объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-94-219

А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян

СТРУКТУРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГУРВИЦА

Направлено в журнал «Journal of Physics A: Math.Gen.»

1994

Введение

Небиективные билинейные преобразования Леви-Чивита [1], Кустаанхеймо-Штифеля [2] и Гурвица [3, 4] являются не только изящными, но и полезными математическими конструкциями. Эти преобразования помогли решить весьма широкий спектр проблем: спинорная регуляризация уравнений небесной механики [5], проблема кулон-осцилляторного соответствия в квантовой механике [6], некоторые проблемы квантовой химии [7], функционального интегрирования [8], релятивистской квантовой теории составных систем [9], бозонного исчисления [10] и геометрического квантования [11]. Установлена связь преобразования Гурвица (H) с неассоциативными алгебрами [12], представлением Фока-Баргмана-Швингера [13], проведена параметризация Кели-Клейна [14] и параметризация Эйлера [15], развита небилинейная версия преобразования Гурвица [16].

В настоящей статье обсуждается структура H-преобразования. За отправную точку принята не 8×8-матрица, элементами которой служат декартовы координаты конфигурационного пространства, а формулы, выражающие x-координаты через u-координаты в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2 \,, \\
x_1 &= 2(u_0u_4 - u_1u_5 - u_2u_6 - u_3u_7) \,, \\
x_2 &= 2(u_0u_5 + u_1u_4 - u_2u_7 + u_3u_6) \,, \\
x_3 &= 2(u_0u_6 + u_1u_7 + u_2u_4 - u_3u_5) \,, \\
x_4 &= 2(u_0u_7 - u_1u_6 + u_2u_5 + u_3u_4) \,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Как видно из (1), H отображает 8-мерное конфигурационное u-пространство в 5-мерное конфигурационное x-пространство. Алгебраическая структура преобразования H такова, что выполняется тождество:

$$
r^2 \equiv x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_4^2 = (u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_7^2)^2 \equiv u^4 \,. \tag{2}
$$

В частном случае $u_1 = u_2 = u_3 = u_5 = u_6 = u_7 = 0$ H переходит в преобразование Леви-Чивита

$$
\begin{aligned}
x_0 &= u_0^2 - u_4^2 \,, \\
x_1 &= 2u_0u_4 \,, \\
x_2 &= x_3 = x_4 = 0 \,.
\end{aligned}
$$

Ниже будет найдено представление, в котором H определяется двумя структурными элементами: преобразованием Леви-Чивита и унитарным унимодулярным преобразованием. Пространства, в которых действуют эти преобразования, будут уточнены ниже.

§1 Структурные элементы

Координата x_0 в (1) структурно выделена среди остальных координат x-пространства. Координаты u можно объединить в группы (u_0, u_1, u_2, u_3) и (u_4, u_5, u_6, u_7) в соответствии с той ролью, которую они играют в формировании координаты x_0. Учитывая сказанное, мы отделим координату x_0 от координат x_1, x_2, x_3, x_4 и введем комплексные координаты

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + ix_2 \quad , \quad z_3 = x_3 + ix_4 \, , \\ v_0 &= u_0 + iu_1 \quad , \quad v_2 = u_2 + iu_3 \, , \\ v_4 &= u_4 + iu_5 \quad , \quad v_6 = u_6 + iu_7 \, . \end{aligned} \tag{3}$$

Двумерным комплексным векторам (z_1, z_3), (v_0, v_2) и (v_4, v_6) соответствуют модули

$$\begin{aligned} \mu &= (z_1^* z_1 + z_3^* z_3)^{1/2}, \\ f &= (v_0^* v_0 + v_2^* v_2)^{1/2}, \\ g &= (v_4^* v_4 + v_6^* v_6)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Сами эти векторы, согласно (1), связаны преобразованием

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_0 & -v_2^* \\ v_2 & v_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_4 \\ v_6 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Матрица этого преобразования унитарна с весом, т.е.

$$\begin{pmatrix} v_0^* & v_2^* \\ -v_2 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 & -v_2^* \\ v_2 & v_0^* \end{pmatrix} = f^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Учитывая свойства (6), получим

$$(z_1^*, z_3^*) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = 4f^2 (v_4^*, v_6^*) \begin{pmatrix} v_4 \\ v_6 \end{pmatrix} .$$

