объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-94-220

А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян

РЕДУКЦИЯ ГУРВИЦА — ЭЙЛЕРА

Направлено в журнал «Journal of Physics A: Math.Gen.»

1994

Введение

В работе [1] была установлена связь преобразования Гурвица H с квантовой теорией углового момента. В настоящей статье сделан еще один шаг в этом направлении. Показано, что редукцию, индуцируемую преобразованием H в пространстве векторов состояний, можно интерпретировать как правило сложения квантовых угловых моментов.

Напомним, что $H : E^8_u \to E^5_x$, где буквой E обозначены 8-мерное и 5-мерное евклидовы пространства. Введем обозначения

$$\vec{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_7) ,$$

$$\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_4) .$$

Известно [2], что для произвольной функции $\Psi(\vec{x})$ выполняется условие

$$(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2)\Psi(\vec{x}) = 0 . \tag{1}$$

Здесь

$$\mathcal{L}_j = \mathcal{J}_j + \mathcal{K}_j , \tag{2}$$

а операторы $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{K}_j$ имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} u_2 & -u_3 & -u_0 & u_1 \\ u_3 & u_2 & -u_1 & -u_0 \\ u_1 & -u_0 & u_3 & -u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial u_0 \\ \partial/\partial u_1 \\ \partial/\partial u_2 \\ \partial/\partial u_3 \end{pmatrix} , \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 \\ \mathcal{K}_2 \\ \mathcal{K}_3 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -u_6 & -u_7 & u_4 & u_5 \\ -u_7 & u_6 & -u_5 & u_4 \\ -u_5 & u_4 & u_7 & -u_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial u_4 \\ \partial/\partial u_5 \\ \partial/\partial u_6 \\ \partial/\partial u_7 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Пусть $\Phi(\vec{u})$ есть вектор состояния, определенный в E^8_u. Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2)\Phi(\vec{u}) = 0 . \tag{5}$$

Согласно (1) это уравнение можно считать необходимым условием того, что $\Phi(\vec{u})$ является функцией от аргумента $\vec{x}$. Ниже будет доказано, что (5) является также достаточным условием. Это означает, что в с я к а я функция $\Phi(\vec{u})$, удовлетворяющая (5),есть функция от аргумента $\vec{x}$. В доказательстве приведенного утверждения существенную роль играют эйлеровы координаты,и потому естественно (5) назвать редукцией Гурвица-Эйлера (HE).

§1. Алгебра $SO(3) \times SO(3)$

Введем операторы инфинитезимальных плоскостных вращений

$$\mathcal{D}_{ij} = -u_i \frac{\partial}{\partial u_j} + u_j \frac{\partial}{\partial u_i} \quad .$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям [3]:

$$[\mathcal{D}_{jk}, \mathcal{D}_{km}] = \mathcal{D}_{mj} \ .$$

Операторы $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{K}_j$ можно представить в виде

$$\mathcal{J}_1 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{02} + \mathcal{D}_{31}), \qquad \mathcal{K}_1 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{64} + \mathcal{D}_{75});$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{03} + \mathcal{D}_{12}), \qquad \mathcal{K}_2 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{74} + \mathcal{D}_{56}),$$

$$\mathcal{J}_3 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{01} + \mathcal{D}_{23}), \qquad \mathcal{K}_3 = \frac{i}{2}(\mathcal{D}_{54} + \mathcal{D}_{67}) \ .$$

Справедливы коммутационные соотношения

$$[\mathcal{J}_j, \mathcal{K}_m] = 0 \ , \tag{6}$$

$$[\mathcal{J}_j, \mathcal{J}_m] = i\epsilon_{jm\lambda}\mathcal{J}_\lambda \ , \tag{7}$$

$$[\mathcal{K}_j, \mathcal{K}_m] = i\epsilon_{jm\lambda}\mathcal{K}_\lambda \ . \tag{8}$$

Таким образом, операторы $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{K}_j$ являются генераторами группы $SO(3) \otimes SO(3)$, дуйствующей в пространстве E^8_u.

