Дубна-Ереван. Орбиты сотрудничества. К 80-летию со дня основания Ереванского государственного университета. Дубна, 1999.

СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Е.М.Акопян, А.А.Изместьев, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян

В последнее десятилетие сильно возрос интерес к теории суперинтегри руемых систем, которая является составной частью теории интегрируемых систем.

Как известно, квантовая или классическая система с N степенями свободы является полностью интегрируемой, если существует N независимых интегралов движения (включая Гамильтониан системы), находящихся в инволюции или, в квантовом случае, N - интегралов движения, коммутирующих с гамильтонианом (теорема Лиувилля). Однако, еще в прошлом столетии были известны классические системы, обладающие бо́льшим числом независимых (так называмых дополнительных) интегралов движения, которые необходимы для полного разделения переменных как в уравнении Гамильтона-Якоби, так и в уравнении Шрёдингера. Известно, что число интегралов движения не может превышать $2N-1$, где N - размерность пространства, причем дополнительные интегралы движения коммутируют с гамильтонианом системы, но не обязательно коммутируют между собой. Таким образом, в квантовой механике возникает альтернативный набор операторов описывающих полным образом систему, что, как известно, приводит к частичному или полному вырождению системы по азимутальному и орбитальному квантовым числам.

К наиболее изученным суперинтегрируемым системам относятся случаи:

1. движения частицы в кеплеровом поле, где существует шесть интегралов движения: три компоненты углового момента L_i и три компоненты вектора Лапласа-Рунге-Ленца A_i, связанных двумя соотношениями $L_i^2 + A_i^2 = H$, $L_iA_i = 0$, и поэтому данная система обладает максимальным числом 2×3-$1=5$ независимых интегралов движения;

2. движения в поле квадратичного потенциала (гармонический осциллятор), для которого также существует дополнительный интеграл движения - тензор Демкова.

Наличие дополнительных интегралов движения для этих двух центрально-симметричных систем приводит в классической механике к таким интересным свойствам, как замкнутость траекторий для финитного движения (теорема Бертрана), полная разделяемость переменных в нескольких ортогональных системах координат для уравнения Гамильтона-Якоби и Шрёдингера, "случайное вырождение" энергетического спектра по орбитальному и азимутальному квантовым числам и, наконец, существование так называемой группы динамической симметрии, более высокой чем геометрическая симметрия исходного уравнения Шрёдингера (для атома водорода это группа O(4), а для осциллятора - SU(3)).

Долгое время считалось, что только эти две системы обладают столь выделенными свойствами, однако в середине шестидесятых годов П.Винтерницем, Я.А.Смородинским с соавторами, а затем в конце восьмидесятых Р.Эвансом были найдены все нецентральные (среди центральных потенциалов только задача Кеплера и гармонический осциллятор согласно теореме Бертрана имеют замкнутые траектории движения) двумерные и трехмерные потенциалы, обладающие дополнительными интегралами движения, причем системы с $2N-2$ независимыми интегралами стали называть минимально суперинтегрируемыми, а с $2N-1$, максимально суперинтегрируемыми системами. Некоторые из этих потенциалов (Хартмана или Калоджеро - Мозера) находят применение в молекулярной физике или при решении задачи N - тел на прямой.

Изучение суперинтегрируемых систем в пространствах постоянной кривизны начато основополагающей работой Шрёдингера, который в 1940 году показал, что, как и в случае плоского пространства, для задачи Кулона-Кеплера на 3 - сфере имеет место полное вырождение по орбитальному и азимутальному квантовым числам. В дальнейшем (Higgs и Leemon, 1979; Богуш, Курочкин и Отчик, 1978) были найдены дополнительные интегралы движения, обобщающие интеграл Лапласа-Рунге-Ленца для кулоновой проблемы и тензор Демкова для осциллятора, и тем самым была выяснена причина вырождения данных систем в случае пространств постоянной кривизны. С другой стороны, несмотря на явное сходство этих задач для пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны и соответствующих задач для плоского пространства (разделяемость переменных в нескольких системах координат, степень вырождения энергетического спектра, замкнутость классических орбит и др.), имеется также существенное отличие: коммутационные соотношения между компонентами оператора Лапласа - Рунге - Ленца или тензора Демкова в случае кривых пространств носят нелинейный характер и описываются квадратичными (модными в последнее время) W - алгебрами. Тем самым, определение симметрий для суперинтегрирумых систем в пространствах постоянной кривизны представляется нетривиальной задачей и фактически связано с проблемой линеаризации W - алгебр. Было показано также, что при контракции пространств постоянной кривизны, т.е. при стремлении радиуса кривизны R к ∞, W - алгебры переходят в классические алгебры Ли.

Другой нетривиальной задачей является, с одной стороны, выделение всех суперинтегрируемых потенциалов для пространств постоянной кривизны, а именно, в случае двух-, трех- и n-мерной сфер и соответствующих двуполостных гиперболоидов, а, с другой стороны, определение разделяющихся систем координат и соответсвующих решений уравнений Гамильтона - Якоби и Шрёдингера.

