

МЕТОД ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А.Н.Сисакян, И.Л.Соловцов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре рассматривается непертурбативный метод — вариационная теория возмущений. Его эффективность демонстрируется на примере квантово-механического ангармонического осциллятора. Устанавливается связь с методом гауссова эффективного потенциала и изучаются свойства сходимости рядов вариационной теории возмущений для ϕ^4 -модели теории поля. Рассматривается перенормировка ϕ^4 -модели и строится непертурбативная β -функция. Полученный результат находится в согласии с пятипетлевым приближением. Формулируется непертурбативное разложение в квантовой хромодинамике, основанное на новом малом параметре.

A nonperturbative method — variational perturbation theory is discussed. Its efficiency is demonstrated for the quantum-mechanical anharmonic oscillator. The nonperturbative Gaussian effective potential is derived from a general approach, the variational perturbation theory. The properties of convergence are studied for series in the variational perturbation theory for the ϕ^4 -model. We investigate the renormalization procedure in ϕ^4 -model in the variational perturbation theory. The nonperturbative β -function is derived in the framework of the proposed approach. The obtained result is in agreement with five-loop approximation. We formulate systematic, nonperturbative expansion in quantum chromodynamics using a new small parameter.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория возмущений является в настоящее время основным методом проведения вычислений в квантовой теории поля. Вместе с процедурой перенормировки ее использование в квантовой электродинамике, в теории электрослабых взаимодействий и в пертурбативной области квантовой хромодинамики позволяет анализировать широкий круг вопросов. Вместе с тем известно, что, ограничиваясь лишь рамками теории возмущений, нельзя рассчитывать на достаточно полное изучение структуры квантово-полевой модели. Причем это касается не только теорий с большой величиной константы связи, но и теорий, в которых константа связи относительно мала, как, например, в случае квантовой электро-

динамики. В квантовой хромодинамике известно большое число задач, решение которых требует непертурбативных подходов.

В последние годы предприняты значительные усилия по разработке методов, дающих тот или иной способ выхода за рамки теории возмущений. Одним из направлений является суммирование рядов теории возмущений [1—3]. При этом для членов высших порядков применяются асимптотические формулы, полученные, например, с помощью метода функционального перевала [4—8]. Основная трудность такого подхода связана с асимптотическим характером ряда теории возмущений. Процедура суммирования таких рядов содержит, вообще говоря, функциональный произвол. Корректность же постановки задачи достигается за счет привлечения дополнительной информации о сумме ряда [9]. Такая информация известна лишь для простейших моделей теории поля [10]. Попытки разработки методов, непосредственно не связанных с рядом теории возмущений, предпринимались во многих работах (см., например, [11—18]). Широкое распространение получили вариационные подходы [19—22], к числу которых можно отнести метод гауссова эффективного потенциала (GEP) [23—26]. Следует отметить однако, что многие вариационные методы сталкиваются, как правило, с трудностью оценки точности и устойчивости результатов, получаемых с помощью вариационной процедуры. Другими словами, далеко не всегда в рамках метода удается построить алгоритм вычисления поправок к значению, найденному вариационным путем. Отсутствие такого алгоритма затрудняет ответ на вопрос, в какой мере так называемый «основной вклад» адекватно отражает изучаемый объект и какова область применимости полученных выражений. Однако, даже если алгоритм вычисления поправок, т.е. членов некоторого аппроксимирующего ряда, существует, то этого еще далеко не достаточно. Принципиальную роль здесь играют свойства сходимости ряда. Действительно, если при слабой связи даже расходящийся ряд теории возмущений известным образом аппроксимирует рассматриваемую величину как ряд асимптотический, то при отсутствии малого параметра аппроксимирующий ряд должен удовлетворять более жестким требованиям. Надежная информация в этом случае может быть получена на основе сходящихся рядов. Если ориентироваться на еще более благоприятную возможность, то было бы желательно иметь дело не просто со сходящимся рядом, а с рядом Лейбница (знакопеременный ряд с убывающими по абсолютной величине от номера к номеру членами). В этом случае появилась бы возможность производить двухсторонние оценки рассматриваемой величины на основании уже первых членов ряда. Если еще при этом имелись бы дополнительные свободные параметры, влияющие на члены ряда, то границы оценок можно было бы максимально сблизить.

