которой испускается частица с импульсом q, можно интерпретировать как "частицу" с импульсом q. Однако, вообще говоря, эта интерпретация содержит неточность, которая связана с невозможностью ввести одновременно координату этой точки [3].

Предложенная интерпретация параметров β_c и z_c представляется естественной, если отметить, что *структура* функции (2.21) та же, что у производящей функции Ниеми–Семенова [75], которая получена в рамках теории Швингера–Келдыша [76], [77]. Различие имеется лишь в определении функций Грина D_{ij}, $i,j=+,-$, что может оказаться существенным.

Уточним теперь, в каких условиях возможна предложенная выше интерпретация $\rho(\beta_c,z_c)$ как статистической суммы с параметрами $1/\beta_c$ и z_c, интерпретируемыми как температура и активность, соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если справедливо периодическое граничное условие* (2.17), *а также если флуктуации в окрестности решения уравнения* (2.26) *гауссовы и корреляции на гиперповерхности σ_∞ исчезают, то термодинамика имеет S-матричную интерпретацию, в которой $\rho(\beta,z)$ имеет смысл большой статистической суммы.*

Доказательство. Предположим [68], что наша система сталкивающихся частиц есть подсистема более широкой системы, включающей также невзаимодействующие (свободные) частицы (последние будут моделировать термостат). В результате больцмановская экспонента $e^{-\beta\varepsilon}$ заменится на соответствующее статистике число заполнения $\bar{n}(\beta\varepsilon)$. Это изменит лишь вид функций Грина D_{ij}. Доказательство мы будем проводить по следующей схеме. Функции Грина, встречающиеся в формализме, должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}(\partial^2+m^2)_x G_{+-}(x-y) &= (\partial^2+m^2)_x G_{-+}(x-y) = 0,\\ (\partial^2+m^2)_x G_{++}(x-y) &= (\partial^2+m^2)^*_x G_{--}(x-y) = \delta(x-y).\end{aligned} \tag{2.32}$$

Далее, важно учесть, что граничное условие (2.17) допускает более общее решение этих уравнений:

$$\begin{aligned}G_{ii} &= D_{ii} + g_{ii},\\ G_{ij} &= g_{ij}, \qquad i\neq j,\end{aligned} \tag{2.33}$$

где g_{ij} – решение однородных уравнений

$$(\partial^2+m^2)_x g_{ij}(x-y) = 0, \qquad i,j=+,-, \tag{2.34}$$

которые следует различать по принадлежности к различным временным контурам $C_\pm$. Следовательно,

$$g_{ij}(x-x') = \int d\omega(q)\, e^{iq(x-x')} n_{ij}(q), \tag{2.35}$$

где, напомним, $q^2=m^2$. Неизвестные функции $n_{ij}(q)$ определяются как среднее от полей,

$$u(\sigma_\infty):\; n_{ij} \sim \big\langle u(\sigma_\infty)\ldots u(\sigma_\infty)\big\rangle.$$

Простейшим из них является следующее:

$$n_{ij} \sim \langle u_i u_j\rangle \sim \big\langle u^2(\sigma_\infty)\big\rangle. \tag{2.36}$$

Здесь было учтено периодическое граничное условие (2.17). Но тогда функции $n_{ij}(q)$ должны совпасть с числом заполнения излучения черного тела.

Формальный вывод окончательных формул повторяет рассуждения, проведенные в книге [68] (см. также [3]). Мы найдем, что

$$n_{++}(q_0) = n_{--}(q_0) = \frac{1}{e^{\frac{\beta_1+\beta_2}{2}|q_0|}-1} \equiv \bar{n}\left(|q_0|\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right), \tag{2.37}$$

$$n_{+-}(q_0) = \Theta(q_0)\big(1+\bar{n}(q_0\beta_1)\big) + \Theta(-q_0)\bar{n}(-q_0\beta_1), \tag{2.38}$$

$$n_{-+}(q_0) = \Theta(q_0)\bar{n}(q_0\beta_2) + \Theta(-q_0)\big(1+\bar{n}(-q_0\beta_2)\big). \tag{2.39}$$

Это приводит к следующим функциям Грина:

$$i\tilde{G}_{ij}(q,\beta) = \begin{pmatrix} \frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{q^2-m^2-i\epsilon} \end{pmatrix} +$$
$$+ 2\pi\delta(q^2-m^2)\begin{pmatrix} \tilde{n}\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}|q_0|\right) & \tilde{n}(\beta_2|q_0|)a_+(\beta_2) \\ \tilde{n}(\beta_1|q_0|)a_-(\beta_1) & \tilde{n}\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}|q_0|\right) \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

где

$$a_\pm(\beta) = -e^{\frac{\beta}{2}(|q_0|\pm q_0)}.$$

Согласно предложению 2 производящий функционал можно записать в стандартном виде:

$$\rho_{\mathrm{cp}}(\beta) = e^{-iV(-i\hat{j}_+)+iV(-i\hat{j}_-)}\exp\left\{\frac{i}{2}\int dx\,dx'\,j_i(x)G_{ij}\big(x-x',(\beta)\big)j_j(x')\right\}, \quad (2.41)$$

где предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Если условия (2.22) выполняются, то

$$\begin{aligned} D_{+-}(t-t') &= D_{-+}(t-t'-i\beta), \\ D_{-+}(t-t') &= D_{+-}(t-t'+i\beta). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Эти равенства представляют собой периодические граничные условия Кубо–Мартина–Швингера. В канонической формулировке термодинамики они обычно используются, для того чтобы определить в формализме зависимость от температуры.

В результате мы получили большую статистическую сумму, определенную на временном контуре Миллса [70]

$$C_\infty : C_+ + C_-; \qquad C_\pm : t \to t \pm i\varepsilon, \qquad \varepsilon \to +i0, \qquad |t| \leqslant \infty. \quad (2.43)$$

Чтобы получить отсюда теорию, определенную на временном контуре Ниеми–Семенова, мы должны иметь право добавить вклады, определенные на мнимовременном контуре

$$C_{\mathrm{Im}} : t \in \lim_{t_f\to+\infty}(t_f + i\varepsilon, t_f - i\varepsilon).$$

Но это возможно лишь в случае, если функции Грина обращаются в нуль на C_{Im}. Можно показать, что это условие выполняется, по крайней мере, в рамках канонической теории возмущений [71].

Итак, если $C = C_+ + C_- + C_{\mathrm{Im}}$ и имеет место периодическое граничное условие Кубо–Мартина–Швингера [3], то $\rho(\beta,z)$, найденное в (2.21), имеет стандартное интегральное представление

$$\rho(\beta,z) = \int D_C\phi\, e^{iS_C(\phi)},$$

где все величины определены на контуре C. Аналитическим продолжением это представление можно привести к представлению Мацубары для большой статистической суммы в мнимом времени [75].

Отметим здесь, что в нашей S-матричной формулировке теории поля при конечных температурах вклады от C_{Im} отсутствуют с самого начала. Иными словами, наш подход и подход, основанный на каноническом формализме Гиббса–Больцмана, различаются вкладами от C_{Im}. Как отмечалось выше, наличие вкладов от C_{Im} определяется корреляционными свойствами на бесконечно удаленной гиперповерхности.

По определению производящий функционал $\rho(\beta, z)$ может быть использован как генератор событий для описания ускорительных экспериментов [78], [3]. Например, если

$$\rho_{nm}(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_m) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\delta}{\delta z_{\mathrm{i}}(p_j)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta z_{\mathrm{f}}(q_j)} \rho(\beta, z)\bigg|_{z=0}, \tag{2.44}$$

то

$$\frac{1}{J(s)} \sum_n \int_s \rho_{2n}(q_1, \dots, q_n; p_1, p_2) = \sigma_{\mathrm{tot}}(s),$$

где σ_{tot} – полное сечение, J – обычный нормировочный фактор. В этом выражении интегрирование по импульсам частиц ведется с ограничением $s = (p_1 + p_2)^2$.

Кроме того, большая статистическая сумма может быть выражена через

$$\sum_{n,m} \int_{(\beta_{\mathrm{i}}, z_{\mathrm{i}}; \beta_{\mathrm{f}}, z_{\mathrm{f}})} \rho_{nm}(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_m), \tag{2.45}$$

где ρ_{nm} было определено в (2.44). Суммирование по числу частиц и интегрирование по импульсам частиц ведется с ограничениями: средняя энергия частиц в начальном (конечном) состоянии есть $1/\beta_{\mathrm{i}}$ $(1/\beta_{\mathrm{f}})$ и активность начального (конечного) состояния есть z_{i} (z_{f}). Добавим лишь, что подобное описание совпадает с микроканоническим подходом, при котором температура вводится как лагранжев множитель.

В работе [3] сделана попытка использовать полученную выше интерпретацию в случае, когда система еще не достигла *гидродинамической фазы*, на которой для полного описания спектра энергий частиц достаточно знать их среднюю энергию. Можно предположить, что в *кинетической стадии*, предшествующей гидродинамической, можно ввести лишь локальные температуры.

Тогда, используя формализм Вигнера, в выражении (2.40) следует заменить $\beta_k \to \beta_k(x)$, $k = \mathrm{i}, \mathrm{f}$, где x – координата Вигнера [4]. Подчеркнем, что такая интерпретация возможна лишь в силу того, что мы определяем температуру через среднюю энергию невзаимодействующих частиц [3].

2.2. Унитарное определение меры. Покажем, что справедливо

Предложение 5. *Если имеет место факторизованная структура* (2.3), *то в силу унитарности S-матрицы производящая функция* (*или производящий функционал*) $\rho(\beta, z)$ *имеет вид*

$$\rho(\beta, z) = e^{-i\mathbf{K}(j\varphi)} \int DM(u) e^{-iU(u,\varphi)} e^{-N(\beta, z; u)}, \tag{2.46}$$

где

$$N(\beta, z; u) = n(\beta_i, z_i; u) + n^*(\beta_f, z_f; u),$$

$$n(\beta, z; u) = \int d\omega_1(q; z) e^{-\beta\varepsilon(q)} \Gamma(q, u) \Gamma^*(q, u), \tag{2.47}$$

$$\Gamma(q, u) = \int dx\, e^{-iqx} (\partial^2 + m^2) u(x), \qquad q^2 = m^2, \tag{2.48}$$

$$U(u, \varphi) = V(u + \varphi) - V(u - \varphi) - 2\,\mathrm{Re} \int_{C_+} dx\, \varphi(x) v'(u) = O(\varphi^3), \tag{2.49}$$

$$DM(u) = \prod_x du(x)\, \delta\big(\partial_\mu^2 u + m^2 u + v'(u) - j\big), \tag{2.50}$$

$$2\mathrm{K}(j\varphi) = \mathrm{Re} \int_{C_+} dx\, \hat{j}(x) \widehat{\varphi}(x). \tag{2.51}$$

После всех вычислений следует положить $j = \varphi = 0$.

Доказательство. Вывод представления (2.46) приведен, например, в работе [7]. Так, используя факторизацию, мы можем отдельно рассматривать

$$\rho_0(\phi) = \int Du_+\, Du_-\, e^{iS_0(u_+) - iV(u_+ + \varphi_+)} e^{-iS_0(u_-) + iV(u_- - \varphi_-)}, \tag{2.52}$$

где u_- и φ_- определены на комплексно-сопряженном контуре C_-. Поля $\varphi_\pm$ несут всю информацию о внешних условиях, и интегралы должны включать лишь замкнутые траектории.

Вместо двух независимых полей u_+ и u_- мы введем [56]

$$u(x)_\pm = u(x) \pm \varphi(x) \tag{2.53}$$

с равенством

$$\int_{\sigma_\infty} dx_\mu\, \varphi(x) \partial^\mu u(x) = 0 \tag{2.54}$$

(где σ_∞ – бесконечно удаленная времениподобная гиперповерхность), обеспечивающим периодическое граничное условие. Мы выберем следующее решение уравнения (2.54):

$$\varphi(x \in \sigma_\infty) = 0, \tag{2.55}$$

что гарантирует справедливость условия (2.17). Тогда полное действие $S_0(u_+) - V(u_+) - S_0(u_-) + V(u_-)$ описывает движение по замкнутому пути от *точек поворота* $u(x \in \sigma_\infty)$. Интегрирование по $u(x \in \sigma_\infty)$ подразумевается в силу того, что выбрано именно периодическое граничное условие [3]. Для простоты везде ниже вплоть до п. 4.3 мы будем полагать, что

$$\lim_{u_\pm \to u} \big(S_0(u_+) - V(u_+) - S_0(u_-) + V(u_-)\big) = 0. \tag{2.56}$$

Мы будем рассматривать φ как виртуальное поле. Введя вспомогательное поле $\phi(x,t)$, $\phi(x,t\in C_\pm)=\phi_\pm(x,t\in C_\pm)$, и предполагая следующее определение вариационных производных:

$$\frac{\delta\phi(x,t\in C_i)}{\delta\phi(x',t'\in C_j)}=\delta_{ij}\delta(x-x')\delta(t-t'),\qquad i,j=+,-,$$

мы можем написать (см. (2.13))

$$\mathbf{N}_\pm(\varphi;\beta,z)=\int d\omega_1(q;z)\,e^{-\beta\varepsilon(q)}\int_{C_+}dx\int_{C_-}dy\,\widehat{\varphi}_\pm(x)\widehat{\varphi}_\mp(y)e^{\pm iq(x-y)}. \tag{2.57}$$

Используя это обозначение, выделим в экспоненте (2.52) линейный по $(\phi+\varphi)$ член:

$$V\big(u+(\phi+\varphi)\big)-V\big(u-(\phi+\varphi)\big)=U(u,\phi+\varphi)+2\,\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\big(\phi(x)+\varphi(x)\big)v'(u) \tag{2.58}$$

и

$$S_0(u+\varphi)-S_0(u-\varphi)=S_0(u)-2i\,\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\varphi(x)(\partial_\mu^2+m^2)u(x). \tag{2.59}$$

Разложение по $(\phi+\varphi)$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned}e^{-iU(u,\phi+\varphi)}&=\exp\Big\{\frac{1}{2i}\,\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\hat{j}(x)\widehat{\varphi'}(x)\Big\}\times\\&\times\exp\Big\{2i\,\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,dt\,j(x)\big(\phi(x)+\varphi(x)\big)\Big\}e^{-iU(u,\varphi')},\end{aligned} \tag{2.60}$$

где, как обычно, $\hat{j}(x)$, $\widehat{\varphi}'(x)$ – соответствующие вариационные производные. В конце вычислений вспомогательные переменные (j,φ') следует положить равными нулю.