Отсюда и из выражения для координаты x_0 следует

$$\begin{aligned} x_0 &= f^2 - g^2 \, , \\ \mu &= 2fg \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Мы видим, что в структуру H входит в качестве составного элемента преобразование Леви-Чивита, отображающее конформно первый квадрант плоскости $f + ig$ в верхнюю полуплоскость $x_0 + i\mu$:

$$x_0 + i\mu = (f + ig)^2 .$$

Перейдем теперь от координат (3) к параметрам a_j Кели-Клейна

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} v_0 \\ v_2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} v_4 \\ v_6 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} a_4 \\ a_6 \end{pmatrix} , \qquad (8)$$

$$|a_1|^2 + |a_3|^2 = 1 ,$$
$$|a_0|^2 + |a_2|^2 = 1 ,$$
$$|a_4|^2 + |a_6|^2 = 1$$

и выделим из (5) унитарное унимодулярное преобразование

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & -a_2^* \\ a_2 & a_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_6 \end{pmatrix} . \qquad (9)$$

Согласно (5)

$$z_1 = 2(v_0 v_4 - v_2^* v_6) ,$$
$$z_3 = 2(v_2 v_4 + v_0^* v_6) .$$

Действуя на второе из этих соотношений оператором комплексного сопряжения и затем объединяя полученное равенство с первым соотношением, приходим к формуле

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3^* \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_4 & -v_6 \\ v_6^* & v_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_2^* \end{pmatrix} . \qquad (10)$$

Соотношения (5) и (10) дуальны друг к другу в следующем смысле: в (5) матрица преобразования и столбец, на который она действует, зависят от координат (u_0 , u_1 , u_2 , u_3) и (u_4 , u_5 , u_6 , u_7); в (10)—наоборот, матрица преобразования определяется координатами (u_4 , u_5 , u_6 , u_7), а соответствующий ей столбец—координатами (u_0 , u_1 , u_2 , u_3).

Теперь вместо (9) имеем

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 & -a_6 \\ a_6^* & a_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2^* \end{pmatrix} . \qquad (11)$$

Из (9) и (11) следует, что вторым структурным элементом H является унитарное унимодулярное преобразование, действующее в пространстве параметров Кели-Клейна.

§2 Спинорная реализация H.

Примем для параметров Кели-Клейна следующее представление

$$a_1 = \cos\frac{\beta}{2}e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}}\,, \quad a_3 = \sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}\,,$$

$$a_0 = \cos\frac{\beta_1}{2}e^{-i\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}}\,, \quad a_2 = \sin\frac{\beta_1}{2}e^{i\frac{\alpha_1-\gamma_1}{2}}\,,$$

$$a_4 = \cos\frac{\beta_2}{2}e^{-i\frac{\alpha_2+\gamma_2}{2}}\,, \quad a_6 = \sin\frac{\beta_2}{2}e^{i\frac{\alpha_2-\gamma_2}{2}}\,.$$

Углы Эйлера изменяются в пределах

$$0 \le \alpha < 2\pi\,, 0 \le \beta \le \pi\,, -2\pi \le \gamma < 2\pi$$

(такие же неравенства имеют место для остальных углов).

Подставляя эти формулы в преобразования (9) и (11), приходим к спинорной реализации:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \\ \sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \end{pmatrix} \doteq \mathcal{R}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta_2}{2}e^{-i\frac{\alpha_2+\gamma_2}{2}} \\ \sin\frac{\beta_2}{2}e^{i\frac{\alpha_2-\gamma_2}{2}} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \\ \sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\gamma_2, \beta_2, \alpha_2) \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta_1}{2}e^{-i\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}} \\ \sin\frac{\beta_1}{2}e^{i\frac{\gamma_1-\alpha_1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$\mathcal{R}$ означает здесь матрицу конечных вращений:

$$\mathcal{R}(a, b, c) = \begin{pmatrix} \cos\frac{b}{2}e^{-i\frac{a+c}{2}} & -\sin\frac{b}{2}e^{-i\frac{a-c}{2}} \\ \sin\frac{b}{2}e^{i\frac{a-c}{2}} & \cos\frac{b}{2}e^{i\frac{a+c}{2}} \end{pmatrix}.$$

Величины $(x_0, \mu, \alpha, \beta, \gamma)$ и $(f, g, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ имеют смысл эйлеровых координат в x- и u-пространствах:

$$z_1 = \mu a_1\,, \qquad z_3 = \mu a_3\,,$$

$$v_0 = f a_0\,, \qquad v_2 = f a_2\,,$$

$$v_4 = g a_4\,, \qquad v_6 = g a_6\,.$$

Здесь a_j—введенные выше параметры Кели-Клейна.