§2. Квантовые волчки

Перейдем в E^8_u от декартовых координат u_j к эйлеровым координатам [4]

$$u_0 + iu_1 = f \cos\frac{\beta_1}{2}\, e^{-i\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}}, u_2 + iu_3 = f \sin\frac{\beta_1}{2}\, e^{i\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2}} \ , \tag{9}$$

$$u_4 + iu_5 = g \cos\frac{\beta_2}{2}\, e^{-i\frac{\alpha_2+\gamma_2}{2}}, u_6 + iu_7 = g \sin\frac{\beta_2}{2}\, e^{i\frac{\alpha_2-\gamma_2}{2}} \ . \tag{10}$$

Область изменения координат Эйлера фиксируется неравенствами

$$0 \le f,\, g < \infty,\, 0 \le \beta_1,\, \beta_2 \le \pi,\, 0 \le \alpha_1,\, \gamma_1;\, \alpha_2,\, \gamma_2 < 2\pi \ .$$

Из (9) следует, что

$$f = (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}, \qquad \beta_1 = 2\arctan\left(\frac{u_2^2+u_3^2}{u_0^2+u_1^2}\right)^{1/2},$$

$$\alpha_1 = -\arctan\frac{u_1}{u_0} + \arctan\frac{u_3}{u_2}, \qquad \gamma_1 = -\arctan\frac{u_1}{u_0} - \arctan\frac{u_3}{u_2}\ .$$

Пользуясь этими формулами,можно доказать, что производные по декартовым координатам связаны с производными по эйлеровым координатам следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial u_0 \\ \partial/\partial u_1 \\ \partial/\partial u_2 \\ \partial/\partial u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial/\partial f \\ \partial/\partial \alpha_1 \\ \partial/\partial \beta_1 \\ \partial/\partial \gamma_1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Здесь M, N, P и Q есть 2×2-матрицы

$$M = \begin{pmatrix} f\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} & , & -\cos^{-1}\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \\ -f\cos\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} & , & -\cos^{-1}\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} -2\sin\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} & , & -\cos^{-1}\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \\ 2\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} & , & -\cos^{-1}\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} f\sin\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} & , & -\sin^{-1}\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} \\ f\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} & , & \sin^{-1}\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} & , & \sin^{-1}\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} \\ 2\cos\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} & , & -\sin^{-1}\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2} \end{pmatrix}$$

Формулы, соответствующие координатам (10), получаются из (11) заменой $f \to g$, "1" $\to$ "2".

Теперь можно показать, что

$$\mathcal{J}_1 = i\,\sin\gamma_1\,\cot\beta_1\,\frac{\partial}{\partial\gamma_1} - i\,\cos\gamma_1\,\frac{\partial}{\partial\beta_1} - i\,\frac{\sin\gamma_1}{\sin\beta_1}\,\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\ ,$$

$$\mathcal{J}_2 = i\,\cos\gamma_1\,\cot\beta_1\,\frac{\partial}{\partial\gamma_1} + i\,\sin\gamma_1\,\frac{\partial}{\partial\beta_1} - i\,\frac{\cos\gamma_1}{\sin\beta_1}\,\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\ , \tag{12}$$

$$\mathcal{J}_3 = i\,\frac{\partial}{\partial\gamma_1}\ .$$

Связь операторов $\mathcal{K}_j$ с углами $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ отличается от связи оператора $\mathcal{J}_j$ с углами $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Это объясняется тем, что операторы $\mathcal{K}_j$ не получаются из операторов $\mathcal{J}_j$ подстановкой $u_0 \to u_4, u_1 \to u_5, u_2 \to u_6, u_3 \to u_7$, т.к. в $\mathcal{K}_j$ вместо $\mathcal{D}_{46}$, $\mathcal{D}_{47}$ и $\mathcal{D}_{45}$ входят $\mathcal{D}_{64}$, $\mathcal{D}_{74}$ и $\mathcal{D}_{54}$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 &= -i\,\sin\alpha_2\,\cot\beta_2\,\frac{\partial}{\partial\alpha_2} + i\,\cos\alpha_2\,\frac{\partial}{\partial\beta_2} + i\,\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}\,\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\quad,\\
\mathcal{K}_2 &= i\,\cos\alpha_2\,\cot\beta_2\,\frac{\partial}{\partial\alpha_2} + i\,\sin\alpha_2\,\frac{\partial}{\partial\beta_2} - i\,\frac{\cos\alpha_2}{\sin\beta_2}\,\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\quad,\\
\mathcal{K}_3 &= -i\,\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\quad.
\end{aligned}\tag{13}$$