В настоящей работе мы в этом плане рассмотрим метод вариационной теории возмущений (VPT) [27—33]. Несмотря на присутствие в названии подхода слова «возмущение», метод VPT является непертурбативным. В его рамках для аппроксимации рассматриваемой величины удастся построить отличные от теории возмущений разложения, позволяющие выйти за рамки слабой связи. Вычисляемость поправок в методе VPT связана с тем обстоятельством, что в нем, так же как и в стандартной теории возмущений, используются только лишь «вычисляемые» гауссовы функциональные квадратуры [34]. Более того, ряд VPT можно записать таким образом, чтобы его члены определялись обычными фейнмановскими графами. При этом, конечно, ряд VPT будет иметь по сравнению с теорией возмущений иную структуру, а в диаграммах, вообще говоря, будут фигурировать модифицированные пропагаторы и вершины.

План нашего изложения таков. Вначале мы на простом примере рассмотрим основные приемы метода VPT. Затем продемонстрируем его работу в случае квантово-механического ангармонического осциллятора. В четвертом разделе установим связь обсуждаемого подхода с гауссовым эффективным потенциалом. Далее рассмотрим свойства сходимости VPT-рядов и вопрос перенормировки, построим непертурбативную β -функцию для скалярной модели, обсудим применение метода VPT для квантовой хромодинамики. Наконец, в заключение подведем краткие итоги приведенного рассмотрения.

2. ИГРУШЕЧНАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим интеграл

$$Z[g] = \int dx \exp(-S[x]), \quad (2.1)$$

где

$$S[x] = S_0[x] + g S_{\text{int}}[x],$$

$$S_0[x] = x^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (2.2)$$

$$S_{\text{int}}[x] = x_1^4 + x_2^4, \quad dx = dx_1 dx_2,$$

который является нуль-мерным аналогом двухкомпонентной φ^4 -модели теории поля. При этом, так же как и в теории поля, будем ориентироваться на гауссовы квадратуры, т.е. на интегралы вида

$$\int dx P(x) \exp\{-S_0[x]\}, \quad (2.3)$$

где $P(x)$ — некоторый полином переменных x_1 и x_2 .

Первая очевидная возможность состоит в разложении подынтегрального выражения в (2.1) в ряд по степеням константы связи g (здесь мы будем применять теоретико-полевую терминологию). В результате мы приходим к стандартному разложению в ряд теории возмущений:

$$Z[g] = \sum g^n C_n, \quad (2.4)$$

$$C_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int dx S_{\text{int}}^n \exp(-S_0[x]). \quad (2.5)$$

Если разложение функции (2.1) в ряд (2.4) с коэффициентами (2.5) единственно, то обратная процедура нахождения суммы ряда (2.4) без привлечения дополнительной информации о функции $Z[g]$ является неоднозначной. Например, тот же ряд будет иметь и функция $Z[g] + \exp(-1/g)$, которая при больших константах связи g обладает иным асимптотическим поведением по сравнению с (2.1). Причина некорректности задачи суммирования в такой постановке состоит в асимптотическом характере ряда (2.4). Таким образом, ряд теории возмущений сам по себе, без привлечения дополнительной информации о его сумме, не позволяет судить о функции $Z[g]$ при достаточно больших значениях константы связи. Такого рода дополнительные условия, которые необходимы для однозначности суммирования асимптотического ряда, для реалистических моделей теории поля неизвестны. Этот вопрос требует специального исследования и в настоящее время имеет решение лишь для некоторых простых случаев.

Метод VPT дает возможность, используя те же гауссовы квадратуры, строить для $Z[g]$ иные разложения. Их различие между собой состоит в способе варьирования (выборе пробного VPT-функционала) действия (2.2). В этом разделе мы рассмотрим два способа построения VPT-разложений. Первый, наиболее простой, основан на выборе вариационной добавки в гармоническом виде. Второй способ использует VPT-функционал ангармонического типа.

