Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.9, стр.604 - 607

ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ МОТТОВСКИХ ПОПРАВОК К ФОРМУЛЕ БЕТЕ–БЛОХА В ТЕРМИНАХ МОТТОВСКИХ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД

О.О.Воскресенская, А.Н.Сисакян, А.В.Тарасов, Г.Т.Торосян

Объединенный институт ядерных исследований

141980 г.Дубна, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 6 сентября 1996 г.

После переработки 4 октября 1996 г.

Показано, что расчет моттовских поправок к формуле Бете–Блоха может быть сведен к суммированию ряда, составленного из величин, билинейных по моттовским парциальным амплитудам.

PACS: 34.50.Bw

Отличие точного (вычисляемого с помощью моттовских фазовых сдвигов [1]) выражения для сечения рассеяния релятивистских электронов тяжелыми заряженными частицами от его борновского аналога приводит к поправкам к формуле Бете–Блоха [2] для средних потерь энергии заряженными частицами в веществе.

Эти поправки представляются выражением

$$\Delta_M(-\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}x}) = n_0 z \int \left(\frac{d\sigma_M}{d\varepsilon} - \frac{d\sigma_B}{d\varepsilon}\right)\varepsilon\, d\varepsilon, \tag{1}$$

где n_0 – число атомов вещества в единице объема, z – число электронов в атоме, а $d\sigma_{M(B)}/d\varepsilon$ – соответственно моттовское и борновское выражения для сечения рассеяния релятивистского электрона тяжелой частицей как функции энергии ε, передаваемой электрону в системе его покоя. Они были впервые точно рассчитаны в работах [3] путем численного интегрирования выражения (1) для нескольких значений заряда Z и скорости $\beta = V/c$ тяжелой заряженной частицы (иона). Эти расчеты продемонстрировали важность учета моттовских поправок (МП) к формуле Бете–Блоха при анализе данных об энергетических потерях релятивистских тяжелых ионов в веществе. Однако выражение для МП в интегральной формуле (1) крайне неудобно для практического применения и поэтому при анализе конкретных экспериментальных данных [4] обычно пользуются приближенными аналитическими выражениями для МП типа полученных в работе [5]. Недостаток этих приближенных выражений состоит в ограниченности области их применимости, грубо оцениваемой соотношением $Z/\beta \leq 100$, и по существу неопределенной точности. К тому же неправильное пороговое (при $\beta \to 0$) поведение этих выражений не позволяет пользоваться ими при вычислении полных пробегов релятивистских тяжелых ионов в веществе.

Поэтому задача получения простых в обращении и вместе с тем точных выражений для МП является достаточно актуальной.

Цель настоящей работы – показать, что интегрирование в формуле (1) может быть выполнено аналитически, а выражение для МП может быть представлено в виде достаточно быстро сходящегося ряда величин, билинейных по моттовским парциальным амплитудам, легко вычисляемого с помощью ЭВМ. Переходя в выражении (1) от интегрирования по переданной электрону энергии ϵ к интегрированию по углу ϑ его рассеяния ионом в с.ц.м. (по существу в системе покоя иона), перепишем (1) в виде

$$\Delta_M(-\frac{d\overline{E}}{dx}) = \frac{\pi z n_0}{m_e} \lim_{\vartheta_0\to 0} \int_{\vartheta_0}^{\pi} [\omega_M(\vartheta) - \omega_B(\vartheta)]\sin^2(\vartheta/2)\sin\vartheta\, d\vartheta, \qquad (2)$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_B(\vartheta) &= \eta^2(1-\beta^2\sin^2(\vartheta/2))/\sin^4(\vartheta/2),\\
\omega_M(\vartheta) &= \xi^2|F_M(\vartheta)|^2/\sin^2(\vartheta/2) + |G_M(\vartheta)|^2/\cos^2(\vartheta/2),\\
F_M(\vartheta) &= \sum_l F_M{}^{(l)}P_l(x), \quad G_M(\vartheta) = \sum_l G_M{}^{(l)}P_l(x),\\
F_M{}^{(l)} &= lC_M{}^{(l)} - (l+1)C_M{}^{(l+1)}, \quad x = \cos\vartheta, \qquad (3)\\
G_M{}^{(l)} &= l^2C_M{}^{(l)} + (l+1)^2C_M{}^{(l+1)},\\
C_M{}^{(l)} &= \exp[-i\pi(\rho_l - l)]\frac{\Gamma(\rho_l - i\eta)}{\Gamma(\rho_l+1+i\eta)}, \quad \eta = Z\alpha/\beta,\\
\xi &= \eta\sqrt{1-\beta^2}, \quad \rho_l = \sqrt{l^2 - Z^2\alpha^2}, \quad \alpha = 1/137,
\end{aligned}$$

m_e – масса электрона.