В результате имеем

$$\begin{aligned}\rho_0(\varphi)&=\exp\Big\{\frac{1}{2i}\,\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\hat{j}(x)\widehat{\varphi}(x)\Big\}\int\prod_x du(x)\,\delta\big(\partial_\mu^2u+m^2u+v'(u)-j\big)\times\\&\times e^{is_0(u)}e^{-iU(u,\varphi)}\exp\Big\{2i\,\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\big(j(x)-v'(u)\big)\varphi(x)\Big\},\end{aligned} \tag{2.61}$$

где δ-функция определена равенством

$$\begin{aligned}&\prod_x\delta\big(\partial_\mu^2u+m^2u+v'(u)-j\big)=\\&\quad=\int D\varphi\,\exp\Big\{-2i\,\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\big(\partial_\mu^2u+m^2u+v'(u)-j(x)\big)\varphi(x)\Big\}.\end{aligned} \tag{2.62}$$

Здесь следует помнить, что в силу выбранных периодического граничного условия и решения (2.55) произведение δ-функций (2.62) не включает значения $x\in\sigma_\infty$. Это означает, что точки поворота $u(x\in\sigma_\infty)$ полностью произвольны. Последнее приводит к возникновению интегралов по объему факторпространства $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, т.е. по нулевым модам.

Равенство (2.61) можно записать также в следующей эквивалентной форме:

$$\rho_0(\phi) = e^{-i\widehat{K}(j\varphi)} \int DM(u)\, e^{is_0(u)-iU(u,\varphi)} \times \\ \times \exp\left\{2i\ \mathrm{Re} \int_{C_+} dx\, \phi(x)(\partial_\mu^2 + m^2)u(x)\right\}, \tag{2.63}$$

если использовать при этом то обстоятельство, что равенство

$$\partial_\mu^2 u + m^2 u = -v'(u) + j \tag{2.64}$$

точное.

Отметим в заключение, что контур C_+ в формуле (2.51) не может быть сдвинут на действительную ось.

Далее, поскольку экспонента в равенстве (2.63) линейна по $\varphi(t \in C_+)$ и по $\varphi(t \in C_-)$ по отдельности, то результат действия оператора $e^{-\mathbf{N}_+(\widehat{\varphi};\alpha_\mathrm{i},z_\mathrm{i})-\mathbf{N}_-(\widehat{\varphi};\alpha_\mathrm{f},z_\mathrm{f})}$ дает (2.46).

В заключение раздела приведем важнейшие следствия δ-образности функциональной меры.

Предложение 6. *Следует учитывать лишь точные решения u_c уравнения*

$$\partial_\mu^2 u + m^2 u + v'(u) = 0. \tag{2.65}$$

Доказательство. Это очевидно, поскольку функциональный интеграл определен на δ-образной мере (2.50) и возмущения траектории u_c источником j учитываются по теории возмущений.

Здесь мы полагаем, что, как следует из определения генерирующего ряд теории возмущений оператора $e^{-i\mathbf{K}(j\varphi)}$, точный смысл равенства (2.64) сохраняется при всех значениях $j(x)$ и, в частности, при $j(x) = 0$.

Это важное следствие исключает из рассмотрения вклады приближенных решений уравнения движения. В этом смысле полученный формализм оказывается *простым*, свободным от неопределенностей.

Предложение 7. *Производящий функционал ρ описывается суммой всех решений уравнения* (2.65), *включая тривиальное.*

Доказательство. Это утверждение справедливо независимо от "расстояний" между экстремумами действия. Оно следует из того, что δ-функция имеет нулевую ширину:

$$\delta(x) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}.$$

Можно заметить, что в выражениях для ρ отсутствуют интерференционные вклады от различных решений уравнения (2.65), которые обязательно возникают, если амплитуды записаны в виде суммы вкладов экстремумов действия. Это означает, что в нашем подходе учтена ортогональность пространств Гильберта, которые натянуты на решения уравнения (2.65).

Однако надо иметь в виду, что мы должны уметь выделить "физическое" решение, если имеется несколько решений и нет внешних условий, определяющих, какое из них следует учитывать, т.е. в ситуации общего положения. Для этого мы введем следующее правило отбора.

Предложение 8. *Пусть* u_c *и* u'_c *– решения уравнения* (2.65) *и пусть* W *и* W' *– соответствующие факторпространства. Пусть также* V *и* V' *– объемы* W *и* W'*, соответственно. Предположим, что* $V > V'$*, тогда вклады* u'_c *можно опустить с точностью* $\sim V'/V$*. Если это отношение равно нулю, тогда мы будем говорить, что вклады* u'_c *реализуются на мере ноль.*

Доказательство. Это правило отбора очевидно с учетом предложения 7. Поскольку δ-образная мера определяет полный набор вкладов и по всем вкладам следует суммировать, то в ситуации общего положения в сумме мы должны отбросить все вклады, реализующиеся на мере ноль.

Отбор по размерности W означает, что наибольший вклад дают те конфигурации полей, которые максимально нарушают симметрию классического действия.

Надо помнить, однако, что в теории поля возможны туннельные переходы вакуума в вакуум, которые не отвечают какой-либо динамике. Эти вклады не входят в полную систему, определяемую уравнением (2.65) в реальном времени (здесь не обсуждаются вклады, которые можно получить *аналитическим продолжением* в область мнимых значений времени). Мы полагаем, что они должны быть добавлены к обсуждаемым вкладам, поскольку им отвечает иная топология полей [79], [80].

Рассмотрение следует начать с тривиального решения, факторпространство которого представляет собой точку, т.е. его размерность $\dim W_0 = 0$. Следующим точным регулярным в реальном времени решением является 8-параметрическое $O(4) \times O(2)$-инвариантное решение, $\dim W = 8$ [65]. Наличие нетривиального решения означает, что тривиальными конфигурациями полей следует пренебречь при квантовании полей Янга–Миллса.

"Вакуумные вклады" мнимого времени могут быть отброшены, как следует из правила отбора, сформулированного в предложении 8, тогда и только тогда, когда они реализуются на мере ноль. В теории Янга–Миллса имеется точное регулярное в мнимом времени инстантонное решение, для которого $\dim W_{\text{inst}} = 5$ [81]. Поэтому этим решением можно пренебречь. Имеются также мультиинстантонные приближенные решения. Однако размерность их факторпространства не превышает $\dim W_{\text{inst}}$ [82].

3. КВАНТОВАНИЕ НА ФАКТОРМНОГООБРАЗИЯХ

3.1. Введение в теорию преобразований. Получив теорию, определенную на δ-образной мере, мы должны в первую очередь найти решения уравнения (2.64) в виде ряда по степеням $j(x)$. На этом этапе наш подход, если забыть о правиле отбора из предложения 8, практически ничем не отличается от обычного метода стационарной фазы ВКБ [50], [51]. Он даже несколько сложнее последнего, поскольку, как отмечалось выше, содержит удвоенное число степеней свободы. Однако в действительности дальнейшие вычисления в рамках этой ВКБ-схемы проблематичны.

В нашем представлении проблема заключается в следующем. Предположим, что мы знаем решение $u_c(x)$ уравнения (2.65). Тогда в первом порядке по $j(x)$ мы должны решить уравнение

$$(\partial_\mu^2 + v''(u_c))G(x, x'; u_c) = \delta(x - x'), \tag{3.1}$$

что и представляет определенную сложность.

Дело в том, что несмотря на кажущуюся простоту проблема описания движения частицы во внешнем поле (в данном случае $u_c(\mathrm{x}, t)$), конфигурация которого зависит от времени, в действительности столь же сложна, что и исходная задача, поскольку частица в таком поле может бесконтрольно как приобретать, так и терять энергию (см. описание этого вопроса, например, в работе [83]). Формально проблема заключается в том, что, поскольку поле зависит от 4-координаты, пространство, в котором распространяется частица, теряет однородность и изотропность (см. (3.1)).

В данном разделе мы покажем, как можно обойти эту проблему, перейдя в (2.63) к новым динамическим переменным. А именно, мы выберем такие переменные, чтобы пространство стало однородным и изотропным.

В дальнейшем нас будет интересовать движение в фазовом пространстве. Для этого вместо (2.46) мы рассмотрим производящую функцию

$$\rho(\beta, z) = e^{-i\mathbf{K}(j\varphi)} \int DM(u,p)\, e^{-iU(u,\varphi)} e^{N(\beta, z; u)}, \tag{3.2}$$

где

$$DM(u,p) = \prod_x du(x)\, dp(x)\, \delta\left(\dot u(x) - \frac{\delta H_j}{\delta p(x)}\right) \delta\left(\dot p(x) - \frac{\delta H_j}{\delta u(x)}\right) \tag{3.3}$$

и полный гамильтониан

$$H_j(u,p) = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\nabla u)^2 + m^2u^2 + v(u) - ju \right\} \tag{3.4}$$

включает энергию квантовых возмущений $j(\mathrm{x}, t)u(\mathrm{x}, t)$.

Заметим, что переход к фазовому пространству отразился лишь на мере $DM(u,p)$, и нетрудно проверить, что представление (3.2) тождественно совпадает с (2.46). Это позволяет считать, что мы просто перешли к более удобному для нас *формализму первого порядка*.

Чтобы вычислить интеграл (3.2), надо прежде всего найти все решения уравнений

$$\dot u(x) = \frac{\delta H_j}{\delta p(x)}, \qquad \dot p(x) = -\frac{\delta H_j}{\delta u(x)}. \tag{3.5}$$

Далее мы можем показать, что справедливо

Предложение 9. *Если выполняются следующие условия:*

а) *функциональная мера δ-образна (мера Дирака),*

б) *оператор, генерирующий ряд теории возмущений* $\mathbf{K}$, *известен,*

в) *функционал, описывающий взаимодействия* $U(u,\varphi)$, *задан,*

то формализм допускает произвольные нелинейные канонические преобразования.

Это утверждение основано на том, что δ-образная функциональная мера определяет полный набор вкладов в функциональный интеграл. (См., однако, обсуждение правила отбора из предложения 8. В связи с этим подчеркнем, что если теория не может быть определена на мере Дирака, как, например, в евклидовых теориях поля, то предложение 9 не имеет места.)

Доказательство предложения 9. Рассмотрим задачу из квантовой механики, которая является $(0+1)$-мерной аналогией теории поля. Соответствующая мера имеет вид

$$DM(u,p) = \prod_t du\, dp\, \delta\left(\dot{u} - \frac{\partial H_j}{\partial p}\right)\delta\left(\dot{p} + \frac{\partial H_j}{\partial u}\right), \tag{3.6}$$

где полный гамильтониан

$$H_j = \frac{1}{2}p^2 + v(u) - ju \tag{3.7}$$

оказывается явно зависящим от времени через $j(t)$.

Мы можем ввести новую пару сопряженных координат (ξ,η) вместо (u,p). Для этого подставим в (3.2)

$$1 = \int D\xi\, D\eta \prod_t \delta\left(\eta - \frac{1}{2}p^2 - m^2u^2 - v(u)\right)\delta\left(\xi - \int^u dx\, \big(2(\eta - v(x))\big)^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{3.8}$$

Здесь важно учесть, что обе меры, по (u,p) в (3.6) и по (ξ,η) в (3.8), δ-образны, т.е. имеют одинаковую мощность. Это позволяет уверенно менять порядки интегрирования и сначала проинтегрировать по (u,p).

Однако это справедливо при следующем условии. Как отмечалось выше, δ-образность меры ведет к необходимости суммирования по всем решениям уравнения Лагранжа. Иными словами, все фазовое пространство (u,p) должно быть разбито на подпространства, разделенные линиями бифуркации [80]. Причем траектории, принадлежащие каждому из подпространств, имеют различные топологии. В этом смысле каждая из траекторий (фазовых потоков) *полностью* принадлежит своему подпространству. Предполагается, что мы знаем структуру фазового пространства и, меняя вышеуказанный порядок интегрирования, рассматриваем конкретное подпространство.

Чтобы вычислить интегралы, мы можем воспользоваться δ-функциями из (3.6). В этом случае δ-функции из (3.8) будут давать ограничения на динамику, т.е. определять связи, в данном случае налагаемые начальными условиями, которые мы задаем с помощью координат ξ и η. Однако если воспользоваться δ-функциями из (3.8), то мы совершим отображение $(u,p) \to (\xi,\eta)$. Отметим, что алгебраические уравнения

$$\eta = \frac{1}{2}p^2 + m^2u^2 + v(u), \qquad \xi = \int^u dx\, \big(2(\eta - v(x))\big)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

полностью определяют траекторию $u_c(\xi,\eta)$ и $p_c(\xi,\eta)$ в фазовом пространстве. Оставшиеся после интегрирования по u и p две δ-функции $\delta(\dot u_c - \partial H_j/\partial p_c)\delta(\dot p_c + \partial H_j/\partial u_c)$ определят динамику в факторпространстве W.

Таким образом, можно утверждать, что отображение в W автоматически учитывает связи, так как перечисленные выше пути вычисления полностью адекватны друг другу.

Действительно, используя δ-функции из (3.8), мы найдем

$$DM(\xi,\eta) = \prod_t d\xi\, d\eta\, \delta\left(\dot\xi - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right)\delta\left(\dot\eta + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right). \tag{3.10}$$

Якобиан преобразования равен единице, поскольку наше отображение каноническое, $\{\xi(u,p),\eta(u,p)\} = 1$,

$$h_j(\xi,\eta) = \eta - ju_c(\xi,\eta) = H_j(u_c,p_c) \tag{3.11}$$

– преобразованный гамильтониан и $(u,p)_c(\xi,\eta)$ – решение алгебраических уравнений (3.9).

Отметим, что преобразование меры никак не затрагивает структуру оператора $\mathbf{K}$ и функционала U.

Приведенное выше решение копирует канонические отображения классической механики [80]. Оно основано на предположении, что алгебраические уравнения (см. (3.9)) полностью решают механическую задачу. В этом случае обычно говорят, что задача вполне интегрируема.

Итак, в приведенном выше примере мы разделили задачу на две части. В первой из них мы нашли фазовый поток $(u,p)_c(\xi,\eta)$, а во второй части решили динамическую задачу нахождения $(\xi,\eta) = (\xi,\eta)(t) \in W$ через уравнения

$$\dot\xi = \frac{\partial h_j}{\partial \eta} = 1 - j\frac{\partial u_c}{\partial \eta}, \qquad \dot\eta = -\frac{\partial h_j}{\partial \xi} = j\frac{\partial u_c}{\partial \eta}, \tag{3.12}$$

что отвечает квантованию факторпространства W. Заметим, что явный вид p_c оказался не нужен.