В первом случае в качестве вариационного слагаемого выберем квадратичное по полям выражение и перепишем полное действие в виде

$$S[x] = S_0^h[x] + S_{\text{int}}^h[x], \quad (2.6)$$

где

$$S_0^h[x] = S_0[x] + \chi S_0[x], \quad (2.7)$$

$$S_{\text{int}}^h[x] = g S_{\text{int}}[x] - \chi S_0[x], \quad (2.8)$$

и выполним разложение по степеням нового действия взаимодействия (2.8). Очевидно, что при этом для вычисления членов полученного ряда нам понадобятся только лишь гауссовы квадратуры. В результате VPT-ряд будет иметь вид

$$Z[g] = \sum_n Z_n[g, \chi], \quad (2.9)$$

$$Z_n[g, \chi] = \frac{(-g)^n}{n!(1 + \chi g)^{1+2n}} \int dx |S_{int} - \chi(1 + \chi g)S_0|^n \exp(-S_0[x]). \quad (2.10)$$

Исходная величина $Z[g]$, конечно, не зависит от вариационного параметра χ , поэтому при рассмотрении конечного числа членов ряда можно воспользоваться свободой выбора χ , исходя из соображений оптимальности разложения (см. в связи с этим, например, работы [24, 27, 28, 31, 35—38], в которых рассматриваются различные способы оптимизации и их применение). В теории поля, как правило, нам известны лишь первые члены ряда. Наиболее часто оптимальные значения вариационных параметров выбираются на основе первого нетривиального порядка VPT. При этом устойчивость полученных результатов будет достигнута лишь в том случае, когда последующие поправки к основному вкладу достаточно малы. Мы рассмотрим влияние поправок при гармоническом и ангармоническом способах варьирования. Фиксируем вариационный параметр χ с помощью условия

$$\frac{\partial Z^{(N)}[g, \chi]}{\partial \chi} = 0, \quad (2.11)$$

где $Z^{(N)}[g, \chi]$ — N -частичная сумма ряда (2.9):

$$Z^{(N)}[g, \chi] = \sum_{n=0}^N Z_n[g, \chi]. \quad (2.12)$$

Для первого нетривиального порядка ($N = 1$) уравнение (2.11) дает

$$\begin{aligned} \chi &= (1/\tau - 1)/g, \\ \tau &= \frac{2}{9g} [\sqrt{1 + 9g} - 1]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

На рис.1 демонстрируется характерное поведение N -х частичных сумм ряда теории возмущений и ряда VPT для относительно малого значения константы связи $g = 0,1$ и для VPT-параметра χ , определенного согласно (2.13). Характерные для асимптотических рядов «блуждания» частичных сумм для рассматриваемой сейчас гармонической вариационной процедуры начинаются несколько позже, чем в случае теории возму-

щений. В этом смысле гармоническая процедура улучшает сходимость ряда. Тем не менее, если удерживать вариационный параметр фиксированным, не зависящим от рассматриваемого порядка, то возникающий ряд по-прежнему остается расходящимся. Характер этой расходимости в точности тот же, что и у соответствующего ряда теории возмущений. Дело здесь в том, что при фиксированном вариационном параметре пробный гармонический функционал, содержащий меньшую степень поля, чем в исходном действии взаимодействия, не способен должным образом его скомпенсировать для дальних членов ряда, так как основной вклад в асимптотику при этом определяется большими конфигурациями полей. Однако, как было замечено эмпирически в работе [18] и обсуждалось затем в [35], результаты выглядят сходящимися, если вариационный параметр «подкручивать» должным образом от порядка к порядку. Строгое доказательство такой индуцированной сходимости в нуль-мерном и одномерном случаях дано в работах [39,40].