Формулы (12) и (13) переходят друг в друга при преобразовании

$$\gamma_1 \longleftrightarrow -\alpha_2\,,\qquad \alpha_1 \longleftrightarrow -\gamma_2\,,\qquad \beta_1 \longleftrightarrow -\beta_2\,. \tag{14}$$

Можно убедиться, что

$$\vec{\mathcal{J}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\beta_1^2} - \cot\beta_1\frac{\partial}{\partial\beta_1} - \frac{1}{\sin^2\beta_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} - 2\cos\beta_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\gamma_1} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma_1^2}\right), \tag{15}$$

$$\vec{\mathcal{K}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial\beta_2^2} - \cot\beta_2\frac{\partial}{\partial\beta_2} - \frac{1}{\sin^2\beta_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2} - 2\cos\beta_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\gamma_2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma_2^2}\right). \tag{16}$$

Введем операторы

$$\mathcal{J}_{3'} = i\,\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\,,\qquad \mathcal{K}_{3'} = -i\,\frac{\partial}{\partial\gamma_2}\quad. \tag{17}$$

Нормированные собственные функции операторов $(\vec{\mathcal{J}}^2, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_{3'})$ и $(\vec{\mathcal{K}}^2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_{3'})$, соответствующие собственным значениям $j(j+1), m, \tau$ и $k(k+1), \lambda, q$ даются выражениями

$$\begin{aligned}
\Phi^j_{m\tau} &= \left(\tfrac{2j+1}{8\pi^2}\right)^{1/2}\mathcal{D}^j_{m\tau}(\gamma_1,\beta_1,\alpha_1),\\
\Phi^k_{-\lambda q} &= \left(\tfrac{2j+1}{8\pi^2}\right)^{1/2}\mathcal{D}^k_{\lambda q}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2),
\end{aligned}\tag{18}$$

в которых справа стоят $\mathcal{D}$-функции Вигнера. Таким образом, мы приходим к системе, состоящей из двух независимых квантовых шаровых волчков.

Из соотношений (2) и (6)-(8) следует, что

$$[\mathcal{L}_j\,,\mathcal{L}_m] = i\epsilon_{jm\lambda}\mathcal{L}_\lambda\,. \tag{19}$$

Мы видим, что HE-редукция тождественна проблеме сложения моментов $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$.

Уравнение (5) равноценно системе уравнений

$$\mathcal{L}_j\Phi(\vec{u}) = 0\,. \tag{20}$$

Очевидно, что

$$(\vec{\mathcal{L}} - \vec{\mathcal{J}})^2\Phi = \vec{\mathcal{K}}^2\Phi\,,$$

и потому

$$\vec{\mathcal{J}}^2\Phi = \vec{\mathcal{K}}^2\Phi\,.$$

В этом уравнении переменные, относящиеся к операторам $\vec{\mathcal{J}}^2$ и $\vec{\mathcal{K}}^2$, разделяются:

$$\Phi = \Phi^j\Phi^k\,,$$

$$\frac{\vec{\mathcal{J}}^2\Phi^j}{\Phi^j} = \frac{\vec{\mathcal{K}}^2\Phi^k}{\Phi^k} = q\,.$$

Отсюда заключаем, что $q = j(j+1) = k(k+1)$, т.е. $j = k$.