Разложим решение уравнений (3.12) по j:

$$\begin{aligned} \xi_j(t) &= \xi_0(t) + \int dt'\,\xi_1(t,t')j(t') + \cdots, \\ \eta_j(t) &= \eta_0(t) + \int dt'\,\eta_1(t,t')j(t') + \cdots. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Подставив эти разложения, найдем, что

$$\xi_0 = t_0 + t, \qquad \eta_0 = \mathrm{const}. \tag{3.14}$$

Тогда

$$\dot\xi_1(t,t') = -\delta(t-t')\frac{\partial u_c(\xi_0,\eta_0)}{\partial \eta_0(t)}, \qquad \dot\eta_1(t,t') = \delta(t-t')\frac{\partial u_c(\xi_0,\eta_0)}{\partial \xi_0(t)}. \tag{3.15}$$

Функция Грина $g(t,t')$ этих уравнений трансляционно-инвариантна:

$$\partial_t g(t,t') = \delta(t-t'). \tag{3.16}$$

Нетрудно видеть, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Если справедливо $i\varepsilon$-предписание Фейнмана, то*

$$g(t-t') = \theta(t-t'), \qquad g(0) = 1, \tag{3.17}$$

где $\theta(t-t')$ – ступенчатая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с учетом $i\varepsilon$-предписания фурье-образ равенства (3.16) имеет вид

$$(\omega + i\varepsilon)\tilde{g}(\omega) = 1, \tag{3.18}$$

что и дает (3.17).

Заметим, что в отличие от причинной функции Грина $G(t,t')$, которая есть сумма опережающей и запаздывающей частей, функция $g(t-t')$ зависит лишь от одной последовательности t и t'. Однако, как будет видно из дальнейшего, окончательная теория будет обратима во времени [52]. Отметим также единственность решения (3.17).

Мы будем использовать соотношения

$$g(t-t')g(t'-t) = 0, \qquad 1 = g(t-t') + g(t'-t), \qquad t \neq t', \tag{3.19}$$

рассматривая $g(t-t')$ как обобщенную функцию. Надо отметить также, что граничное условие $g(0) = 1$ (см. (3.17)) никак не обосновано. Оно выбрано нами исходя из опыта решения задач квантовой механики [50].

Итак, отобразив задачу на факторпространство W, мы нашли путь решения уравнения для функции Грина. Однако задача отображения на факторпространство W остается все же незавершенной, так как сохраняется зависимость от j – *лагранжева* источника квантовых флуктуаций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Если ряд теории возмущений, генерируемый оператором* $\mathbf{K}$, *существует, то существует также и представление* (3.2), *в котором*

$$DM(u,p) \to DM(\xi,\eta) = \prod_t d\xi\, d\eta\, \delta(\dot{\xi} - 1 - j_\xi)\delta(\dot{\eta} - j_\eta), \tag{3.20}$$

$$2\mathbf{K} = \operatorname{Re}\int_{C_+} dt\, \big(\hat{j}_\eta(t)\hat{e}_\eta(t) + \hat{j}_\xi(t)\hat{e}_\xi(t)\big), \tag{3.21}$$

$$\varphi \to \varphi_c = e_\eta \frac{\partial u_c}{\partial \xi} - e_\xi \frac{\partial u_c}{\partial \eta} \equiv (\varphi_\eta \hat{\xi} - \varphi_\xi \hat{\eta}) u_c. \tag{3.22}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем для простоты рассматривать $(0+1)$-мерную теорию. Действие оператора, генерирующего ряды теории возмущений, дает

$$\exp\left\{-\frac{i}{2}\operatorname{Re}\int_{C_+} dt\, \hat{j}(t)\hat{\varphi}(t)\right\} e^{-iU_T(x_c,\varphi)} \prod_t \delta\left(\dot{\xi} - 1 + j\frac{\partial x_c}{\partial \eta}\right)\delta\left(\dot{\eta} - j\frac{\partial x_c}{\partial \xi}\right) =$$
$$= \int D\varphi_\xi\, D\varphi_\eta \exp\left\{2i\operatorname{Re}\int_{C_+} dt\, \big((\dot{\xi}-1)\varphi_\xi + \dot{\eta}\varphi_\eta\big)\right\} e^{-iU_T(u_c,\varphi_c)}, \tag{3.23}$$

где φ_c определено в (3.22). Интегралы по $(\varphi_h, \varphi_\theta)$ будут, как обычно, вычисляться при помощи разложения в ряд:

$$e^{-iU_T(u_c,\varphi_c)} = \sum_{n_\xi,n_\eta=0}^{\infty} \frac{1}{n_\xi!\,n_\eta!} \int \prod_{k=1}^{n_\xi} \left(dt_k\, \varphi_\xi(t_k)\right) \prod_{k=1}^{n_\eta} \left(dt'_k\, \varphi_\eta(t'_k)\right) \times \\ \times P_{n_\xi,n_\eta}(u_c; t_1, \ldots, t_{n_\xi}, t'_1, \ldots, t_{n_\eta}), \tag{3.24}$$

где

$$P_{n_\xi,n_\eta}(u_c; t_1, \ldots, t_{n_\xi}, t'_1, \ldots, t_{n_\eta}) = \prod_{k=1}^{n_\xi} \widehat{\varphi}'_\xi(t_k) \prod_{k=1}^{n_\eta} \hat{e}'_\eta(t'_k) e^{-iU_T(u_c,\varphi'_c)}, \tag{3.25}$$

$\varphi'_c \equiv \varphi_c(\varphi'_\xi, \varphi'_\eta)$ и производные в этом равенстве вычисляются при $\varphi'_h = 0$, $\varphi'_\theta = 0$. С другой стороны,

$$\prod_{k=1}^{n_\xi} \varphi_\xi(t_k) \prod_{k=1}^{n_\eta} \varphi_\eta(t'_k) = \prod_{k=1}^{n_\xi} \left(i\hat{j}_\xi(t_k)\right) \prod_{k=1}^{n_\eta} \left(i\hat{j}_\eta(t'_k)\right) \times \\ \times \exp\left\{-2i\,\mathrm{Re} \int_{C_+} dt\, \left(j_\xi(t)\varphi_\xi(t) + j_\eta(t)\varphi_\eta(t)\right)\right\}, \tag{3.26}$$

при этом предел $(j_\xi, j_\eta) = 0$ предполагается. Подставив (3.25), (3.26) в (3.24), мы найдем новое представление для $\rho(E)$, в котором DM, **K** и φ_c определены равенствами (3.20)–(3.22). В этом выражении возмущения всех переменных связаны с отдельными источниками, и поэтому их перенормировки могут быть проанализированы по отдельности. Очевидно, что размерность теории не может повлиять на вывод окончательной формулы.

3.2. Общая теория преобразований. Приведенный выше пример демонстрирует выделенную роль канонических преобразований переменных интегрирования. Во-первых, это позволяет получить функциональную меру, которая свободна от ду́хов. Во-вторых, факторпространство W оказывается однородным и изотропным (см. (3.14)), в результате чего уравнение для функции Грина становится разрешимым, поскольку мы переходим в этом случае к переменным типа действие–угол.

Однако приведенное выше решение задачи отображения, по-видимому, непригодно в общем случае. Так, прежде всего, мы не можем быть уверены, что преобразование в W является каноническим. Например, в кулоновской задаче из-за скрытой $O(4)$-симметрии соответствующее факторпространство не является симплектическим [50], [51].

Вместе с тем общие принципы квантовой теории (соотношение неопределенностей) диктуют условие, что квантовые степени свободы должны принадлежать симплектическому подпространству T^*W. Иными словами, вообще говоря, мы должны иметь

$$W = T^*W \times R, \tag{3.27}$$

где R – пространство c-числовых нулевых мод. Все это означает также, что размерность T^*W может не совпадать с размерностью исходного фазового пространства. Равенство (3.27) означает, что мы должны уметь отделить квантовые степени свободы, принадлежащие T^*W, если хотим отобразить динамику в факторпространство $\mathcal{H}/\mathcal{G}$.

Более того, в интегрируемых моделях теории поля имеется *бесконечное* число (полиномиальных) законов сохранения. По этой причине использованная выше схема преобразований в кокасательное расслоение T^*W (отображение момента [80]), основанная на решении алгебраических уравнений типа (3.9), вообще говоря, неудобна. Поэтому в настоящем разделе мы попытаемся обобщить схему преобразований. Мы сформулируем более общий способ замены переменных в функциональном интеграле, который можно использовать и в теории поля, т.е. в системе с бесконечным числом степеней свободы, и в случае, если даже отображение не каноническое.

Мы воспользуемся следующей идеей. Как можно было заметить, классический фазовый поток $(u,p)_c$ полностью принадлежит $W \ni (\xi,\eta)$. Тогда можно попытаться обратить задачу, полагая, что

а) многообразие $W \neq \varnothing$ можно восстановить, если известны соответствующие потоки $(u,p)_c$;

б) квантовые возмущения не выводят $(u,p)_c$ из W.

Мы покажем ниже, что эти предположения оправданны.

Предложение 12. *Формализм* $(0+1)$-*мерной теории поля, основанный на* δ-*образной мере, позволяет отделить описание фазовых потоков на кокасательном расслоении* T^*W *от динамики в факторпространстве* W *произвольной размерности, если*

$$W = T^*W = \mathcal{G}/\mathcal{H}. \tag{3.28}$$

Доказательство. Пусть

$$\Delta(u,p) = \int \prod_t d\xi\, \delta\eta\, \delta\bigl(u(t) - u_c(\xi,\eta)\bigr)\delta\bigl(p(t) - p_c(\xi,\eta)\bigr) \tag{3.29}$$

– функционал переменных u и p. Мы полагаем, что $(\xi,\eta) \in W$. В этом выражении u_c и p_c – произвольные заданные функции $(\xi,\eta)(t)$. Наша цель – редуцировать задачу до такого уровня, когда u_c и p_c совпадут с решением уравнений Гамильтона.

Отметим, что равенства

$$u(t) = u_c(\xi,\eta), \qquad p(t) = p_c(\xi,\eta)$$

всегда могут быть удовлетворены при произвольных ξ и η. Это действительно так, поскольку интегрирование по u и p включает также и случай, когда справедливы эти равенства. Поэтому, вообще говоря, $\Delta(u,p) \neq 0$. Точнее, нам необходимо и достаточно предположить справедливость неравенства

$$\Delta_c(\xi,\eta) = \int \prod_t d\bar\xi\, d\bar\eta\, \delta\left(\frac{\partial u_c}{\partial \xi} d\bar\xi + \frac{\partial u_c}{\partial \eta} d\bar\eta\right)\delta\left(\frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\bar\xi + \frac{\partial p_c}{\partial \eta} d\bar\eta\right) \neq 0. \tag{3.30}$$

Отметим, что это условие только на u_c и p_c. Оно означает, что производные функций u_c и p_c в направлении вектора $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ равны нулю тогда и только тогда, когда все компоненты этого вектора равны нулю.

Чтобы совершить отображение, надо подставить в интегралы единицу

$$1=\frac{\Delta(u,p)}{\Delta_c(\xi,\eta)}$$

и проинтегрировать по u и p, используя δ-функции из (3.29).

В результате мы найдем меру следующего вида:

$$DM(\xi,\eta)=\frac{1}{\Delta_c(\xi,\eta)}\prod_t d\xi\, d\eta\, \delta\left(\dot{u}_c-\frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right)\delta\left(\dot{p}_c+\frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right). \tag{3.31}$$

Далее получим

$$\begin{aligned}
&\delta\left(\dot{u}_c-\frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right)\delta\left(\dot{p}_c+\frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right)=\\
&=\delta\left(\frac{\partial u_c}{\partial\xi}\dot{\xi}+\frac{\partial u_c}{\partial\eta}\dot{\eta}-\frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right)\delta\left(\frac{\partial p_c}{\partial\xi}\dot{\xi}+\frac{\partial p_c}{\partial\eta}\dot{\eta}+\frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right)=\\
&=\int\prod_t d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}\, \delta\left(\bar{\xi}-\left[\dot{\xi}-\frac{\partial h_j}{\partial\eta}\right]\right)\delta\left(\bar{\eta}-\left[\dot{\eta}+\frac{\partial h_j}{\partial\xi}\right]\right)\times\\
&\quad\times\delta\left(\frac{\partial u_c}{\partial\xi}\bar{\xi}+\frac{\partial u_c}{\partial\eta}\bar{\eta}+\{u_c,h_j\}-\frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right)\times\\
&\quad\times\delta\left(\frac{\partial p_c}{\partial\xi}\bar{\xi}+\frac{\partial p_c}{\partial\eta}\bar{\eta}+\{p_c,h_j\}+\frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right),
\end{aligned}$$

где скобки Пуассона

$$\{X,h_j\}=\frac{\partial X}{\partial\xi}\frac{\partial h_j}{\partial\eta}-\frac{\partial X}{\partial\eta}\frac{\partial h_j}{\partial\xi} \tag{3.32}$$

и введена вспомогательная функция $h_j=h_j(\xi,\eta)$. Определим ее соотношениями

$$\{u_c,h_j\}-\frac{\partial H_j}{\partial p_c}=0,\qquad \{p_c,h_j\}+\frac{\partial H_j}{\partial u_c}=0. \tag{3.33}$$

Эти равенства всегда могут быть выполнены, если функции u_c и p_c произвольны.

В результате, учитывая (3.33) и поскольку в (3.30) существенны окрестности $\bar{\xi}=0$ и $\bar{\eta}=0$, получаем

$$\begin{aligned}
&\delta\left(\dot{u}_c-\frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right)\delta\left(\dot{p}_c-\frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right)=\prod_t\delta\left(\dot{\xi}-\frac{\partial h_j}{\partial\eta}\right)\delta\left(\dot{\eta}-\frac{\partial h_j}{\partial\xi}\right)\times\\
&\quad\times\int\prod_t d\bar{\xi}\, d\bar{\eta}\, \delta\left(\frac{\partial u_c}{\partial\xi}\bar{\xi}+\frac{\partial u_c}{\partial\eta}\bar{\eta}\right)\delta\left(\frac{\partial p_c}{\partial\xi}\bar{\xi}+\frac{\partial p_c}{\partial\eta}\bar{\eta}\right)=\\
&=\prod_t\delta\left(\dot{\xi}-\frac{\partial h_j}{\partial\eta}\right)\delta\left(\dot{\eta}-\frac{\partial h_j}{\partial\xi}\right)\Delta_c(\xi,\eta).
\end{aligned}$$

Используя это выражение, мы найдем искомую преобразованную меру

$$DM(\xi,\eta) = \prod_t \delta\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right)\delta\left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right), \tag{3.34}$$

в которой функциональный детерминант сократился.