Для построения ангармонической вариационной процедуры перепишем полное действие в виде

$$S[x] = S_0^a[x] + S_{\text{int}}^a[x], \quad (2.14)$$

где

$$S_0^a[x] = S_0[x] + \theta S_0^2[x], \quad (2.15)$$

$$S_{\text{int}}^a = g S_{\text{int}}[x] - \theta S_0^2[x]. \quad (2.16)$$

Ситуация здесь несколько сложнее, чем в предыдущем случае. После разложения по степеням нового действия взаимодействия (2.16) возникают негауссовы интегралы, так как в показателе экспоненты остается слагаемое $\theta S_0^2[x]$. Однако проблема легко решается с помощью применения преобразования Фурье:

$$\exp(-\theta S_0^2(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4} + i u \sqrt{\theta} S_0(x)\right\}. \quad (2.17)$$

В результате VPT-разложение может быть записано в виде [28]:

$$Z[g] = \sum Z_n[g, \theta], \quad (2.18)$$

$$Z_n[g, \theta] = \int_0^{\infty} d\alpha (\alpha^2 \theta)^n \exp(-\alpha - \alpha^2 \theta) \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(2k)!} \frac{(-g/\theta)^k}{(n-k)!}, \quad (2.19)$$

$$a_k = \sum_{l=0}^k \frac{\Gamma(2l+1/2)}{l!} \frac{\Gamma(2(k-l)+1/2)}{(k-l)!}. \quad (2.20)$$

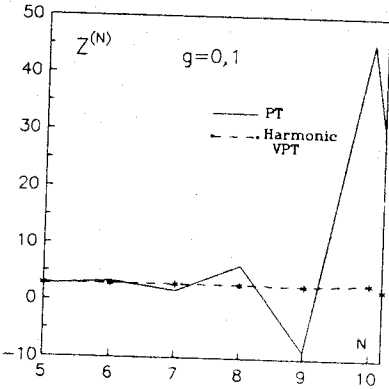


Рис.1. Поведение N -х частичных сумм $Z^{(N)}[g]$ в теории возмущений и VPT с гармонической вариационной процедурой и вариационным параметром, фиксированным по первому порядку

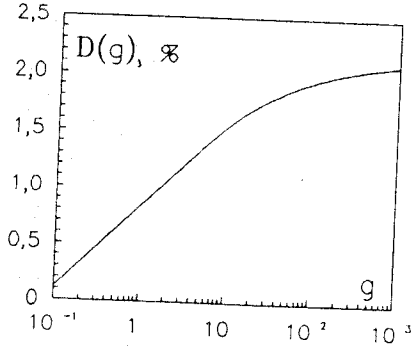


Рис.2. Поведение относительной погрешности $D(g) = |Z^{(1)}(g)/Z_{\text{exact}}(g) - 1|$ как функции константы связи g для ангармонической вариационной процедуры

Оптимизируя первый нетривиальный порядок, для вариационного параметра находим

$$\theta = \frac{3}{4} g. \tag{2.21}$$

Поведение относительной погрешности $D(g) = |Z^{(1)}(g)/Z_{\text{exact}}(g) - 1|$ в процентах как функции константы связи g показано на рис.2. Как видно из этого рисунка, уже первый нетривиальный порядок обеспечивает вполне приемлемую точность аппроксимации $Z[g]$ для всего положительного интервала изменения константы связи. Учет следующих поправок еще более повышает точность VPT-аппроксимации.

Определяя для удобства параметр $t = 2\theta/g$, перепишем выражение (2.19) в виде, удобном для изучения предела сильной связи:

$$Z_n[g, \theta] = \sqrt{\frac{2}{gt}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{2n} \exp\left(-\alpha^2 - \alpha \sqrt{\frac{2}{gt}}\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-2/t)^k}{(2k)!(n-k)!} a_k. \tag{2.22}$$

Интересно отметить, что выражение (2.22) позволяет сразу же определить функциональную зависимость $Z[g]$ при $g \rightarrow \infty$. Действительно, в N -м порядке VPT при $g \rightarrow \infty$ получаем

$$Z^{(N)} = A^{(N)} / \sqrt{g}, \tag{2.23}$$

где

$$A^{(N)} = \sqrt{\frac{2}{t}} \Gamma(N + 3/2) \sum_{n=0}^N \frac{(-2/t)^k}{(2k+1)!(N-k)!} a_k. \tag{2.24}$$

