Влияние конечной плотности на генерацию Черн–Саймоновского члена

С. Б. Солганик[1]

Лаборатория Ядерных Проблем, Объединенный Институт Ядерных Исследований, Дубна, 141980, Россия

С тех пор, как ввели Черн–Саймоновский (ЧС) топологический член [1] и по сей день появляется большое число работ посвященное этому объекту. Такой интерес объясняется разнообразием физических эффектов вызываемых ЧС вторичным характеристическим классом. Например, ЧС член ведет к появлению массы у калибровочных частиц в квантовой теории поля, играет важную роль в объяснение анионной сверхпроводимости и в квантовом эффекте Холла в физике сплошных сред, является основой топологической теории поля и т.д.

Как было показано [2-4] в обычной калибровочной теории при нулевой плотности, ЧС член генерируется в эффективном действии квантовыми поправками. Основная цель данной работы – исследовать влияние конечной плотности на генерацию P–аномального ЧС члена. Поскольку, член с химическим потенциалом $\mu\bar{\psi}\gamma^0\psi$, соответствующий конечной плотности фоновых фермионов, нечетен при зарядовом сопряжение, его введение может повлиять на ЧС член, нечетный при P и CP преобразованиях. Как мы увидим ниже это предположение полностью подтверждается. Когда химический потенциал мал по сравнению с энергиями физических процессов, подход с нулевой плотностью достаточно хорошее квантовополевое приближение. Однако, в случае топологических эффектов это не так, как мы увидим ниже, даже малая плотность может привести к принципиальным эффектам.

Введение химического потенциала μ в теорию соответствует присутствию неисчезающей фоновой плотности заряда. Так, при $\mu > 0$ число частиц превосходит число античастиц и наоборот. Следует подчеркнуть, что формальное введение химического потенциала выглядит как простое калибровочное преобразование с калибровочной функцией μt. Однако, химический потенциал не только делает сдвиг нулевой компоненты векторного потенциала, но и определяет изменение обхода полюсов функций Грина. Корректное введение химического потенциала переопределяет основное состояние (энергию Ферми), что ведет к новому спинорному пропагатору с соответствующим обходом полюсов. Так, свободный спинорный пропагатор имеет вид [6, 7]

$$G(p;\mu) = \frac{\tilde{\not p} + m}{(\tilde{p_0} + i\epsilon\, \mathrm{sgn} p_0)^2 - \tilde{\vec{p}}^2 - m^2}, \tag{1}$$

где $\tilde{p} = (p_0 + \mu, \vec{p})$. Таким образом, при $\mu = 0$ сразу же выходит обычный обход полюсов, т.к. $p_0\,\mathrm{sgn} p_0$ положительно. В присутствии внешнего поля мы соответственно имеем:

$$\hat{G} = (\gamma\tilde{\pi} - m)\frac{1}{(\gamma\tilde{\pi})^2 - m^2 + i\epsilon(p_0 + \mu)\,\mathrm{sgn}(p_0)}, \tag{2}$$

где $\tilde{\pi_\nu} = \pi_\nu + \mu\delta_{\nu 0}$, $\pi_\nu = p_\nu - gA_\nu(x)$.

Сначала рассмотрим (2+1)–мерную абелеву теорию и выберем внешнее поле в виде $A^\mu = \frac{1}{2}x_\nu F^{\nu\mu}$, $\quad F^{\nu\mu} = \mathrm{Const}$. Чтобы получить ЧС член в этом случае необходимо

[1]Авторы: А. Н. Сисакян, О. Ю. Шевченко, С. Б. Солганик

рассматривать ток $\langle J^\mu\rangle = \frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu}$, а не эффективное действие. Это следствие того, что при таком внешнем поле ЧС член формально исчезает, а его вариация по A^μ дает неисчезающий ток. Итак, рассмотрим

$$\langle J^\mu\rangle = -ig\,\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu G(x,x')\right]_{x\to x'}, \quad G(x,x') = \exp\left(-ig\int_{x'}^{x} d\zeta_\mu A^\mu(\zeta)\right)\langle x|\hat{G}|x'\rangle. \tag{3}$$