Напомним теперь, что переменные $(\xi,\eta) \in T^*W$, т.е. уравнения (3.33) описывают движение на кокасательном расслоении. В действительности приведенное выше преобразование представляет собой простую замену $(u,p)(t)$ на сложные функции $(u,p)_{\mathrm{c}}\big(\xi(t),\eta(t)\big)$. Эта замена пока не несет динамической нагрузки исходной задачи в том смысле, что или $(u,p)_{\mathrm{c}}\big(\xi(t),\eta(t)\big)$, или $h_j(\xi,\eta)$ остаются пока произвольными, с точностью до условия (3.30). Теперь нам следует уточнить эти величины. Следующее предложение очевидно.

Предложение 13. *Если имеет место равенство*

$$h_j(\xi,\eta) = H_j(u_{\mathrm{c}},p_{\mathrm{c}}), \tag{3.35}$$

то $(u,p)_{\mathrm{c}}(\xi,\eta)$ на мере (3.34) описывает фазовый поток в исходном фазовом пространстве.

Доказательство. Формальное доказательство этого равенства достаточно просто. Так, например,

$$\dot{u}_{\mathrm{c}}(\xi,\eta) = \frac{\partial u_{\mathrm{c}}}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial u_{\mathrm{c}}}{\partial \eta}\dot{\eta} \equiv \{u_{\mathrm{c}}, h_j\} = \frac{\partial H_j}{\partial p_{\mathrm{c}}}. \tag{3.36}$$

Здесь сначала была использована δ-образность меры (3.34), а затем первое из равенств (3.33). То же самое нетрудно получить для $p_{\mathrm{c}}(\xi,\eta)$. В этом смысле приведенный выше вывод повторяет утверждение предложения 12.

Итак, с учетом (3.35) и если функции $(u,p)_{\mathrm{c}}\big(\xi(t),\eta(t)\big)$ удовлетворяют уравнениям (3.33), то мера $DM(\xi,\eta)$ имеет вид (3.34) и каноническая система уравнений

$$\dot{\xi} = \frac{\partial h_j}{\partial \eta}, \qquad \dot{\eta} = -\frac{\partial h_j}{\partial \xi} \tag{3.37}$$

описывает поток в факторпространстве W, которое имеет симплектическую структуру. Это завершает доказательство предложения 12.

Заметим, что нами рассматривался вариант теории, для которой факторпространство совпадает с его кокасательным расслоением, т.е. случай, когда W – симплектическое многообразие (см. (3.28)). Однако справедливо

Предложение 14. *Формализм $(0+1)$-мерной теории поля, основанный на δ-образной мере, допускает также расширение пространства до симплектического многообразия $(\xi,\eta) \in T^*V$ произвольной размерности,* $\dim T^*V \geqslant \dim W$.

Доказательство. Иными словами, мы хотим показать, что можно рассматривать отображение в пространство произвольной размерности, но снабженное симплектической метрикой. При этом должен существовать механизм отделения "ненужных" степеней свободы расширенного факторпространства T^*V от динамических, чтобы зависимость от них в дальнейшем можно было сократить. Это означает возможность редукции T^*V до физического факторпространства W. Мы будем полагать на этом этапе, что W – симплектическое пространство, $W = T^*W$.

Отметим, что вплоть до условия (3.35) мы могли полагать, что размерность T^*W произвольна. Чтобы сформулировать схему редукции, предположим, что W есть подпространство T^*V: $W \subset T^*V$, т.е. $\dim T^*V \geqslant \dim W$. Выделим физическую группу переменных (ξ, η) так, чтобы

$$(\xi, \eta) \in W, \qquad \dim\{\xi\} = \dim\{\eta\}, \tag{3.38}$$

а остальные переменные (ξ', η') будем считать "нефизическими". Мы можем предположить при этом, что

$$\frac{\partial u_c}{\partial \xi'} \sim \frac{\partial u_c}{\partial \eta'} \sim \varepsilon \to 0, \qquad \frac{\partial p_c}{\partial \xi'} \sim \frac{\partial p_c}{\partial \eta'} \sim \varepsilon \to 0, \tag{3.39}$$

т.е. в пределе $\varepsilon = 0$ зависимость от нефизических степеней свободы исчезает.

С учетом выделенного в (3.39) свойства оператор $\mathbf{K}$ можно записать в виде

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re} \int_{C_+} dt \, \{\hat{j}_\xi \cdot \hat{e}_\xi + \hat{j}_\eta \cdot \hat{e}_\eta + \hat{j}_{\xi'} \cdot \hat{e}_{\xi'} + \hat{j}_{\eta'} \cdot \hat{e}_{\eta'}\}.$$

Однако с учетом (3.39) два последних слагаемых в пределе $\varepsilon = 0$ могут быть опущены. В результате получаем

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re} \int_{C_+} dt \, \{\hat{j}_\xi \cdot \hat{e}_\xi + \hat{j}_\eta \cdot \hat{e}_\eta\}. \tag{3.40}$$

Рассмотрим теперь меру DM. Учитывая выделенное в (3.39) свойство, а также явный вид оператора (3.40), получим

$$DM(\xi, \eta) = \prod_t \delta\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta\left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right) \delta(\dot{\xi}) \delta(\dot{\eta}),$$

поскольку зависимость от вспомогательных переменных исчезает в пределе $\varepsilon = 0$. Отметим теперь, что

$$\int \prod_t dX(t) \, \delta(\dot{X}) = \int dX(0).$$

Поэтому

$$DM(\xi, \eta) = d\xi'(0) \, d\eta'(0) \prod_t \delta\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta\left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right). \tag{3.41}$$

Мы будем полагать в дальнейшем, что интегралы по $\xi'(0), \eta'(0)$ сократятся за счет нормировки, что и требовалось показать.

Следующее обобщение предложения 14 очевидно.

Предложение 15. *Квантовые степени свободы могут образовать только четномерные симплектические многообразия.*

Это заключение естественно вписывается в классическую схему квантования, в основе которой лежит соотношение неопределенностей. Однако замечательно, что обсуждаемая схема квантования способна выделить подмножество q-чисел. Мы будем обозначать его через T^*W.

Доказательство предложения 15. Итак, мы намерены показать, что можно определить разбиение

$$W = T^*W \times R, \tag{3.42}$$

где R – подпространство c-чисел. Чтобы получить его, положим, что вместо равенства (3.38) имеем, например,

$$(\xi, \eta) \in W, \qquad \dim\{\xi\} > \dim\{\eta\}. \tag{3.43}$$

Напомним, что по определению T^*V – четномерное симплектическое многообразие. Все это означает, что оператор $\mathbf{K}$ имеет вид

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re}\int_{C_+} dt\,\{(\hat{j}_\xi \cdot \hat{e}_\xi)_{N_\eta} + (\hat{j}_\eta \cdot \hat{e}_\eta)_{N_\eta} + (\hat{j}_\xi \cdot \hat{e}_\xi)_{(N_\xi - N_\eta)} + (\hat{j}_{\eta'} \cdot \hat{e}_{\eta'})_{(N_\xi - N_\eta)}\},$$

где $N_X = \dim\{X\}$ и скалярное произведение $(X \cdot Y)_N$ содержит N слагаемых. Таким образом, мы добавили $(N_\xi - N_\eta)$ недостающих переменных η'. Производные по остальным "нефизическим" переменным мы опустили в силу предложения 14.

Отметим теперь, что в выражении для $\mathbf{K}$ последнее слагаемое, пропорциональное $\hat{e}_{\eta'}$, в пределе $\varepsilon = 0$ может быть опущено. По этой причине надо полагать в дальнейшем, что $j_{\eta'} = 0$. В результате в пределе $\varepsilon = 0$ мы найдем меру

$$DM(\xi,\eta) = \prod_t d^{(N_\eta)}\xi\, d^{(N_\xi - N_\eta)}\xi'\, d^{(N_\eta)}\eta\, d^{(N_\xi - N_\eta)}\eta' \times$$
$$\times\, \delta^{(N_\xi)}\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right)\delta^{(N_\eta)}\left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right)\delta^{(N_\xi - N_\eta)}(\dot{\xi}')\delta^{(N_\xi - N_\eta)}\left(\dot{\eta}' + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right),$$

где было учтено, что $(\partial h_j/\partial \eta') = 0$. Далее, мы всегда можем произвести замену $\dot{\eta}' + \partial h_j/\partial\xi \to \dot{\eta}'$, поскольку зависимости от η' нет. В результате получим

$$DM(\xi,\eta) = d^{(N_\xi - N_\eta)}\xi'(0)\prod_t d^{(N_\eta)}\xi\, d^{(N_\eta)}\eta\, \delta^{(N_\eta)}\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right)\delta^{(N_\eta)}\left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right),$$

где для сокращения записи мы опустили дифференциальную меру $d^{(N_\xi - N_\eta)}\eta'$, поскольку ни одна из величин не зависит от η'.

Заметим, что в выражении для меры исчезла зависимость от j_ξ, где ξ сопряжена η', $\dim\{\xi\} = N_\xi - N_\eta$. Именно это явление приводит к редукции тех квантовых степеней свободы, которые не составляют канонически-сопряженных пар.

Очевидно, что если окажется, что $\dim\{\xi\} < \dim\{\eta\}$, тогда следует поменять местами ξ и η в исходном выражении для оператора $\mathbf{K}$. Таким образом, в общем случае

$$DM(\xi,\eta) = d\Omega_{(N_\xi - N_\eta)} \prod_t \delta^{(\min\{N\})}\left(\dot\xi - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right)\delta^{(\min\{N\})}\left(\dot\eta + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right), \tag{3.44}$$

где при условии, что $\Theta(0) = 1/2$,

$$d\Omega_{(N_\xi - N_\eta)} = \Theta(N_\xi - N_\eta) d^{(N_\xi - N_\eta)}\xi(0) + \Theta(N_\eta - N_\xi) d^{(N_\eta - N_\xi)}\eta(0) \tag{3.45}$$

– мера интегралов c-числовых переменных, и соответственно

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re}\int_{C_+} dt\,\left\{(\hat{j}_\xi \cdot \hat{e}_\xi)_{(\min\{N\})} + (\hat{j}_\eta \cdot \hat{e}_\eta)_{(\min\{N\})}\right\}, \tag{3.46}$$

где $\min\{N\} = \min(N_\xi, N_\eta)$.

Таким образом, мы показали, что если переменная X не имеет канонически-сопряженной пары, то ее надо рассматривать как c-число и $\dim T^*W = \min\{N\}$. Возможность выделить $d\Omega_{(N_\xi - N_\eta)}$ означает, что W факторизуется на прямое произведение (3.42).

Теперь мы можем перейти к рассмотрению полевых переменных. Промежуточной моделью может служить пример, когда $u(t)$ – N-компонентная величина. Тогда функцию $u_{\mathrm{i}}(t) = u(\mathrm{i}, t)$ можно полагать образом поля на *пространственной* решетке, где i – координата ячейки. В результате получаем

Предложение 16. *Если* $u_c(\mathrm{x}, t; \xi, \eta)$, $p_c(\mathrm{x}, t; \xi, \eta)$ – *точное не сингулярное решение уравнений* (3.33), *удовлетворяющее условию* (3.30), *причем имеет место равенство* (3.35), *где полный гамильтониан*

$$\begin{aligned} H_j(u_c, p_c) &= \int d^3x\, \widetilde{H}_j(u_c, p_c) = \\ &= \int d^3x\, \left\{\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\nabla u_c)^2 + m^2u^2 + v(u) - ju\right\}, \end{aligned} \tag{3.47}$$

то дифференциальная мера скалярной теории на факторпространстве $(\xi, \eta) \in W$ *имеет вид*

$$DM(\xi,\eta) = d\Omega_{(N_\xi - N_\eta)} \prod_t \delta\left(\dot\xi(t) - \frac{\delta h_j}{\delta\eta(t)}\right)\delta\left(\dot\eta(t) + \frac{\delta h_j}{\delta\xi(t)}\right), \tag{3.48}$$

где $\dim\{\xi\} = \dim\{\eta\} = \min\{N_\xi, N_\eta\}$, *дифференциальная мера имеет вид* (3.45) *и оператор, генерирующий квантовые возмущения,*

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re}\int_{C_+} dt\,\left\{\hat{j}_\xi(t) \cdot \hat{e}_\xi(t) + \hat{j}_\eta(t) \cdot \hat{e}_\eta(t)\right\}. \tag{3.49}$$

Доказательство этого утверждения прямо следует из предложений 12–15. Замечательно, что теоретико-полевая задача на факторпространстве совпадает с квантово-механической.

Подставив (3.35) в (3.33), мы найдем равенства

$$
\begin{aligned}
&\{u_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t)),u_c(\mathbf{y};\xi(t),\eta(t))\}=0,\\
&\{p_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t)),p_c(\mathbf{y};\xi(t),\eta(t))\}=0,\\
&\{u_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t)),p_c(\mathbf{y};\xi(t),\eta(t))\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

которые должны выполняться при любом значении $j(\mathbf{x},t)$. Таким образом, найденная схема квантования переносит каноническую схему в факторпространство.

4. $O(4,2)$-ИНВАРИАНТНАЯ СКАЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ

Начнем рассмотрение со скалярной теории, которая проще, чем теория векторных полей Янга–Миллса, но обладает самой высокой (более высокой, чем общекоординатные преобразования) конформной группой симметрии $O(4,2)$.