С физической точки зрения, в пользу исследования суперинтегрируемых систем в пространствах постоянной кривизны можно привести два следущих аргумента. Во-первых, как было впервые показано в работах Изместьева, кулоновскую систему на трехмерной сфере можно успешно использовать в качестве модельной при исследовании тяжелых кваркониев, так как сфера, будучи компактным пространством, с одной стороны, обеспечивает "геометрический" и "потенциальный" конфайнмент, а при больших значениях радиуса сферы потенциал системы совпадает с хорошо известным корнельским потенциалом, а с другой стороны, является точно-решаемой задачей. Во-вторых, задача о движении заряженной частицы в поле двух кулоновских центров, в отличии от аналогичной задачи в плоском пространтсве, обладает только дискретным спектром и может служить модельной задачей при исследовании задачи трех тел в адиабитическом приближении.

За последние пять лет (1992-1997) нами рассмотрен и решен ряд задач, связанных с дальнейшим изучением суперинтегрируемых квантовых систем, таких, как гармонический осциллятор, кулоновский потенциал, потенциалы типа Смородинского - Винтернитца, Калоджеро-Мозера, Расахатиуса и других, как в плоском евклидовом пространтстве так и в пространствах постоянной положительной кривизны.

К основным результатам можно отнести следующие:

1. Получено радиальное уравнение Шредингера в дискретном импульсном представлении для центральных потенциалов на трехмерной

сфере [1] и вычислена квазирадиальная кулоновская функция в этом представлении [2].

2. Проведено исследование изотропного гармонического осциллятора в трехмерной эллипсоидальной системе координат [3].

3. Построено решение уравнения Гельмгольца на трехмерной сфере в эллипсо-цилиндрических I и II, и эллипсоидальной системах координат [4,5]. Найдены разложения эллипсо-цилиндрических I и II базисов по более простым цилиндрическому и гиперсферическому, что устанавливает дополнительные, ранее не известные, связи между специальными функциями.

4. Вычислены межбазисные разложения для суперинтегрируемых систем типа Хартмана, обощенного сингулярного осциллятора, системы с абелевым монополем в теории Калуцы - Клейна, для потенциала гармонического осциллятора и задачи Кеплера на трехмерной сфере [6-12].

5. Построены все суперинтегрирумые потенциалы на двух- и трехмерном пространствах постоянной положительной и отрицательной кривизны, обобщающие соответствующие системы в плоском евклидовом пространстве [13-16]. Используя метод континуального интегрирования, исследованы все точно-решаемые случаи, соответствующие разделению переменных в различных систем координат.

6. Исследованы контракции групп O(3) и O(2,1) на евклидову группу E(2) и прослежены переходы между системами кординат, интегралами движения и базисными функциями (для уравнения Гельмгольца), определенными на двумерной сфере и на двумерной плоскости [17,18]. Изучены предельные $R \to \infty$ переходы между различными разделяющимися системами координат на трехмерной сфере и в трехмерном плоском пространстве [19]. Для случая n-мерной сферы аналогичные задачи в случае так называемых подгрупповых координат рассмотрены в работе [20].

7. С помощью метода Нивена построены все возможные полиномиальные базисы для двумерных суперинтегрирумых потенциалов, определенных на двумерной сфере и в двумерном евклидовом пространстве [21], а также на двумерном двуполостном гиперболоиде [22,23]. Показано, что соответствующие интегралы движения удовлетворяют нелинейным коммутационным соотношениям и описываются с помощью квадратичных алгебр.

В дальнейшем планируется продолжить исследования по теории суперинтегрируемых систем в пространсттах постоянной кривизны, а также применить развитую методику для решения задач с двумя кулоновскими центрами на трехмерной сфере и в физике тяжелых кварков.

Литература

1. С.И.Виницкий, В.Н.Первушин, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян. *Уравнение для квазирадиальных функций в импульсном представлении на трехмерной сферею* ЯФ, **56(8)**, (1993), 62.

2. С.И.Виницкий, Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, Т.А.Стриж. *Атом водорода в искривленном пространстве. Разложение по свободным решениям на трехмерной сфере.* ЯФ, **56(3)**, (1993), 61.

3. W.Kallies, I.Lukach, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *Ellipsoidal Basis for Isotropic Oscillator.* Communication JINR, E2-94-230, (1994), Dubna.

4. C.Grosche, Kh.G.Karayan, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *Free Motion on the Three-Dimensional Sphere: The Ellipso-Cylindrical Bases.* J.Phys., **A30**, (1997), 1629.

5. R.G.Airapetyan, Kh.G.Karayan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian. and D.I.Zaslavsky. *Quantum Motion on the Three-Dimensional Sphere. Ellipsoidal Bases.* JINR Preprint E2-96-117, (1996), Dubna.