Перепишем функцию Грина (2) в более удобном виде

$$\hat{G} = (\gamma\tilde{\pi}-m)\Big[\frac{\theta((p_0+\mu)\,\mathrm{sgn}(p_0))}{(\gamma\tilde{\pi})^2-m^2+i\epsilon} + \frac{\theta(-(p_0+\mu)\,\mathrm{sgn}(p_0))}{(\gamma\tilde{\pi})^2-m^2-i\epsilon}\Big]. \tag{4}$$

Теперь мы используем хорошо известное интегральное представление знаменателя

$$\frac{1}{\alpha\pm i0} = \mp i\int_0^\infty ds\, \mathrm{e}^{\pm i\alpha s},$$

что соответствует введению "собственного времени" s в вычисление эффективного действия методом Швингера [8]. Получаем

$$\begin{aligned}\hat{G} = (\gamma\tilde{\pi}-m)\Big[&- i\int_0^\infty ds\exp\left(is\left[(\gamma\tilde{\pi})^2-m^2+i\epsilon\right]\right)\theta((p_0+\mu)\,\mathrm{sgn}(p_0)) + \\ &+ i\int_0^\infty ds\exp\left(-is\left[(\gamma\tilde{\pi})^2-m^2-i\epsilon\right]\right)\theta(-(p_0+\mu)\,\mathrm{sgn}(p_0))\Big].\end{aligned} \tag{5}$$

Для простоты ограничимся случаем чисто магнитного поля где $A_0 = 0, [\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_\mu] = 0$. Тогда, мы сразу можем факторизовать зависящую от времени часть функции Грина и используя очевидное соотношение

$$(\gamma\tilde{\pi})^2 = (p_0+\mu)^2 - \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2}g\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{6}$$

получаем

$$\begin{aligned}G(x,x')|_{x\to x'} &= \int\frac{d^2p}{(2\pi)^3}\Bigg[i\left(\frac{\pi}{-i}\right)^{1/2}(\vec{\gamma}\vec{\pi}+m)\int_0^\infty\frac{ds}{s^{1/2}}\,\mathrm{e}^{-ism^2}\,\mathrm{e}^{-is\vec{\pi}^2}\,\mathrm{e}^{isg\sigma F/2} - \\ &- 2i\,\mathrm{sgn}(\mu)(\vec{\gamma}\vec{\pi}+m)\Re e\left(\int_0^\infty ds\,\mathrm{e}^{-ism^2}\,\mathrm{e}^{-is\vec{\pi}^2}\,\mathrm{e}^{isg\sigma F/2}\int_0^{|\mu|}dx\,\mathrm{e}^{isx^2}\right) + \\ &+ \mathrm{sgn}(\mu)\gamma_0\Im m\left(\int_0^\infty\frac{ds}{s}\,\mathrm{e}^{-ism^2}\,\mathrm{e}^{-is\vec{\pi}^2}\,\mathrm{e}^{isg\sigma F/2}(\,\mathrm{e}^{is\mu^2}-1)\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь, первое слагаемое соответствует обычному, не зависящему от μ случаю, однако появились еще два слагаемых зависящих от μ. При вычисление тока возникает два вида шпуров:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu(\vec{\gamma}\vec{\pi}+m)\,\mathrm{e}^{isg\sigma F/2}\right] &= 2\pi^j g^{j\mu}\cos(g|{}^*F|s) + 2\frac{\pi^j F^{j\mu}}{|{}^*F|}\sin(g|{}^*F|s) + 2im\frac{{}^*F^\mu}{|{}^*F|}\sin(g|{}^*F|s), \\ \mathrm{tr}\left[\gamma^\mu\gamma^0\,\mathrm{e}^{isg\sigma F/2}\right] &= 2g^{0\mu}\cos(g|{}^*F|s) - 2\frac{F^{0\mu}}{|{}^*F|}\sin(g|{}^*F|s),\end{aligned}$$