4.1. Производящий функционал скалярного безмассового поля. Мы будем вычислять $2N$-мерный функциональный интеграл

$$
\rho(\beta,z)=e^{-i\mathbf{K}(je)}\int DM(\xi,\eta)\,e^{-iU(u_c,\varphi_c)}e^{-N(\beta,z;u_c)}
\tag{4.1}
$$

для $O(4,2)$-инвариантной скалярной теории. Здесь

$$
N(\beta,z;u_c)=n(\beta_i,z_i;u_c)+n^*(\beta_f,z_f;u_c),
\tag{4.2}
$$

$$
n(\beta,z;u_c)=\int d\omega_1(q;z)\,e^{-\beta\varepsilon(q)}\Gamma(q,u_c)\Gamma^*(q,u_c),
\tag{4.3}
$$

$$
\Gamma(q,u_c)=\int dx\,e^{-iqx}\partial^2u_c(x),\qquad q^2=0,
\tag{4.4}
$$

$$
U(u_c,\varphi_c)=2g\,\mathrm{Re}\int_{C_+}d^3x\,dt\,\varphi_c^3(\mathbf{x},t)u_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t)),
\tag{4.5}
$$

$$
\varphi_c(\mathbf{x},t)=e_\xi(t)\frac{\partial u_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t))}{\partial\eta(t)}-e_\eta(t)\frac{\partial u_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t))}{\partial\xi(t)},
\tag{4.6}
$$

$$
DM(u)=d\Omega\prod_t d\xi(t)\,d\eta(t)\,\delta\Big(\dot\xi-\frac{\partial h}{\partial\eta}-j_\xi\Big)\delta\Big(\dot\eta+\frac{\partial h}{\partial\xi}-j_\eta\Big),
\tag{4.7}
$$

где

$$
h(\xi,\eta)=h_j(\xi,\eta)\big|_{j=0},
$$

и, наконец,

$$
2\mathbf{K}(je)=\mathrm{Re}\int_{C_+}dt\,\{\hat{j}_\xi(t)\cdot\hat{e}_\xi(t)+\hat{j}_\eta(t)\cdot\hat{e}_\eta(t)\}.
\tag{4.8}
$$

Предполагается, что

$$W = T^*W \times R, \qquad (\xi, \eta) \in T^*W, \qquad \dim W = 8, \qquad \dim T^*W = 2N \leqslant 8. \tag{4.9}$$

Отметим, что, вообще говоря, $\Gamma(q, u_c) \neq 0$, поскольку, даже если поля достаточно быстро убывают на σ_∞, $u_c = u_c(\mathbf{x}; \xi(t), \eta(t))$ зависит от сингулярных (обобщенных) функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$, которые определены через функцию Грина (3.17) (см. предложение 10).

Нам будет удобно произвести такую замену переменных в $2N$-мерном функциональном интеграле (4.1), чтобы исключить в мере (4.7) зависимость от $2N$ источников j_x, j_η. Пусть производится сдвиг

$$\begin{aligned} \xi(t) &\to \xi(t) + \int dt_1\, g(t - t_1) j_\xi(t) \equiv \xi(t) + \xi_j(t), \\ \eta(t) &\to \eta(t) + \int dt_1\, g(t - t_1) j_\eta(t) \equiv \eta(t) + \eta_j(t), \end{aligned} \tag{4.10}$$

где $g(t - t_1)$ – функция Грина (3.17). Тогда везде

$$u_c = u_c\bigl(\mathbf{x}; \xi(t) + \xi_j(t), \eta(t) + \eta_j(t)\bigr). \tag{4.11}$$

Следовательно,

$$DM(\xi, \eta) = d\Omega \prod_t d\xi(t)\, d\eta(t)\, \delta\bigl(\dot\xi - \omega(\eta + \eta_j)\bigr)\delta(\dot\eta). \tag{4.12}$$

Здесь мы учли, что ξ и η – канонически-сопряженные переменные и соответственно $\partial h/\partial\xi = 0$. Было введено также обозначение $\omega_i(\eta) = \partial h(\eta)/\partial\eta_i$.

Произведя сдвиг (4.10), мы должны переопределить генерирующий возмущения оператор следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{K} &= \mathrm{Re} \int_{C_+} dt\, \bigl\{\hat\xi_j(t) \cdot \hat e_\xi(t) + \hat\eta_j(t) \cdot \hat e_\eta(t)\bigr\} = \\ &= \mathrm{Re} \int_{C_+} dt\, dt_1\, \theta(t - t_1) \bigl\{\hat j_\xi(t_1) \cdot \hat e_\xi(t) + \hat j_\eta(t_1) \cdot \hat e_\eta(t)\bigr\}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.2. Структура $O(4,2)/O(4) \times O(2)$-факторпространства. Нас будет интересовать квантование $O(4) \times O(2)$-инвариантного решения [84]

$$u_c(x) = \left\{ \frac{-(\varsigma - \sigma)^2}{g(x - \varsigma)^2 (x - \sigma)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.14}$$

Оно регулярно, если 4-векторы ς и σ комплексны, и действительно, если

$$\varsigma^* = \sigma = x_0 + i\lambda'. \tag{4.15}$$

Тогда выражение (4.14) может быть записано в виде

$$\sqrt{g}\,u_c(x) = \left\{ \frac{4\eta^2}{\left(\eta^2(x+x_0)^2-1\right)^2 + 4\left(\eta(x+x_0)_\mu\lambda^\mu\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4.16}$$

где $\lambda^2 = \lambda_0^2 - \lambda_i^2 = 1$. Это решение зависит от восьми параметров $(x_{0\mu}, \lambda_i, \eta)$, где $\mu = 0,1,2,3,\ i = 1,2,3$. Подставив эти выражения в формулу

$$h = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}p_c^2 + \frac{1}{2}(\nabla u_c)^2 + \frac{g}{4}u_c^4 \right\}, \tag{4.17}$$

мы найдем, что

$$h = \eta\Phi(\lambda_i^2). \tag{4.18}$$

Равенство (4.18) можно считать *определением* набора переменной η.

Мы будем полагать, что физическое факторпространство W ограничено неравенствами

$$\eta^2 \geqslant 0, \qquad -\infty \leqslant \lambda_i \leqslant +\infty, \qquad -\infty \leqslant x_{0\mu} \leqslant +\infty. \tag{4.19}$$

Заметим, что первое из этих неравенств обеспечивает положительность энергии классического поля.

Нам надо теперь определить редукцию квантовых степеней свободы, которая ведет к формуле (3.27). Для этого мы должны еще раз рассмотреть уравнения (3.33)

$$\{u_c, h\} - \frac{\delta H}{\delta p_c} = 0, \qquad \{p_c, h\} + \frac{\delta H}{\delta u_c} = 0. \tag{4.20}$$

Как отмечалось выше, уравнения (3.33) должны выполняться для любых j_ξ, j_η, в частности при $j_\xi = 0,\ j_\eta = 0$. Поэтому с учетом (4.18) первое из уравнений (4.20) дает

$$\frac{\partial u_c}{\partial \xi}\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{\delta H}{\delta p_c} = p_c. \tag{4.21}$$

В результате найдем, что искомая параметризация поля имеет вид ($\lambda \equiv |\lambda_i|$)

$$u_c(\mathrm{x}; \xi, \eta) = \frac{2\eta\Phi^2(\lambda)}{\sqrt{g}} \Big\{ \left(\eta^2\xi^2 - \Phi^2(\lambda)\eta^2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2 - \Phi^2(\lambda)\right)^2 + \\ + 4\eta^2\Phi^2(\lambda)\left(\xi(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \Phi(\lambda)\lambda_i(x-x_0)_i\right)^2 \Big\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.22}$$

Нетрудно проверить, что решение (4.22) удовлетворяет первому из уравнений (4.20) тождественно.

Параметризация (4.22) удобна тем, что в этом случае

$$DM = d^3\lambda\, d^3x_0 \prod_t d\xi\, d\eta\, \delta\left(\dot{\xi} - \Phi(\lambda)\right)\delta(\dot{\eta}). \tag{4.23}$$

Тогда уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \Phi(\lambda), \qquad \dot{\eta}(t) = 0 \tag{4.24}$$

определяют динамику в пространстве W и имеют решения

$$\xi(t) = \Phi(\lambda)(t - t_0), \qquad \eta(t) = \eta_0 = \text{const}, \tag{4.25}$$

что завершает определение функциональной меры в факторпространстве $W = O(4,2)/O(4) \times O(2)$. Подставив (4.25) в (4.22), мы найдем, что полученное таким образом решение удовлетворяет исходному уравнению Лагранжа тождественно.

В результате мы получили

$$\{\xi, \eta\} \in T^*W, \qquad \dim T^*W = 2; \qquad \{x_{0i}, \lambda_i\} \in R, \qquad \dim R = 6. \tag{4.26}$$

4.3. Законы сохранения в факторпространстве. Вернемся к граничному условию (2.17). Оно означает, что

$$u_c(x \in \partial\sigma_\infty^+) = u_c(x \in \partial\sigma_\infty^-), \tag{4.27}$$

где $\partial\sigma_\infty^\pm$ – границы на бесконечно удаленной гиперповерхности σ_∞ ветвей $C_\pm$, соответственно. Условия (4.27) в зависимости от топологии поля $u_c(\mathrm{x}, t)$ могут ограничить решения уравнений (4.24).

Чтобы пояснить это замечание, рассмотрим простейшую задачу о движении частицы в потенциальной яме $v(u)$. Действие этой задачи имеет вид

$$S_T(u) = \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{u}^2 - v(u) \right\},$$

где $(0, T)$ – интервал движения, т.е. начальная координата не задана. Если энергия частицы E задана, то по времени T следует проинтегрировать. Таким образом, мера Дирака DM этой задачи содержит две δ-функции [56]. Обычная (одномерная) δ-функция приводит к уравнению

$$E = -\eta_q + H_j\big(u(T)\big),$$

где η_q – энергия квантовых поправок, $H_j\big(u(T)\big)$ – полный гамильтониан в момент времени T. Вторая, функциональная δ-функция дает уравнение движения

$$\ddot{u} + m^2 u + v'(u) = j.$$

Решение этого уравнения при $j = 0$ задается, например, энергией $\eta(0)$ и начальным моментом времени $\xi(0)$. Напомним, что, вообще говоря, по $\eta(0)$, $\xi(0)$ следует проинтегрировать.

При получении δ-образной меры Дирака было использовано периодическое граничное условие

$$u\big(t \in \partial C_+(T)\big) = u\big(t \in \partial C_-(T)\big).$$

Далее, поскольку мы хотим описать периодическое движение в потенциальной яме, это граничное условие может быть удовлетворено для множества значений $\xi(0)$. Так, нетрудно найти, что если $\xi(t \in C_\pm) \equiv \xi_\pm$, то

$$\xi_+ - \xi_- = \Delta\xi = kP(E) + t_0, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $P(E)$ – период, $0 \leqslant t_0 \leqslant P(E)$. Именно эта необходимость суммировать по всем k приводит к квантованию уровней энергии [56]. Отметим также, что граничное условие дает равенство $\eta_+ = \eta_-$, где $\eta(t \in C_\pm) \equiv \eta_\pm$.

Поскольку η и ξ составляют канонически-сопряженную пару (см. п. 3.1), они могут быть использованы как обобщенные импульс и координата, соответственно. Тогда, нормируя ξ на период, мы найдем, что полученная выше неопределенность с выбором начального условия отвечает вращению с числом поворотов $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, т.е. число k определяет, сколько раз покрывается окружность при отображении $(u, p) \to (\xi, \eta)$. При этом следует просуммировать по всем целым k.

Это же явление приводит к тому, что импульсы и положения топологических солитонов модели синус-Гордон, определенных на ветвях C_+ и C_-, совпадают, но с точностью до некоторого числа. Суммирование по его значениям приводит к квантованию топологического заряда солитонов и соответственно к их "стерильности" по отношению к испусканию и поглощению частиц [52].

Таким образом, если исследуется задача с замкнутой классической траекторией, то наши граничные условия приводят к периодическим соотношениям между константами интегрирования $\xi(0)_+$ и $\xi(0)_-$, принадлежащими соответственно к контурам C_+ и C_-. Это свойство траекторий в конфигурационном пространстве формулируется обычно как условие существования группы гомотопий [85].

Имеется также другая возможность, когда траектория незамкнута, т.е. не имеет топологических свойств. Однако все же надо учитывать, что граничное условие (2.17) обеспечивает замкнутость траектории на полном временном контуре $C = C_+ + C_-$. В этом случае мы будем условно говорить о синглете группы гомотопий.

Итак, в первую очередь нам следует определить отношение рассматриваемого вклада к группе гомотопий. Нетрудно найти, что топологический заряд обсуждаемого $O(4) \times O(2)$-инвариантного решения равен нулю [65]. Таким образом, нами рассматривается синглет группы гомотопий. Покажем, однако, что справедливо

Предложение 17. *Перенормированный тензор энергии-импульса $Q_\mu = T_{\mu\mu}(u_c)$ совпадает с полным 4-импульсом налетающих частиц.*

Доказательство. Подставив решение (4.25) в (4.22), из (4.27) мы получим равенство

$$\begin{aligned}
&\eta_-^2 \left\{ \left(\eta_+^2 (t + t_+)^2 - \eta_+^2 (\mathrm{x} - \mathrm{x}_+)^2 - 1\right)^2 + \right.\\
&\qquad \left. + 4\eta_+^2 \left((t + t_+)(1 + \lambda_+^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda_{i+}(x - x_+)_i\right)^2 \right\} =\\
&= \eta_+^2 \left\{ \left(\eta_-^2 (t + t_-)^2 - \eta_-^2 (\mathrm{x} - \mathrm{x}_-)^2 - 1\right)^2 + \right.\\
&\qquad \left. + 4\eta_-^2 \left((t + t_-)(1 + \lambda_-^2)^{\frac{1}{2}} - \lambda_{i-}(x - x_-)_i\right)^2 \right\},
\end{aligned}$$

которое должно выполняться при $x_\mu \in \sigma_\infty$. Отсюда непосредственно находим, что

$$\eta_+ = \eta_-, \qquad \lambda_{i-} = \lambda_{i-}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{4.28}$$

Однако никаких условий на $x_{\mu,\pm}$ не возникает.

В результате дифференциальная мера (4.23) в действительности имеет вид

$$dM = d^3\lambda\, d\eta\, d^4x_+\, d^4x_- = \frac{1}{16} d^3\lambda\, d\eta\, d^4x_0\, d^4\Delta, \tag{4.29}$$

где

$$\Delta = x_+ - x_-, \qquad x_0 = x_+ + x_-.$$

Произведя сдвиги $x \to x - x_\pm$, мы можем выделить из $\Gamma(q, u_c)$ зависимость от $x_\pm$:

$$\left|\Gamma(q, u_c)\right|^2 = e^{iq\Delta}\left|\Gamma'(q, u_c)\right|^2, \tag{4.30}$$

где $\Gamma'(q, u_c)$ уже не зависит от x_0. Мы увидим, что вариация поля по $x_\pm$ дает множитель $e^{-iQ_\mu \Delta^\mu}$, где $Q_\mu(u_c) = T_{\mu\mu}(u_c)$ – перенормированный тензор энергии-импульса.