6. M.Kibler, L.G.Mardoyan and G.S.Pogosyan. *On a Generalized Kepler - Coulomb System: Interbasis Expansions.* Inter. J. Quantum Chemistry, **52**, (1994), 1301.

7. M.Kibler, L.G.Mardoyan and G.S.Pogosyan. *On a Generalized Oscillator System: Interbasis Expansions.* Inter. J. Quantum Chemistry, **63**. (1997), 133.

8. C.Grosche, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *On the Interbasis Expansion for the Kaluza-Klein Monopole System.* Annalen der Physik, **6**, (1997), 144.

9. Ye.M.Hakobyan, G.Pogosyan, A.N.Sissakian and S.I.Vinitsky. *Isotropic oscillator in the space of constant positive curvature. Interbasis expansions.* Preprint JINR, E2-97-317, Dubna, 1997; quant-ph/9710045, ЯФ, **62**, (1999).

10. Ye.M.Hakobyan, M.Kibler, G.Pogosyan and A.N.Sissakian. *On a Generalized Oscillator: Invariance Algebra and Interbasis Expansions.* Preprint JINR, E2-97-379, Dubna, 1997; quanth-ph/9712014.

11. Ye.M.Hakobyan, G.S.Pogosyan. *On Interbasis Expansion for Isotropic Oscillator on Two-Dimensional Sphere.* Preprint JINR, E2-98-82, Dubna, 1998; quanth-ph/9803085

12. G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *On the Kepler-Coulomb problem in the three-dimensional space with constant positive curvature.* JINR Preprint E2-96-87, (1996), Dubna.

13. C.Grosche, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *Path Integral discussion for Smorodinsky - Winternitz Potentials: I. Two - and three - Dimensional Euclidean Space.* Fortschritte der Physik, **43(6)**, (1995), 453.

14. C.Grosche, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *Path Integral discussion for Smorodinsky - Winternitz Potentials: II. Two - and three - Dimensional Sphere.* Fortschritte der Physik, **43(6)**, (1995), 523.

15. C.Grosche, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian. *Path Integral Approach to Superintegrable Potentials. Two - Dimensional Hyperboloid.* ЭЧАЯ, **27**(3), (1996), 593.

16. C.Grosche, G.S.Pogosyan and A.N.Sissakian. *Path Integral discussion for Superintegrable Potentials: IV. Three - Dimensional Pseudosphere.* ЭЧАЯ, **28**(5), (1997), 1229.

17. A.A.Izmest'ev, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian and P.Winternitz. *Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables.* J.Phys., **A29**, (1996), 5940.

18. A.A.Izmest'ev, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian and P.Winternitz. *Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables. Two-Dimensional Hyperboloid.* Inter.J.Mod.Phys. **A12(1)**, (1997), 53.

19. A.A.Izmest'ev, and G.S.Pogosyan. *Contraction of Lie Algebras and Separation of Variables on Three-Dimensional Sphere.* In Proceedings "Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups, and Algebras", Volume 1, Editors: H.-D. Doebner, W. Scherer, P. Nattermann. World Scientific, Singapore, (1997), 137.

20. A.A.Izmest'ev, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian and P.Winternitz. *Contractions of Lie Algebras and Separation of Variables. The n-dimensional sphere.* J. Math.Phys., **V40**, (1999), 1549.

21. E.G.Kalnins, W.MIller Jr. and G.S.Pogosyan. *Superintegrability and associated polynomial solutions. Euclidean space and sphere in two-dimensions.* J.Math.Phys. **37**, (1996), 6439.

22. E.G.Kalnins, W.MIller Jr. and G.S.Pogosyan. *Superintegrability on two-dimensional hyperboloid.* J.Math.Phys. **38**, 1997, 5416.

23. Ye.M.Hakobyan, E.G.Kalnins, W.MIller Jr. and G.S.Pogosyan. *Superintegrability in two dimensional hyperboloid II.* J.Math.Phys., **40**, 2291-2306, 1999.

ПОГОСЯН ГЕОРГИЙ САМВЕЛОВИЧ, родился в 1952 году, окончил физический факультет ЕГУ в 1975г, кандидат физ.-мат. наук (1982г, ЛТФ ОИЯИ, диссертация "Межбазисные переходы в квантовых системах со скрытой симметрией"), до 10.12.1991г.– заведующий Лабораторией физики высоких энергий ЕГУ, с 22.12.1991г.– с.н.с. ЛТФ ОИЯИ.
Телефон: 63153; E-mail: pogosyan@thsun1.jinr.dubna.su

АКОПЯН ЕРАНУИ МОИСОВНА, родилась в 1973 году, окончила физический факультет ЕГУ в 1996г., с 20.05.1997г. · м.н.с. ЛТФ ОИЯИ.
Телефон: 64535; E-mail: yera@thsun1.jinr.ru