Для дальнейшего вместо оригинального [1] выражения для $G(\vartheta)$, приведенного выше, удобно использовать несколько иное, выражающее его через $F(\vartheta)$. Записывая

$$G_M(\vartheta) = \sum [l^2C_M{}^{(l)} + (l+1)^2C_M{}^{(l+1)}]P_l(x) \equiv \sum (l+1)^2C_M{}^{(l+1)}[P_l(x) + P_{l+1}(x)] \qquad (4)$$

и учитывая соотношение [6]

$$(l+1)[P_l(x) + P_{l+1}(x)] = \cos(\vartheta/2)\,[P_{l+1}{}^{(1)}(x) - P_l{}^{(1)}(x)], \qquad (5)$$

элементарно получаем

$$G_M(\vartheta) = \cos(\vartheta/2) \sum [lC_M{}^{(l)} - (l+1)C_M{}^{(l+1)}]P_l{}^{(1)}(x) = -\cos(\vartheta/2)\,F'(\vartheta), \qquad (6)$$

и как следствие

$$\omega_M(\vartheta) = [\xi^2|F(\vartheta)|^2 + |F'(\vartheta)|^2]/\sin^2(\vartheta/2). \qquad (7)$$

Введем величины

$$G_Z{}^{(l)} = \frac{\Gamma(l - i\eta)}{\Gamma(l+1+i\eta)}, \qquad (8)$$

получаемые из $C_M{}^{(l)}$ заменой $\rho_l \to l$ и отвечающие приближению Зоммерфельда–Мауэ–Фарри [7] в теории eZ-рассеяния, и соответствующие им величины

$$F_Z{}^{(l)} = lC_Z{}^{(l)} - (l+1)C_Z{}^{(l+1)},$$

$$F_Z(\vartheta) = \sum F_Z{}^{(L)} P_l(x) = \frac{\Gamma(1+i\eta)}{\Gamma(1-i\eta)} (\sin(\vartheta/2))^{2i\eta}, \tag{9}$$
$$\omega_Z(\vartheta) = (\xi^2 + \eta^2 \cos^2(\vartheta/2))/\sin^2(\vartheta/2) \equiv \omega_B(\vartheta).$$

Записывая

$$\begin{aligned} \omega_M(\vartheta) &= \omega_Z(\vartheta) + \lambda(\vartheta)/\sin^2(\vartheta/2), \\ \lambda(\vartheta) &= \xi^2[2\mathrm{Re}(\Delta F(\vartheta)F_Z^*(\vartheta)) + |\Delta F(\vartheta)|^2] + 2\mathrm{Re}[\Delta F'(\vartheta)F_Z'^*(\vartheta)] + |\Delta F'(\vartheta)|^2, \\ \Delta F(\vartheta) &= F_M(\vartheta) - F_Z(\vartheta) \end{aligned} \tag{10}$$

и замечая, что логарифмически расходящиеся на нижнем пределе в (2) вклады от $\omega_Z(\vartheta)$ и $\omega_B(\vartheta)$ взаимно сокращаются в силу (9), получим окончательно

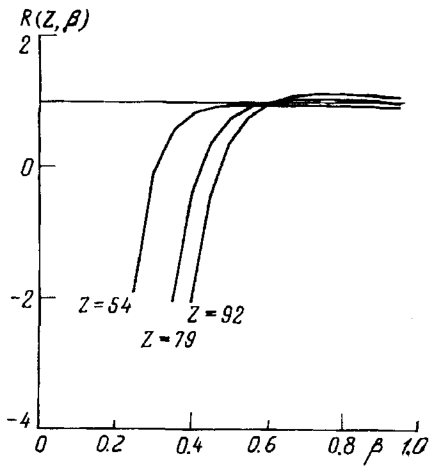
$$\Delta_M(-\frac{d\overline{E}}{dx}) = \frac{\pi z n_0}{m_e}\int_0^\pi \lambda(\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta \equiv \frac{2\pi Z n_0}{m_e}\sum_{l=0}^{L} \frac{[l(l+1)+\xi^2]}{2l+1}[|F_M^{(l)}|^2 - |F_Z^{(l)}|^2], \tag{11}$$

где использовано соотношение ортогональности функций Лежандра

$$\int_0^\pi P_l^{(m)}(\cos\vartheta)P_l^{(m)}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\delta_{ll'}. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что члены ряда (11) асимптотически ведут себя как l^{-2} и ряд абсолютно сходится.

Техническим вопросам выбора рационального метода численного суммирования ряда (11), а также сравнению результатов расчетов энергетических потерь тяжелых ионов с учетом МП с имеющимися экспериментальными данными будет посвящена отдельная публикация. Здесь же мы приведем лишь сравнение точного (11) результата для МП с приближенным [5] для демонстрации уровня его точности.



Отношение R приближенного аналитического результата [5] для МП к точному (11) как функция от β для трех значений Z

На рисунке представлено отношение R приближенного аналитического результата для МП к точному как функция от β для трех значений

$Z = 54, 79, 92$. Видно, что приближенное значение для МП при малых β становится отрицательным, в то время как точное, как показывают расчеты, всегда остается положительным.

Авторы благодарят С.Р.Геворкяна, Э.А.Кураева, М.П.Рекало и В.М.Тер-Антоняна за многочисленные полезные обсуждения вопросов, затронутых в работе.

---

1. N.F.Mott, Proc. Roy. Soc. **A124**, 425 (1929).
2. H.Bethe, J.Ashkin, In *Experimental Nuclear Phisics* **1**, Ed. E.Segre, Wiley, New York, 1953.
3. S.H.Morgan and P.B.Ebly, Nucl. Instrum. Methods **106**, 429 (1973).
4. C.Scheidenberger, H.Geissel, H.H.Mikkelsen et al., **GSI 95-1**, **ISSN 0174-0814**, Scientific Report **155**, (1995).
5. S.P.Ahlen, Phys. Rev. **A17**, 1236 (1978).
6. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М.: Физматгиз, 1963.
7. W.H.Furry, Phys.Rev. **46**, 391 (1934).