Разлагая подынтегральное выражение (4.1) по степеням $\left|\Gamma(q, u_c)\right|^2$ и учитывая (4.30), мы найдем, что в результате интегрирования по Δ возникнет δ-функция, фиксирующая законы сохранения энергии-импульса:

$$\delta^{(4)}\left(\sum_i p_i - Q(u_c)\right), \tag{4.31}$$

которая связывает полный 4-импульс налетающих (или же рожденных) частиц с 4-импульсом классического поля $Q_\mu(u_c)$.

Покажем теперь, что входящий в (4.31) тензор Q_μ – тензор энергии-импульса. По определению

$$U(u_c, e) = \left(S_{C_+}(u_c + e) - S_{C_-}(u_c - e)\right) + 2\,\mathrm{Re}\int_{C_+} dx\, \left(\partial^2 u_c + v'(u_c)\right) e \tag{4.32}$$

или, что то же самое,

$$U(u_c, e) = \left\{S(u_c) - g\int dx\, u_c(x) e(x)^3\right\}_{C_+} - \left\{S(u_c) + g\int dx\, u_c(x) e(x)^3\right\}_{C_-}. \tag{4.33}$$

Рассмотрим разность $\delta S(u_c) = S_{C_+}(u_c) - S_{C_-}(u_c)$, которой в предыдущих выражениях мы пренебрегали (см. (2.56)). Эта разность есть вариация действия $\delta S(u_c)$ относительно группы трансляций

$$x_\mu \to x_\mu + \delta x_\mu, \qquad \delta x_\mu = \Delta_\mu.$$

Тогда в низшем порядке по Δ имеем

$$\delta S(u_c) = \Delta^\mu T_{\mu\mu}(u_c) + \widetilde{\delta S}(\Delta), \tag{4.34}$$

где $T_{\mu\mu}(u_c)$ – тензор энергии-импульса поля и последний член включает высшие степени Δ. Нетрудно проверить, что этот член не играет роли. Действительно, мы можем написать

$$e^{-i\widetilde{\delta S}(\Delta)} = e^{i\hat{\tau}\hat{\sigma}}e^{-i\varsigma\Delta}e^{-i\widetilde{\delta S}(\tau)}, \tag{4.35}$$

где $\hat{\sigma}$ означает соответствующую производную в нуле. Используя это выражение, мы найдем, что δ-функция, фиксирующая законы сохранения, имеет вид

$$e^{i\hat{\tau}\hat{\varsigma}}\delta\left(\sum_i p_i - Q - \varsigma\right)e^{-i\widetilde{\delta S}(\tau)}. \tag{4.36}$$

Однако сдвиг аргумента δ-функции невозможен, так как справедливо тождество

$$(e^{-i\hat{\varsigma}\hat{\tau}} - 1)\delta\left(\sum_i p_i - Q - \varsigma\right)e^{-i\widetilde{\delta S}(\tau)} \equiv 0. \tag{4.37}$$

При этом было использовано следующее свойство δ-функции:

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma}\delta\left(\sum_i p_i - Q - \varsigma\right)\bigg|_{\varsigma=0} = -\delta\left(\sum_i p_i - Q\right)\frac{\partial}{\partial Q}.$$

Это завершает доказательство предложения 17.

В результате имеем

$$\rho(\alpha, z) = e^{-i\mathbf{K}}\int dM\, e^{iQ_\mu(u_c)\Delta^\mu}e^{-iU(u_c,\varphi)}e^{-N(\alpha,z;u_c)}, \tag{4.38}$$

где dM определено в (4.29).

5. НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

Ниже мы рассмотрим лишь векторные калибровочные поля, полагая, что взаимодействия с полями материи (кварков) могут быть учтены по теории возмущений. Поэтому часть результатов данного раздела для теории поля Янга–Миллса будет иметь ограниченную область применимости. Например, мы не можем утверждать, что перенормировка массы кварков отсутствует. Этот вопрос требует дополнительного обсуждения.

5.1. Теория Янга–Миллса на мере Дирака. Действие рассматриваемой теории

$$S(A) = \frac{1}{2g}\int d^4x\, F_{\mu\nu a}(A)F_a^{\mu\nu}(A) \tag{5.1}$$

$O(4,2)$-инвариантно. Поля Янга–Миллса

$$F_{\mu\nu a}(A) = \partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - C_a^{bc}A_{\mu b}A_{\nu c} \tag{5.2}$$

– коварианты неабелевых калибровочных преобразований. Мы не будем фиксировать калибровочную группу.

Для простоты начнем рассмотрение с интеграла

$$\mathcal{N} = e^{-i\mathbf{K}(je)} \int DM\, e^{-2iU(A,e)}, \tag{5.3}$$

где мера

$$DM(A) = \prod_{\mu,a} \prod_{x} dA^a_\mu(x,t)\, \delta(D^{\nu b}_a F_{\nu\mu b} - j_{\mu a}) \tag{5.4}$$

явно конформно и калибровочно-инвариантна, если $j_{\mu a} = 0$. Ковариантная производная имеет вид

$$D^{\mu b}_a = \partial^\mu \delta^b_a + C^{bc}_a A^\mu_c,$$

а оператор, генерирующий возмущения,

$$2\mathbf{K}(je) = \mathrm{Re} \int_{C_+} d^4x\, \frac{\delta}{\delta j^\mu_a(x,t)} \frac{\delta}{\delta e_{\mu a}(x,t)}. \tag{5.5}$$

Как обычно, $j_{\mu a}$ и e^μ_a следует взять равными нулю в самом конце вычислений. Функционал

$$-2U(A,e) = S_{C_+}(A+e) - S_{C_-}(A-e) - 2\,\mathrm{Re} \int_{C_+} d^4x\, e^\mu_a(x) \frac{\delta S(A)}{\delta A^\mu_a} + O(\varepsilon) \tag{5.6}$$

описывает взаимодействия. Все величины определены на комплексном контуре Миллса. В выражении (5.6) можно опускать члены $\sim \epsilon \to +0$. Следовательно, $U(A,e) = O(e^3)$ и содержит лишь нечетные степени $e_{a\mu}$. Это означает, что функционал $U(A,e)$ может быть записан в форме

$$U(A,e) = -\int d^4x \left\{ e^\mu_a(x) \frac{\delta}{\delta A^\mu_a(x)} \right\}^3 S(A). \tag{5.7}$$

5.2. Формализм первого порядка. Нековариантный формализм с электрическим полем $E^i_a = F^{i0}_a$ представляет введение в необходимое нам гамильтоново описание. Действие в этом случае имеет вид

$$S_{C_\pm}(A,F) = \frac{1}{g} \int_{C_\pm} d^4x \left\{ \dot{\mathbf{A}}_a \cdot \mathbf{E}_a + \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2_a + \mathbf{B}^2_a(\mathbf{A})) - A_{0a}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})_a \right\}, \tag{5.8}$$

где магнитное поле

$$\mathbf{B}_{ia}(\mathbf{A}) = (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_{ia} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_k]_a \tag{5.9}$$

не является независимой величиной и было введено лишь для краткости записи формул. Отметим, что величина A_{0a} не имеет сопряженной пары, и действие S линейно по этой величине.

Мера (5.4) может быть записана в формализме первого порядка:

$$DM(\mathbf{A},\mathbf{P}) = \prod_a \prod_x d\mathbf{A}_a(x)\, d\mathbf{P}_a(x)\, \delta(\mathbf{D}_a^b \cdot \mathbf{P}_b)\times$$
$$\times\, \delta\left(\dot{\mathbf{P}}_a(x) + \frac{\delta H_j(\mathbf{A},\mathbf{P})}{\delta \mathbf{A}_a(x)}\right) \delta\left(\dot{\mathbf{A}}_a(x) - \frac{\delta H_j(\mathbf{A},\mathbf{P})}{\delta \mathbf{P}_a(x)}\right), \qquad (5.10)$$

где

$$d\mathbf{A}_a(x)\, d\mathbf{P}_a(x) = \prod_i dA_{ia}\, d\mathbf{P}_{ai}(x) \qquad (5.11)$$

и $H_j(\mathbf{A},\mathbf{P})$ – полный гамильтониан:

$$H_j = \frac{1}{2g}\int d^3x\,\left(\mathbf{P}_a^2 + \mathbf{B}_a^2(\mathbf{A})\right) + \int d^3x\, \mathbf{j}_a \mathbf{A}_a, \qquad (5.12)$$

$\mathbf{P}_a(x) \equiv \mathbf{E}_a(x)$ – сопряженный $\mathbf{A}_a(x)$ импульс, $\mathbf{B}_a(\mathbf{A})$ определено в (5.9). В выражение для меры DM может быть введена дополнительная δ-функция

$$\prod_a \prod_x \delta\left(\mathbf{B}_a^i - (\operatorname{rot}\mathbf{A})_a^i - \frac{1}{2}\varepsilon^i_{jk}[A^j, A^k]_a\right). \qquad (5.13)$$

Тогда гамильтониан (5.12) оказывается симметричной по полям $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{B}_a$ структурой.

Отметим, что первая δ-функция в (5.10) является следствием линейности действия по A_{0a}. Временная компонента A_{0a} действительно имеет смысл лагранжева множителя закона Гаусса:

$$\mathbf{D}_a^b \cdot \mathbf{P}_b = 0. \qquad (5.14)$$

Следует подчеркнуть отсутствие уравнения для A_{0a}. Более того, зависимость от A_{0a} полностью исчезла, так как описывающий взаимодействия функционал $U(A, e)$ определяется третьей производной по $A_{\mu a}$ (см. (5.7)).

5.3. Отображение в факторпространство. Мера (5.10) не имеет физического смысла, поскольку зависит от трех (для данного a) вектор-потенциалов $\mathbf{A}_a(x)$. Чтобы исключить “нефизические” степени свободы, обычно используется фиксирующий калибровку анзац Фаддеева–Попова. Однако нам будет удобнее иной подход.

Так же как в разделе 2, мы введем величину

$$\Delta(\mathbf{A},\mathbf{P}) = \int D\xi\, D\eta \prod_a \delta\big(\mathbf{A}_a(x) - \mathbf{u}_a\big(x;\xi(x),\eta(x)\big)\big)\times$$
$$\times\, \delta\big(\mathbf{P}_a(x) - \mathbf{p}_a\big(x;\xi(x),\eta(x)\big)\big), \qquad (5.15)$$

чтобы реализовать преобразование

$$u\colon (\mathbf{A},\mathbf{P})_a(x) \to (\xi,\eta)(x) \qquad (5.16)$$

с помощью сложных векторных функций $(\mathbf{u},\mathbf{p})_a\big(x;\xi(x),\eta(x)\big)$ к локальным в *пространстве-времени* функциям $(\xi,\eta)(x)$. Предполагается, что $\Delta \neq 0$.

Совершив преобразование (5.16), мы найдем

$$DM(\xi,\eta)=\frac{1}{\Delta_c(u)}\prod_a\prod_x d\xi\,d\eta\,d\lambda_a\,dq_a\,\delta(\mathbf{D}_a^b\cdot\mathbf{p}_b)\times$$
$$\times\,\delta\left(\dot{\mathbf{u}}_a(x)-\frac{\delta H_j}{\delta\mathbf{p}_a(x)}\right)\delta\left(\dot{\mathbf{p}}_a(x)+\frac{\delta H_j}{\delta\mathbf{u}_a(x)}\right). \tag{5.17}$$

Вообще говоря, набор ξ, η произволен (см. п. 3.2, предложение 14). Поэтому мы можем рассматривать фазу калибровочных преобразований λ_a и сопряженный ей заряд q_a наравне с ξ и η. Однако для удобства зависимость от $\lambda_a(\mathbf{x},t)$ и $q_a(\mathbf{x},t)$ была выделена из наборов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Повторив приведенные в разделе 2 вычисления, мы найдем

$$DM(\xi,\eta,\lambda,Q)=\prod_{x,t,a} d\xi\,d\eta\,d\lambda\,dq\,\delta\big(\mathbf{D}_a^b(\mathbf{u})\cdot\mathbf{p}_b\big)\times$$
$$\times\,\delta\left(\dot\lambda_a-\frac{\delta h_j}{\delta q_a}\right)\delta\left(\dot q_a+\frac{\delta h_j}{\delta\lambda_a}\right)\delta\left(\dot\xi-\frac{\partial h_j}{\partial\eta}\right)\delta\left(\dot\eta+\frac{\partial h_j}{\partial\xi}\right). \tag{5.18}$$

Равенство (5.18) выполняется тогда и только тогда, когда функции h_j определены уравнениями Пуассона (при заданных 3-векторах $\mathbf{u}_a$ и $\mathbf{p}_a$)

$$\{\mathbf{u}_a(x),h_j\}=\frac{\delta H_j}{\delta\mathbf{p}_a(x)},\qquad \{\mathbf{p}_a(x),h_j\}=-\frac{\delta H_j}{\delta\mathbf{u}_a(x)}. \tag{5.19}$$

При этом (ξ,η) и (λ,q) в скобках Пуассона выбраны как канонически-сопряженные пары.

Если добавить к (5.19) еще одно равенство:

$$h_j(\xi,\eta,\lambda,q)=H_j(\mathbf{u}_a,\mathbf{p}_a), \tag{5.20}$$

то, как было показано выше, $\mathbf{u}_a$ и $\mathbf{p}_a$ должны совпадать с решениями исходных уравнений при условии, что уравнения (5.19) удовлетворяются на мере (5.18). Тогда

$$\mathbf{D}_a^b(u)\cdot\mathbf{p}_b\equiv 0, \tag{5.21}$$

поскольку $\mathbf{p}_b$ – решение уравнений (5.19) при произвольных $j_{\mu a}$. Этот замечательный результат является следствием отображения в инвариантное пространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, которому классический фазовый поток полностью принадлежит. Таким образом, соответствующая (5.21) δ-функция в (5.18) дает тождественно $\prod_x\delta(0)$. Этот бесконечный множитель сократится в результате нормировки и не будет явно выписываться.

Итак, описанное отображение дает

$$DM(\xi,\eta,\lambda,Q)=\prod_{x,t,a} d\lambda_a\,dq_a\,d\xi\,d\eta\,\delta(\dot\lambda_a)\,\delta\left(\dot q_a+\frac{\delta h_j}{\delta\lambda_a}\right)\delta\left(\dot\xi-\frac{\partial h_j}{\partial\eta}\right)\delta\left(\dot\eta+\frac{\partial h_j}{\partial\xi}\right). \tag{5.22}$$

Здесь было учтено, что функции $(u,p)_a$ не зависят от q_a. Гамильтониан h_j определяется равенством (5.20):

$$2gh_j = \int d^3x \left(p_a^2 + \mathbf{B}_a^2(u)\right) + \int d^3x\, \mathbf{j}_a \mathbf{u}_a \equiv h + J, \tag{5.23}$$

где h – невозмущенный силой $\mathbf{j}_a$ гамильтониан.