Далее, из (5) ясно, что сложение моментов $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{K}_j$ должно производиться по следующей схеме:

$$\Phi^j_{\tau q} = \sum_{m=-j}^{j} C^{0,0}_{j,m;j,-m}\Phi^j_{m\tau}\Phi^j_{-mq}\,. \tag{21}$$

Здесь функции $\Phi^j_{m\tau}$ и Φ^j_{-mq} взяты из (18), а через $C^{0,0}_{j,m;j,-m}$ обозначены коэффициенты Клебша-Гордана.

Известно [5], что

$$C^{0,0}_{j,m;j,-m} = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}}\,,$$

$$\mathcal{D}^j_{m\tau}(\gamma_1,\beta_1,\alpha_1) = (-1)^{m-j}\mathcal{D}^j_{\tau m}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\,.$$

Пользуясь последними двумя формулами имеем

$$\Phi^j_{\tau q} = \frac{(-1)^{j-k}}{\sqrt{8\pi^2}}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi^2}}\sum_{m=-j}^{j}\mathcal{D}^j_{\tau m}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\mathcal{D}^j_{mq}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\,.$$

Согласно теореме сложения для $\mathcal{D}$-функций Вигнера [5]:

$$\sum_{m=-j}^{j} \mathcal{D}^j_{\tau m}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\mathcal{D}^j_{mq}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) = \mathcal{D}^j_{\tau q}(\alpha,\beta,\gamma),$$

где α,β,γ связаны с $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ и $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ следующим образом:

$$\cot(\alpha-\alpha_2) = \cos\beta_2 \cot(\alpha_1+\gamma_2) + \cot\beta_1 \frac{\sin\beta_2}{\sin(\alpha_1+\gamma_2)},$$

$$\cos\beta = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2\cos(\alpha_1+\gamma_2),$$

$$\cot(\gamma-\gamma_1) = \cos\beta_1 \cot(\alpha_1+\gamma_2) + \cot\beta_2 \frac{\sin\beta_1}{\sin(\alpha_1+\gamma_2)}.$$

Как показано в работе [6], углы α,β и γ совпадают с угловыми координатами Эйлера в пространстве E^5_x. Таким образом, условие (5) действительно редуцирует $\Phi(\vec{u})$ в функцию от аргумента $\vec{x}$.

Заключение

В этой статье выявлен механизм редукции, индуцируемой преобразованием Гурвица в пространстве векторов состояний. Показано, что существует два эквивалентных друг другу механизма редукции. Первому из них соответствует дифференциальное уравнение (5), второму — правило сложения квантовых угловых моментов (21).

Мы благодарны Л.С. Давтяну, Л.Г. Мардояну и В.Н. Первушину за полезные обсуждения.

Литература

[1] M. Hage Hassan and M. Kibler, On Hurwitz Transformations, preprint LYCEN, Lyon (1991) 9110.

[2] L.S. Davtyan, L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. J.Phys.:Math.Gen. A20 (1987) 6121.

[3] M.J. Englefield, Group Theory and the Coulomb Problem, Wiley-Interscience. New-York. London. Sydney. Toronto. (1972).

[4] А.Н. Сисакян, В.М. Тер-Антонян, Структура преобразования Гурвица, препринт ОИЯИ, Р5-94-219, Дубна (1994).

[5] Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский, Квантовая теория углового момента. Наука. Ленинград. (1975).

[6] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian and V.M. Ter-Antonyan, The Eulerian Parameterization of the Hurwitz Transformation, preprint JINR, E5-94-121, Dubna (1994).

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июня 1994 года.

Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М.
Р5-94-220
Редукция Гурвица — Эйлера

В работе показано, что преобразование Гурвица, действующее в 8-мерном конфигурационном пространстве, порождает в пространстве векторов состояний правило редукции, тождественное правилу сложения квантовых угловых моментов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.НБоголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов

Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M.
P5-94-220
The Hurwitz – Eulerian Reduction

We show in this paper that the Hurwitz transformation acting in 8-dimensional configuration space induces, in a space of the state vectors, the rule of reduction identical to the angular momentum addition rule of quantum mechanics.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 14.06.94
Формат 60×90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 0,43
Тираж 345. Заказ 47324. Цена 77 р.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области