где $j = 1,2$ и $\mu = 0,1,2$, ${}^*F^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}/2$ и $|{}^*F| = \sqrt{B^2-E^2}$. Поскольку нас интересует вычисление P нечетной части, достаточно рассмотреть только слагаемы пропорциональные дуальному тензору напряженности ${}^*F$. С другой стороны слагаемое $2g^{0\mu}\cos(g|{}^*F|s)$ (в выражениях для шпуров) также даст не нулевой вклад в ток $J^0_{c.s.}$ [5]

$$J^0_{\mathrm{even}} = \frac{|eB|}{2\pi}\left(\mathrm{Int}\left[\frac{\mu^2-m^2}{2|eB|}\right]+\frac{1}{2}\right)\theta(\mu-|m|). \tag{8}$$

Эта часть тока инвариантна относительно P преобразований. Очевидно, что этот P четный член не дает вклада как в аномалию четности, так и в генерацию массы калибровочного поля. Основная цель данной работы – исследовать нарушающий четность ЧС топологический член в эффективном действии при конечной плотности. Поэтому, только слагаемое пропорциональное дуальному тензору напряженности $^*F$ будет рассмотрено. Соответствующая часть тока имеет вид

$$\begin{aligned} J^\mu_{c.s.} &= -\frac{ig}{2\pi}\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\left[i\left(\frac{\pi}{-i}\right)^{1/2}\int_0^\infty\frac{ds}{s^{1/2}}\,\mathrm{e}^{-ism^2}\,\mathrm{e}^{-is\bar{\pi}^2}2im\frac{{}^*F^\mu}{|{}^*F|}\sin(g|{}^*F|s)-\right.\\ &- \left.2i\,\mathrm{sgn}(\mu)\Re e\left(\int_0^\infty ds\,\mathrm{e}^{-ism^2}\,\mathrm{e}^{-is\bar{\pi}^2}2im\frac{{}^*F^\mu}{|{}^*F|}\sin(g|{}^*F|s)\int_0^{|\mu|}dx\,\mathrm{e}^{isx^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Снимая интеграл по импульсу мы получим

$$J^\mu_{c.s.} = \frac{m}{|m|}\frac{g^2}{4\pi}{}^*F^\mu - \frac{g^2}{4\pi^2}2\,\mathrm{sgn}(\mu)m{}^*F^\mu\Re e\left(\int_0^{|\mu|}dx\int_0^\infty ds\,\mathrm{e}^{is(x^2-m^2)}\right). \quad (10)$$

Итак, мы получили кроме стандартной ЧС части [3] еще зависящую от μ. Ее легко посчитать используя формулу

$$\int_0^\infty ds\,\mathrm{e}^{is(x^2-m^2)} = \pi\left(\delta(x^2-m^2)+\frac{i}{\pi}\mathcal{P}\frac{1}{x^2-m^2}\right)$$

и окончательно мы получаем

$$\begin{aligned} J^\mu_{c.s.} &= \frac{m}{|m|}\frac{g^2}{4\pi}{}^*F^\mu[1-\mathrm{sgn}(\mu)\theta(m)\theta(|\mu|-m)-\mathrm{sgn}(\mu)\theta(-m)\theta(|\mu|+m)]\\ &= \frac{m}{|m|}\frac{g^2}{4\pi}{}^*F^\mu[1-\mathrm{sgn}(\mu)\theta(\mu^2-m^2)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим неабелев случай. Тогда $A^\mu = T_a A^\mu_a$ в (2) и $\langle J^\mu_a\rangle = -ig\,\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu T_a G(x,x')\right]_{x\to x'}$. Известно [3, 9], что существуют только два вида постоянного внешнего поля. Первый – "абелевый" вид (очевидно, что самодействие $f^{abc}A^\mu_b A^\mu_c$ исчезает при таком выборе внешнего поля)

$$A^\mu_a = \eta_a\frac{1}{2}x_\nu F^{\nu\mu}, \quad (12)$$

где η_a произвольный постоянный вектор в цветовом пространстве, $F^{\nu\mu} = \mathrm{Const}$. Второй – чисто "неабелевый" вид

$$A^\mu = \mathrm{Const}. \quad (13)$$

Здесь, члены с производными (абелева часть) исчезают из тензора напряженности и остается только самодействие $F^{\mu\nu}_a = gf^{abc}A^\mu_b A^\mu_c$. Понятно, чтобы поймать абелеву часть ЧС члена надо рассматривать внешнее поле (12), тогда как для неабелевой части мы должны использовать (13).