Согласно предложению 15 мы можем исключить зависимость от q_a:

$$DM(\xi,\eta,\lambda) = dR \prod_{x,a} d\lambda_a\, d\xi\, d\eta\, \delta(\dot\lambda_a)\, \delta(\dot\xi - \omega - j_\xi)\, \delta(\dot\eta - j_\eta), \tag{5.24}$$

где "скорость" $\omega = \partial h/\partial\eta$. В остальном ничто не изменяется по сравнению со скалярной теорией, рассмотренной в предыдущем разделе.

Как следует из (5.24), мы должны рассматривать не зависящие от времени калибровочные преобразования $\dot\lambda_a(x) = 0$. Чтобы устранить это ограничение, мы должны обобщить уравнения (5.19). Так, если вместо первого уравнения в (5.19) рассматривать равенство

$$\left\{\mathbf{u}_a(x;\xi,\eta,\lambda), h_j\right\} = \frac{\delta H_j}{\delta \mathbf{p}_a(x)} - \Omega_a(x)\frac{\partial \mathbf{u}(x;\xi,\eta,\lambda)}{\partial\lambda_a}, \tag{5.25}$$

то в (5.24) следует произвести замену

$$\prod_{x,a} d\lambda_a(x)\, \delta\left(\dot\lambda_a(x)\right) \to \prod_{x,a} d\lambda_a(x)\, \delta\left(\dot\lambda_a(x) - \Omega_a(x)\right), \tag{5.26}$$

где $\Omega_a(x)$ – произвольная функция y и t. Это представление для калибровочной меры наиболее общее в нашем формализме.

В результате основные элементы теории Янга–Миллса в факторпространстве $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ выглядят следующим образом.

1. Мера

$$DM(\xi,\eta,\lambda) = dR \prod_{x,a} d\lambda_a\, d\xi\, d\eta\, \delta\left(\dot\lambda_a(x) - \Omega_a(x)\right)\delta(\dot\xi - \omega - j_\xi)\delta(\dot\eta - j_\eta). \tag{5.27}$$

Можно заметить, что

$$\int \prod_{x,a} d\lambda_a\, \delta\left(\dot\lambda_a(x) - \Omega_a(x)\right)$$

означает интегрирование по всем функциям $\lambda_a(\mathbf{x},t)$ произвольной зависимости от времени. С другой стороны,

$$\frac{\int \prod_{x,a} d\lambda_a\, \delta\left(\dot\lambda_a(x) - \Omega_a(x)\right)}{\int \prod_{x,a} d\lambda_a} \equiv 0. \tag{5.28}$$

Следовательно, наша нормировка на объем калибровочной группы отличается от стандартной. Это, однако, не должно повлиять на окончательный ответ, поскольку лишь калибровочно-инвариантные величины будут вычисляться.

2. Генерирующий квантовые возмущения оператор

$$2\mathbf{K}(je) = \int dt \{\hat{j}_\xi \hat{e}_\xi + \hat{j}_\eta \hat{e}_\eta\}. \tag{5.29}$$

3. Функционал $U(\mathbf{u}, \mathbf{e}_a)$, описывающий взаимодействие, зависит от вспомогательного поля

$$\mathbf{e}_a = e_{\xi_i} \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial \eta_i} - e_{\eta_i} \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial \xi_i}, \tag{5.30}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Отметим, что $\lambda_a(x)$ – c-числовая функция, и зависимость от нединамических переменных исчезла в результате редукции.

5.4. Калибровочная инвариантность и расходимости. Если теория возмущений формулируется в калибровочно-инвариантных терминах цветового электрического $\mathbf{E}_a$ и магнитного $\mathbf{B}_a$ полей, то "нефизические" степени свободы автоматически исключаются. Итак, мы можем сформулировать в рамках изложенного выше формализма следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Каждый порядок по $1/g$ новой теории возмущений явно калибровочно-инвариантен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства воспользуемся тем, что оператор $\mathbf{K}(je)$ действует в факторподпространстве TW^*. Тогда достаточно показать, что функционал $U(\mathbf{u}, \mathbf{e}_a)$ калибровочно-инвариантен.

Для этого воспользуемся следующим представлением:

$$U(\mathbf{u}, \mathbf{e}_a) = \frac{1}{g} \int dx \prod_{k=1}^{3} \left\{ \left(e_{\xi_i} \frac{\partial \mathbf{u}_{a_k}}{\partial \eta_i} - e_{\eta_i} \frac{\partial \mathbf{u}_{a_k}}{\partial \xi_i} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{a_k}} \right\} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu a}, \tag{5.31}$$

которое можно получить, если использовать явный вид $\mathbf{e}_a$ (см. (5.30)). Это выражение явно калибровочно-инвариантно, так как оператор

$$\left\{ \left(\mathbf{e}_\xi \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{a_k}}{\partial \eta} - \mathbf{e}_\eta \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{a_k}}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{a_k}} \right\}$$

– синглет преобразований калибровочной группы.

Действительно, представление (5.31) может быть записано в виде следующего рекуррентного соотношения:

$$U(\mathbf{u}, \mathbf{e}_a) = \frac{1}{g} \int dx \left\{ \mathbf{e}_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathbf{e}_\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} F_2(\mathbf{u}), \tag{5.32}$$

где знак скалярного произведения означает суммирование по всем канонически-сопряженным парам (ξ, η) и следует полагать, что $F_2(\mathbf{u}) = F_2(\mathbf{u}(\xi, \eta))$ – сложная функция ξ, η. Точно так же имеем

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{u}(\xi, \eta)) &= \left\{ \mathbf{e}_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathbf{e}_\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} F_1(\mathbf{u}(\xi, \eta)), \\ F_1(\mathbf{u}(\xi, \eta)) &= \left\{ \mathbf{e}_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} - \mathbf{e}_\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} F^{\mu\nu a}(\mathbf{u}(\xi, \eta)) F_{\mu\nu a}(\mathbf{u}(\xi, \eta)). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Заметим теперь, что дифференциальный оператор в $F_1(\mathbf{u})$ не зависит от поля $\mathbf{u}_a$. Поэтому $F_1(\mathbf{u})$ – калибровочно-инвариантная величина. По той же причине все $F_l(\mathbf{u})$, $l = 2, 3$, калибровочно-инвариантны. Что и требовалось показать.

Этот результат означает, что вклады теории возмущений не могут нарушить неабелеву калибровочную симметрию. Далее можно показать следующую важную особенность рассматриваемой теории возмущений.

Предложение 19. *Теория возмущений в факторпространстве не содержит расходимостей, по крайней мере, в секторе векторных полей, если*

$$\left|S(u)\right| < \infty. \tag{5.34}$$

Доказательство. Результат действия оператора квантовых возмущений дает выражение

$$\mathcal{N} = \int DM :e^{-2i\mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{j})}:, \tag{5.35}$$

где оператор

$$\mathbf{U}(\mathbf{u},\mathbf{j}) = \int \frac{dt}{3!\,(2i)^3} \left\{ \hat{j}_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial\eta} - \hat{j}_\eta \cdot \frac{\partial}{\partial\xi} \right\} \widetilde{F}_2(\mathbf{u}) \tag{5.36}$$

и

$$\widetilde{F}_2(\mathbf{u}) = \int d^3x\, F_2(\mathbf{u}). \tag{5.37}$$

Из (5.36) и (5.33) непосредственно следует условие (5.34).

5.5. Производящий функционал в теории Янга–Миллса. Генератор событий мы предлагаем строить исходя из следующих соображений:

$$\rho(\alpha, z) = \int dM(\xi_0, \eta_0; \lambda_a) :e^{-i\mathbf{U}(\mathbf{u}_c,\mathbf{e})}: e^{iQ_\mu(\mathbf{u}_c)\Delta^\mu} e^{-N(\alpha,z;\mathbf{u}_c)}, \tag{5.38}$$

где оператор $\mathbf{U}(\mathbf{u}_c, \mathbf{e})$ определен в (5.36).

Функционал $N(\alpha, z; \mathbf{u}_c)$ был введен в (4.2), и он выражается (см. (4.3)) через "вершинную функцию"

$$\Gamma(q, \mathbf{u}_c) = \int dx\, e^{iqx} \frac{\delta S_0(\mathbf{u}_c)}{\delta \mathbf{u}_c(x)}.$$

В действительности, если цветовой заряд удерживается, определенная таким образом производящая функция тривиальна, $\partial\rho(\alpha, z)/\partial z \equiv 0$.

Таким образом, при изложенном формализме теории возмущений, который замкнут в том смысле, что свободен от расходимостей и поэтому может быть использован на любых расстояниях, основная задача заключается в определении асимптотических состояний, т.е. фундаментального лагранжиана теории и соответствующего ему функционала $N(\alpha, z; \mathbf{u}_c)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Может создаться впечатление, что мы вступаем в новый этап построения теории Янга–Миллса, когда основная формула для производящего функционала $\rho(a, z)$, способная описать взаимодействия на любых расстояниях, может быть записана лишь в одну строку. При этом расчеты столь сложны, что с ними могут справиться лишь достаточно мощные компьютеры. В результате все промежуточные этапы вычислений будут производиться компьютером и не потребуют нашего участия.

Однако в действительности это не так. Точное вычисление интегралов (5.38), скорее всего, непосильно даже для современных компьютеров и вряд ли будет когда-либо достижимо. Тем более следует отметить, что из предыдущих формул совсем не очевидно, что цветовой заряд перманентно удерживается внутри адронов. Этот вопрос изучается нами. При этом, конечно, надо начинать с более простых задач, которые допускали бы приближения, оправданные конкретными условиями задачи. Одной из них является асимптотика по множественности, когда $n \to n_{\max}$. Анализ этой асимптотики показывает, что в этом случае процесс должен быть "жестким" в том смысле, что мы можем ожидать превышения среднего поперечного импульса над средним продольным в $\pi/4$ раза. Но тогда это область асимптотической свободы, в которой $\alpha_s \ll 1$, и можно воспользоваться предсказаниями КХД.

Тем не менее анализ предсказаний КХД в этом режиме показывает, что идеология главного логарифмического приближения в данном случае неприемлема, поскольку логарифмической точности оценок вкладов оказывается недостаточно для описания кинематических условий, когда импульсы частиц слабо различаются (коэффициент неупругости близок к единице) [7][10]. По этой причине способность КХД дать предсказания в области очень больших множественностей невелика. Предложенная теория возмущений "сверхсходящаяся", и поэтому мы надеемся на получение более высокой (степенной) точности предсказаний.

Другой класс интересных, на наш взгляд, задач связан с глубоко неупругими рассеяниями. Они также предполагают взаимодействия на малых расстояниях и поэтому должны быть достаточно просты. Наш интерес к этой задаче связан с тем, что построенная теория представляет собой разложение по степеням обратной константы взаимодействия. В такой формулировке понятие бегущего параметра разложения неприемлемо [53]. Поэтому особенно интересно выяснить, как в данном подходе формулируется асимптотическая свобода. Помимо этого в нашей формулировке отсутствует понятие *глюона* и соответственно нет инфракрасных расходимостей. Поэтому интересно исследовать в рамках нашего подхода так называемую "проблему малых x" [86].

Формулируя теорию в терминах функциональных интегралов, естественно использовать разложение на решетке. Надо отметить, что подынтегральное выражение в (5.38) не содержит производных по времени, и поэтому представление на временной решетке не будет содержать неоднозначностей, которые присущи представлению интегралов по путям (см., например, [87] и цитируемую там литературу).

---

[10] Авторы особенно благодарят Л. Н. Липатова за обсуждение этого вопроса.

Шаг решетки может зависеть от условий исследуемой задачи. Например, нетрудно понять, что в асимптотике по множественности импульсы частиц малы. Тогда, в первом приближении конфигурация классического поля $\mathbf{u}_a$ не играет значительной роли. Именно в этом смысле асимптотика по множественности представляет собой простейший случай.

И наконец, хорошо известно, что S-матричная интерпретация функций Вигнера позволяет сформулировать теорию в терминах кинетических уравнений, а также проследить за корректностью такого описания в свете квантовых возмущений [2], [3]. Это может связать теоретико-полевое описание с описанием диссипативных структур. Например, изложенный выше формализм может оказаться полезным при исследовании устойчивости упорядоченных структур, возникающих в диссипативных системах [88], и в выяснении роли, которую играют топология и структура факторпространства в их формировании и устойчивости. А это может иметь важное прикладное значение.

Благодарности. В заключение мы хотим поблагодарить В. Г. Кадышевского за неизменный интерес к изложенному выше подходу. Отдельные результаты обсуждались в разное время с Дж. Аллаби, А. М. Балдиным, И. М. Дреминым, В. И. Кувшиновым, В. А. Матвеевым, И. Р. Пригожиным, М. В. Савельевым, В. И. Савриным, И. Л. Соловцовым, А. Н. Тавхелидзе, А. Т. Филипповым и Д. В. Ширковым, которым нам приятно выразить глубокую признательность. Мы хотим также поблагодарить Э. А. Кураева, Л. Н. Липатова, И. Пазиашвили, Э. Саркисяна-Гринбаума и А. Ушверидзе за полезные обсуждения важных деталей подхода. Мы благодарим участников семинара "Симметрии и интегрируемые системы" ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова (ОИЯИ) за постоянное внимание к данной проблеме. Нам приятно выразить благодарность В. В. Воронюку за помощь в подготовке рукописи к печати. Один из авторов (И. Д. М.) считает своим долгом поблагодарить А. А. Славнова за предоставленную возможность обсудить изложенные в обзоре идеи на семинаре Математического института им. В. А. Стеклова. Авторы особенно благодарны А. А. Логунову, предложившему написать данный обзор.

Список литературы

[1] *Г. Николис, И. Пригожин*. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

[2] *P. Carruthers, F. Zachariasen*. Phys. Rev. D. 1986. V. 13. P. 950; *P. Carruthers, F. Zachariasen*. Rev. Mod. Phys. 1983. V. 55. P. 245.

[3] *J. Manjavidze*. Part. Nucl. 1999. V. 30. P. 124.