В пространстве углов $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ преобразование H действует по схеме

$$S^3(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{R}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\mathcal{R}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)S^3(0,0,0),$$

$$S^3(\gamma, \beta, \alpha) = \mathcal{R}(\gamma_2, \beta_2, \alpha_2)\mathcal{R}(\gamma_1, \beta_1, \alpha_1)S^3(0,0,0),$$

т.е. H конструирует, из заданных угловых триплетов $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, матрицы конечных вращений, переводящие полюс трехмерной сферы в точку, которой соответствуют угловые координаты x-пространства.

Заключение

В этой работе нас интересовала структура преобразования Гурвица. Мы показали, что существуют две дуальные друг к другу формы описания структуры H. Сказанное можно резюмировать следующими равенствами

$$\begin{pmatrix} x_0 + i\mu \\ a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f+ig & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & -a_2^* \\ 0 & a_2 & -a_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f+ig \\ a_4 \\ a_6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_0 + i\mu \\ a_1 \\ a_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f+ig & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -a_6 \\ 0 & a_6^* & a_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f+ig \\ a_0 \\ a_2^* \end{pmatrix},$$

Обе формы записи утверждают одно и то же: H расщепляется на преобразование Леви-Чивита и унитарное унимодулярное преобразование, связывающее параметры Кели-Клейна x-пространства с параметрами Кели-Клейна u-пространства.

Мы благодарны Л.С. Давтяну, Л.Г. Мардояну и В.Н. Первушину за полезные замечания.

Литература

[1] T. Levi-Civita, Sur la Rèsolution Qualitative di Problème Restveint des Trois Corps, Opera Mathematical, 2 (1956) 411.

[2] P. Kustaanheimo, Spinor Regularization of the Kepler Motion, Ann. Univ. Turku, Ser. A1 (1964) 73.

[3] L.S. Davtyan, L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan. J.Phys.:Math.Gen. **A20** (1987) 6121.

[4] D. Lambert, M. Kibler, J.Phys.:Math.Gen. **A21** (1988) 307.

[5] E. Stiefel, G. Scheifele, Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1971.

[6] M. Kibler, A. Ronveaux, T. Negadi, J.Math.Phys. **26** (1986) L.G. Mardoyan, G.S. Pogosyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan, in "Schrödinger Operators Standart and Non-Standart", World Scientific, Singapore (1989).

[7] M. Kibler, T. Negadi, Croatica Chemica Acta, CCACAC, **57** (1984) 1509.

[8] A. Inomata, G. Junker, R. Wilson, Found. of Phys. **23** (1993) 1073.

[9] A.O. Barut, C.K.E. Schneider, R.Wilson, J.Math.Phys. **20** (1970) 2244.

[10] M. Kibler, T. Negadi, Lett. Nuovo Cimento, **37** (1983) 225.

[11] I.V. Mladenov, J. Tsanov, J.Geom. and Phys. **2** (1985) 125.

[12] I.V. Polubarinov, On Application of Hopf Fiber Bundles in Quantum Theory, Preprint JINR, E2-84-607, Dubna (1984).

[13] M. Hage Hassan and M. Kibler, On Hurwitz Transformations, preprint LYCEN, Lyon, (1991) 9110.

[14] L.S. Davtyan, J.Math.Phys. **34**, (1993) 4834.

[15] L.G. Mardoyan, A.N. Sissakian and V.M. Ter-Antonyan, The Eulerian Parameterization of the Hurwitz Transformation, preprint JINR, E5-94-121, Dubna, (1994).

[16] L.S. Davtyan, A.N. Sissakian, V.M. Ter-Antonyan, The Hurwitz Tramsformation: Non-bilinear Version, preprint JINR, E5-94-119, Dubna, (1994).

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июня 1994 года.

Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М. Р5-94-219
Структура преобразования Гурвица

Показано, что преобразование Гурвица состоит из двух структурных элементов: конформного преобразования Леви-Чивита и унитарного унимодулярного преобразования, действующего в пространстве эйлеровых угловых координат.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов

Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M. P5-94-219
The Structure of the Hurwitz Transformation

It is shown that the Hurwitz transformation includes two structural elements: the conformal transformation of Levi-Civita and the unitary unimodular transformation acting in the space of the Eulerian angular coordinates.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 14.06.94
Формат 60×90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 0,43
Тираж 345. Заказ 47325. Цена 77 р.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области