Вычисления в "абелевом" случае сводятся к предыдущим, кроме тривиального навешивания цветовых индексов в (11):

$$J^\mu_a = \frac{m}{|m|}\left[1-\mathrm{sgn}(\mu)\theta(\mu^2-m^2)\right]\frac{g^2}{4\pi}{}^*F^\mu_a. \quad (14)$$

В случае (13) все вычисления аналогичны. Единственная разница в том, что член $\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ в (6) возникает не как следствие линейности A по x (абелев случай), а как следствие чистой неабелевости $A^\mu = \text{Const}$. В этом случае член $\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ в (6) становится квадратичным по A и мы получаем

$$J_a^\mu = \frac{m}{|m|}\left[1 - \operatorname{sgn}(\mu)\theta(\mu^2 - m^2)\right]\frac{g^3}{4\pi}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\operatorname{tr}\left[T_a A^\alpha A^\beta\right]. \tag{15}$$

Объединяя формулы (14) и (15) и интегрируя по A_a^μ, окончательно получим

$$S_{eff}^{C.S} = \frac{m}{|m|}\left[1 - \operatorname{sgn}(\mu)\theta(\mu^2 - m^2)\right]\pi W[A], \tag{16}$$

где $W[A]$ - ЧС член

$$W[A] = \frac{g^2}{8\pi^2}\int d^3x\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\operatorname{tr}\left(F_{\mu\nu}A_\alpha - \frac{2}{3}gA_\mu A_\nu A_\alpha\right).$$

Этот результат может быть также получен при произвольном внешнем поле по теории возмущений. Здесь, мы сразу работаем в неабелевом случае. Эффективное действие имеет вид

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \frac{1}{2}\operatorname{tr}\int_x A_\mu(x)\int_p \mathrm{e}^{-ixp}A_\nu(p)\Pi^{\mu\nu}(p) \\ &+ \frac{1}{3}\operatorname{tr}\int_x A_\mu(x)\int_{p,r} \mathrm{e}^{-ix(p+r)}A_\nu(p)A_\alpha(r)\Pi^{\mu\nu\alpha}(p,r), \end{aligned} \tag{17}$$

где поляризационный оператор и вершинная функция имеют стандартную форму

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) &= g^2\int_k \operatorname{tr}\left[\gamma^\mu G(p+k;\mu)\gamma^\nu G(k;\mu)\right] \\ \Pi^{\mu\nu\alpha}(p,r) &= g^3\int_k \operatorname{tr}[\gamma^\mu G(p+r+k;\mu)\gamma^\nu G(r+k;\mu)\gamma^\alpha G(k;\mu)]. \end{aligned} \tag{18}$$

Сначала рассмотрим член второго порядка. Сигналом для генерации массы (ЧС члена) служит $\Pi^{\mu\nu}(0) \neq 0$. Выделяя Pнечетную часть (содержащую тензор Леви–Чивита, дающий возможность построить ковариантную Pнечетную форму в эффективном действии) мы имеем

$$\Pi^{\mu\nu} = g^2\int_k(-i2me^{\mu\nu\alpha}p_\alpha)\frac{1}{(\tilde{k}^2 - m^2 + i\epsilon(k_0+\mu)\operatorname{sgn}(k_0))^2}. \tag{19}$$

После простых вычислений получаем

$$\Pi^{\mu\nu} = -i\frac{m}{|m|}\frac{g^2}{4\pi}e^{\mu\nu\alpha}p_\alpha\left[1 - \operatorname{sgn}(\mu)\theta(\mu^2 - m^2)\right]. \tag{20}$$

Таким же образом оперируя со вкладом третьего порядка получаем

$$\Pi^{\mu\nu\alpha} = -i\frac{m}{|m|}\frac{g^3}{4\pi}e^{\mu\nu\alpha}\left[1 - \operatorname{sgn}(\mu)\theta(\mu^2 - m^2)\right]. \tag{21}$$