[4] *E. Wigner*. Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749; *K. Hisimi*. Proc. Phys. Math. Soc. Jap. 1940. V. 23. P. 264; *R. J. Glauber*. Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 84; *E. C. G. Sudarshan*. Phys. Rev. Lett. 1963. V. 10. P. 177; *R. E. Cahill, R. G. Glauber*. Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 1882; *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi*. Quantum. Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 615; *V. I. Man'ko, L. Rosa, P. Vitale*. Probability representation in quantum field theory. hep-th/9806164.

[5] *H. Umezawa, H. Matsumoto, M. Tachiki*. Thermo-Field Dynamics and Condensed States. Amsterdam: North-Holland, 1982.

[6] *E. Fermi*. Progr. Theor. Phys. 1950. V. 4. P. 570; Phys. Rev. 1950. V. 81. P. 115; 1953. V. 92. P. 452; *Л. Д. Ландау*. Изв. АН СССР. 1953. Т. 17. С. 51.

[7] *J. Manjavidze, A. Sissakian*. Phys. Rep. 2001. V. 346. P. 1.

[8] *В.Е. Захаров*. ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 219.

[9] *D. V. Skobeltzin*. Z. Phys. 1929. V. 54. P. 68; C. R. Acad. Sci. 1932. V. 194. P. 118; *G. V. Watagin*. Z. Phys. 1934. V. 688. P. 92.

[10] *Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков*. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.

[11] *В.Г. Кадышевский*. ЖЭТФ. 1964. Т. 46. С. 654; С. 872.

[12] *А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили, В.А. Петров*. Общие принципы квантовой теории поля и взаимодействия адронов при высоких энергиях. В сб.: Общие принципы квантовой теории поля и их следствия. Ред. В.А. Мещеряков. М.: Наука, 1977. С. 183; *A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili*. CERN TH/1659; *A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili, Nguen Van Hieu*. Phys. Lett. B. 1967. V. 25. P. 611; *A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili*. CERN TH/1707, 1973.

[13] *В.Де Альфаро, С. Фубини, Г. Фурлан, К. Росетти*. Токи в физике адронов. М.: Мир, 1976.

[14] *Е. Кураев, Л. Липатов, В. Фадин*. ЖЭТФ. 1976. Т. 44. С. 443; *Л. Липатов*. ЯФ. 1974. Т. 20. С. 181; *В. Грибов, Л. Липатов*. ЯФ. 1972. Т. 15. С. 781; *G. Altarelli, G. Parisi*. Nucl. Phys. B. 1977. V. 126. P. 298; *И.В. Андреев*. Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях. М.: Наука, 1981.

[15] *V.N. Gribov*. Proc. VIII LIYF Winter School Phys. Leningrad. 1973. V. II. P. 5; *О.В. Канчели*. Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. С. 465; *V.N. Gribov*. Moscow I ITEP School. 1973. V. 1. P. 65; *H.D.I. Abarbanel, J.D. Bronzan, R.L. Sugar, A.K. White*. Phys. Rep. C. 1975. V. 21. P. 119; *J. Koplik, A.H. Mueller*. Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 3638; *M. Baker, K. Ter-Martirosyan*. Phys. Rep. C. 1976. V. 28. P. 1.

[16] *V.A. Matveev, R.M. Muradyan, A.N. Tavkhelidze*. Nuovo Cimento Lett. 1973. V. 5. P. 907; V. 7. P. 719; *S. Brodski, C. Farrar*. Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1153.

[17] *A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze, L.D. Soloviev*. Phys. Lett. B. 1967. V. 24. P. 181.

[18] *J. Polchinski*. TASI lectures on *D*-branes. hep-th/9611050.

[19] *J. Ellis*. Aspects of M theory and phenomenology. hep-ph/9804440.

[20] *В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян, Л.А. Слепченко*. ЯФ. 1976. Т. 23. С. 432; *A.N. Sissakian, L.A. Slepchenko*. Fizika. 1978. V. 10. P. 21; *А.Н. Сисакян, Н.Б. Скачков*. Множественные процессы и описание составной структуры адронов в трехмерной формулировке квантовой теории поля. В сб.: Научное сотрудничество в ядерной физике. Ред. Н.Н. Боголюбов. М.: Энергоатомиздат, 1986. С. 56; *С. Мавродиев, В.К. Митрюшкин, А.Н. Сисакян, Г.Т. Торосян*. ЯФ. 1979. Т. 30. С. 245; *S.V. Chekanov, W. Kittel, V.I. Kuvshiniv*. J. Phys. G. 1997. V. 23. P. 951.

[21] *J. Manjavidze*. Part. Nucl. 1985. V. 16. P. 44.

[22] *J.E. Mayer, M.G. Mayer*. Statistical Mechanics. New York: Wiley, 1940.

[23] *D.E. Groom et al*. European Phys. J. C. 2000. V. 15. P. 1.

[24] *P.V. Landshoff*. Nucl. Phys. B. 1992. V. 25. P. 129; *E. Levin*. Everything about reggeons. Pt. I. Reggeon in "soft" interaction. DESY 97-213; hep-ph/9710546; 25 years with the Pomeron. DESY 98-118; hep-ph/9808483.

[25] *E.A. De Wolf, I.M. Dremin, W. Kittel*. Phys. Rep. 1996. V. 270. P. 1; *P. Bozek, M. Ploszajczak, R. Botet*. Phys. Rep. 1995. V. 252. P. 101.

[26] *R. Hagedorn*. Nuovo Cimento. 1965. V. 35. P. 216; *E.L. Feinberg*. Phys. Rep. 1972. V. 56. P. 237; *И.В. Андреев, И.М. Дремин*. УФН. 1977. Т. 122. С. 37.

[27] *Г.Е. Уленбек*. Уравнение Больцмана. Приложение 1 к кн.: М. Кац. Вероятность и смежные вопросы физики. М.: Мир, 1965. С. 227.

[28] *J. Manjavidze, A. Sissakian*. Second VHM Physics Workshop. Dubna, 7–9 April 2001 (to be published).

[29] *Н.Н. Боголюбов*. Проблемы динамической теории в статистической физике. В сб.: Избранные труды по статистической физике. М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 9.

[30] *J. Schwinger*. J. Math. Phys. A. 1994. V. 9. P. 2363; *Л. Келдыш*. ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1515; *N. P. Landsman, Ch. G. van Weert*. Phys. Rep. 1987. V. 145. P. 141.

[31] *M. Martin, J. Schwinger*. Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 342; *R. Kubo*. J. Phys. Soc. Japan. 1957. V. 12. P. 570.

[32] *R. Haag, N. Hugengoltz, M. Winnink*. Commun. Math. Phys. 1967. V. 5. P. 5.

[33] *Д. Н. Зубарев*. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.

[34] *A. M. Baldin*. Nucl. Phys. A. 1985. V. 434. P. 695; *A. M. Baldin, A. I. Malakhov*. JINR Rap. Comm. 1998. V. 1(87). P. 5.

[35] *C. N. Yang, R. I. Mills*. Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191.

[36] *Н. Н. Боголюбов, В. А. Матвеев, А. Н. Тавхелидзе*. Цветные кварки. В сб.: Научное сотрудничество социалистических стран в ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1986. С. 33; *M. Han, Y. Nambu,*. Phys. Lett. B. 1965. V. 138. P. 1005.

[37] *П. А. М. Дирак*. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.

[38] *J. C. Taylor*. Nucl. Phys. B. 1971. V. 33. P. 436; *А. А. Славнов*. ТМФ. 1972. Т. 10. С. 99; *В. А. Рубаков*. Классические калибровочные поля. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

[39] *G. 't Hooft, M. Veltman*. Diagrammar. Rep. # 73-9-CERN. CERN, 1973.

[40] *L. D. Faddeev, V. N. Popov*. Phys. Lett. B. 1967. V. 25. P. 29.

[41] *V. N. Gribov*. Nucl. Phys. B. 1978. V. 139. P. 246.

[42] *I. M. Singer*. Commun. Math. Phys. 1978. V. 60. P. 7; *M. F. Atiyah, J. D. S. Jones*. Commun. Math. Phys. 1978. V. 61. P. 97.

[43] *S. V. Shabanov*. Phys. Rep. 2000. V. 326. P. 1; *B. De Witt, C. Molina-Paris*. Quantum gravity without ghosts. hep-th/9808163.

[44] *D. J. Gross, F. Wilczek*. Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1343; *H. D. Politzer*. Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1346.

[45] *Yu. L. Dokshitser, D. I. Dyakonov, S. I. Troyan*. Phys. Rep. 1980. V. 58. P. 211; *E. Kuraev, J. Manjavidze, A. Sissakian*. Multiplicity distribution tails at high energies. hep-ph/0003074.

[46] *K. Konishi, A. Ukawa, G. Veneziano*. Phys. Lett. B. 1979. V. 80. P. 259; *A. Basseto, M. Ciafaloni, G. Marchesini*. Nucl. Phys. B. 1980. V. 163. P. 477.

[47] *D. V. Shirkov*. Analytic perturbation theory for QCD observables. hep-ph/0012283.

[48] *V. I. Zakharov*. Progr. Theor. Phys. Suppl. 1998. V. 131. P. 107; *F. V. Gubarev, M. I. Polikarpov, V. I. Zakharov*. Physics of the power corrections in QCD. hep-ph/9908292.

[49] *В. Е. Корепин, Л. Д. Фаддеев*. ТМФ. 1975. Т. 25. С. 147.

[50] *И. Д. Манджавидзе, А. Н. Сисакян*. ТМФ. 2000. Т. 123. № 3. С. 433.

[51] *J. Manjavidze*. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 5710; hep-th/0104252.

[52] *J. Manjavidze, A. Sissakian*. J. Math. Phys. 2001. V. 42. P. 641; hep-ph/0104297.

[53] *J. Manjavidze, A. Sissakian*. J. Math. Phys. 2001. (to be published); Yang–Mills fields quantization in the factor space. hep-ph/0104298.

[54] *L. D. Faddeev, V. E. Korepin*. Phys. Rep. C. 1978. V. 42. P. 1.

[55] *R. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu*. Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 4114; P. 4130.

[56] *И. Д. Манджавидзе*. ЯФ. 1987. Т. 45. С. 707.

[57] *R. Jackiw*. Rev. Mod. Phys. 1977. V. 49. P. 681.

[58] *Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов*. ЖЭТФ. 1949. Т. 19. С. 256.

[59] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

[60] *Л. Д. Фаддеев, Л. А. Тахтаджян*. УМН. 1974. Т. 29. С. 249; *R. Jackiw, C. Nohl, C. Rebbi*. Particles and Fields: proceedings (Banff, Canada, 25 Aug. – 3 Sept., 1977). Eds. D.H. Boal, A.N. Kamal. New York: Plenum, 1978.

[61] *G. W. Mackey*. Induced Representation of Groups and Quantum Mechanics. New York: Benjamin, 1969; *N. Woodhouse*. Geometric Quantization. Oxford: OUP, 1980; *N. P. Landsman, N. Linden*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 365. P. 121; *N. P. Landsman*. Rev. Math. Phys. 1991.

V. 2. P. 45; P. 73; *C. J. Isham*. Relativity, Groups and Topology II. Eds. B.S. De Witt, R. Stora. Amsterdam: North-Holland, 1984.

[62] *Р. Раджараман*. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985; *A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov*. Phys. Lett. B. 1978. V. 72. P. 503.

[63] *S. F. Edwards, Y. V. Gulyaev*. Proc. Roy. Soc. London. A. 1964. V. 279. P. 229; *M. S. Marinov*. Phys. Rep. 1980. V. 60. P. 1.

[64] *B. S. De Witt*. Rev. Mod. Phys. 1957. V. 29. P. 377.

[65] *V. De Alfaro, S. Fubini, G. Furlan*. Phys. Lett. B. 1976. V. 65. P. 163; *V. De Alfaro, S. Fubini, G. Furlan*. Acta Phys. Aus. Suppl. 1980. V. 22. P. 51.

[66] *T. Bibilashvili, I. Pasiashvili*. Ann. Phys. 1992. V. 220. P. 134.

[67] *P. Kadanoff, P. C. Martin*. Ann. Phys. 1963. V. 24. P. 419.

[68] *J. Schwinger*. Particles, Sources, Fields. V. 1. Reading, MA: Addison-Wesley, 1970.

[69] *L. Landau, R. Peierls*. Z. Phys. 1931. V. 69. P. 56.

[70] *R. Mills*. Propagators for Many-Particle Systems. New York: Gordon and Breach, 1970.

[71] *N. P. Landsman, Ch. G. van Weert*. Phys. Rep. 1987. V. 145. P. 141; *E. Calsetta, B. L. Hu*. Phys. Rev. D. 1988. V. 37. P. 2878.

[72] *E. Byukling, K. Kajantie*. Particles Kinematics. London: Wiley, 1973.

[73] *M. Martin, J. Schwinger*. Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 342.

[74] *N. N. Bogolyubov*. Physica. 1960. V. 26. P. S1.

[75] *A. J. Niemi, G. Semenoff*. Ann. Phys. 1984. V. 152. P. 105.

[76] *J. Schwinger*. J. Math. Phys. A. 1994. V. 9. P. 2363.

[77] *P. M. Bakshi, K. T. Mahanthappa*. J. Math. Phys. 1961. V. 4. P. 1; P. 12.

[78] *J. Manjavidze, A. Sissakian*. JINR Rap. Comm. 1988. V. 2/281. P. 13.

[79] *S. Smale*. Invent. Math. 1970. V. 11. № 1. P. 45; *R. Abraham, J. E. Marsden*. Foundations of Mechanics. Reading, MA: Benjamin, 1978.

[80] *В. И. Арнольд*. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

[81] *A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu.S. Tyupkin*. Phys. Lett. B. 1975. V. 59. P. 85.

[82] *A. M. Polyakov*. Nucl. Phys. B. 1977. V. 120. P. 429.

[83] *Б. М. Барбашов*. ЖЭТФ. 1965. Т. 48. С. 607.

[84] *A. Actor*. Rev. Mod. Phys. 1979. V. 51. P. 461.

[85] *L. S. Boya, J. F. Carinena, J. Mateos*. Fortschr. Phys. 1978. V. 26. P. 175.

[86] *L. V. Gribov, E. M. Levin, M. G. Ryskin*. Phys. Rep. C. 1983. V. 100. P. 1.

[87] *C. Grosche*. Path Integrals, Hyperbolic Spaces, and Selberg Trace Formulae. Singapore: Word Scientific, 1995.

[88] *П. Гленсдорф, И. Пригожин*. Термодинамическая теория структуры устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию 4.VII.2001 г.