Подставляя поляризационный и вершинный операторы в эффективное действие, мы получаем окончательный результат

$$S_{eff}^{C.S.} = \frac{m}{|m|}\left[1 - \operatorname{sgn}(\mu)\theta(\mu^2 - m^2)\right]\frac{g^2}{8\pi}\int d^3x e^{\mu\nu\alpha}\operatorname{tr}\left(A_\mu\partial_\nu A_\alpha - \frac{2}{3}gA_\mu A_\nu A_\alpha\right). \tag{22}$$

Итак, мы получили тот же ЧС μ–зависящий коэффициент сразу в эффективном действии, как и в предыдущем методе.

Более того, по теории возмущений мы также получили ЧС член при конечной плотности в 5–мерной неабелевой калибровочной теории. Все вычисления аналогичны 3–мерному случаю

$$
\begin{aligned}
S_{eff} &= \frac{m}{|m|}\left[1 - \operatorname{sgn}(\mu)\theta(\mu^2 - m^2)\right]\frac{g^3}{48\pi^2} \\
&\times \int d^5x e^{\mu\nu\alpha\beta\gamma}\operatorname{tr}\Big(A_\mu\partial_\nu A_\alpha\partial_\beta A_\gamma + \frac{3}{2}gA_\mu A_\nu A_\alpha\partial_\beta A_\gamma + \frac{3}{5}g^2A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta A_\gamma\Big). \quad (23)
\end{aligned}
$$

Из приведенных выше прямых вычислений видно, что ЧС коэффициент имеет одинаковую зависимость от химического потенциала для любых нечетных размерностей:

$$
S_{eff}^{C.S} = \frac{m}{|m|}\left[1 - \operatorname{sgn}(\mu)\theta(\mu^2 - m^2)\right]\pi W[A], \quad (24)
$$

где $W[A]$ ЧС член в любой нечетной размерности. Поскольку только низшие порядки теории возмущений дают вклад в генерацию ЧС члена, то результат полученный выше оказывается непертурбативным.

Очевидно, что при $\mu > 0$ (т.е. частиц больше античастиц в системе), мы имеем два случая. Первый, когда $\mu^2 < m^2$, тогда зависимость от μ исчезает и мы получаем обычный ЧС $S_{eff}^{C.S} = \pi W[A]$. Когда же $\mu^2 > m^2$, что в частности включает важный без массовый случай $m = 0$, широко обсуждаемый в литературе (например [3, 10]), то аномалия четности (ЧС) исчезает. С другой стороны, при $\mu < 0$ (число античастиц больше частиц), ЧС член не только не исчезает, но при высоких плотностях даже удваивается.

References

[1] R. Jackiw, S. Templeton Phys.Rev. **D23**, 2291 (1981)

[2] A. J. Niemi and G. W. Semenoff Phys.Rev.Lett. **51**, 2077 (1983)

[3] A. N. Redlich Phys.Rev. **D29**, 2366 (1984)

[4] L. Avarez-Gaume, E. Witten Nucl.Phys. **B234**, 269 (1984)

[5] J. D. Lykken, J. Sonnenschen and N. Weiss Phys.Rev **D42**, 2161 (1990); A. M. J. Schakel Phys.Rev. **D43**, 1428 (1991); V. Y. Zeitlin Mod.Phys.Lett. **A8**, 1821 (1993);

[6] E. V. Shuryak Phys.Rep. **61**, 73 (1980)

[7] A. Chodos, K. Everding and D. A. Owen Phys.Rev. **D42**, 2881 (1990)

[8] J. Schwinger Phys.Rev. **82**, 664 (1951)

[9] L. S. Brown, W. I. Weisberger Nucl.Phys. **B157**, 285 (1979)

[10] R. Jackiw *in Relativity, Groups and Topology II, Proceedings of the Les Houches Summer School XL, 1983* edited by B.S.DeWitt and R.Stora (North–Holand, New York, 1984)