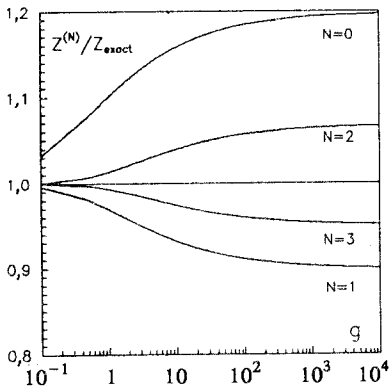


Рис.3. Коридор двухсторонних оценок единицы, определяемый функциями $Z^{(N)}/Z_{\text{ex}}$, для $N = 0, 1, 2, 3$ и $t = 1$

Оптимизация первого нетривиального порядка (условие $\partial Z^{(1)}/\partial t = 0$ или $Z_1 = 0$) дает $t_{\text{opt}} = 3/2$, при котором находим $A^{(1)} = 3,212$, в то время как точное значение есть $A = \Gamma^2(1/4)/4 = 3,286$. Возникающая погрешность вычисления составляет 2,3%. Можно показать, что

аппроксимации $Z^{(N)}$ для различных значений константы связи дают устойчивый результат [28]. Этот факт объясняется сходимостью ряда VPT при $t > 1/2$. Причем это утверждение справедливо для любых положительных g .

Аналогом неравенства Соболева в рассматриваемом случае является соотношение

$$S_4[x, y]/S_2^2[x, y] \leq 1, \quad (2.25)$$

из которого следует, что при $t > 1$ ряд VPT (2.18) является знакоположительным, а при $t = 1$ происходит смена режима, и для $1/2 < t < 1$ ряд переходит в ряд Лейбница. Отметим, что значение вариационного параметра $t = 1$, при прохождении которого знакопеременный ряд становится знакоопределенным, соответствует величине t , найденной из критерия асимптотической оптимизации ряда VPT, согласно которому минимизируется вклад дальних членов ряда [28].

В режиме ряда Лейбница для точного значения $Z_{\text{ex}}[g]$ справедливы двухсторонние оценки вида

$$Z^{(2N+1)} < Z_{\text{exact}} < Z^{(2N)}, \quad (2.26)$$

где $Z^{(2N+1)}$ и $Z^{(2N)}$ — нечетные и четные частичные суммы ряда VPT соответственно. На рис.3 изображен коридор таких двухсторонних оценок единицы, который определяется функциями $Z^{(N)}/Z_{\text{ex}}$ для $N = 0, 1, 2, 3$ и значением параметра $t = 1$. Видно, что уже первые частичные суммы обеспечивают приемлемую точность для всего интервала изменения константы связи.

3. АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

В этом разделе мы рассмотрим применение метода VPT для получения непертурбативных характеристик квантово-механического ангармонического осциллятора (АО), который представляет собой одномерную модель φ^4 -теории поля и, как правило, служит испытательным полигоном для различных непертурбативных подходов. Запишем евклидов функционал действия в виде

$$S[\varphi] = S_0[\varphi] + \frac{m^2}{2} S_2[\varphi] + gS_4[\varphi], \quad (3.1)$$

где

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2} \int dx (\partial \varphi)^2, \quad (3.2)$$

$$S_2[\varphi] = \int dx \varphi^2, \quad (3.3)$$

$$S_4[\varphi] = \int dx \varphi^4. \quad (3.4)$$

Рассмотрим функцию Грина, представленную функциональным интегралом

$$G_{2\nu} = \int D\varphi \{ \varphi^{2\nu} \} \exp(-S[\varphi]), \quad (3.5)$$

где $\{ \varphi^{2\nu} \}$ обозначает произведение полей $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2\nu})$. Введем безразмерные переменные, заменив $\varphi \rightarrow g^{-1/6} \varphi$, $x \rightarrow g^{-1/3} x$, и перепишем действие (3.1) следующим образом:

$$S[\varphi] = S_0[\varphi] + \frac{\omega^2}{2} S_2[\varphi] + S_4[\varphi], \quad (3.6)$$

где

$$\omega^2 = m^2 g^{-2/3}. \quad (3.7)$$

Безразмерные функции Грина $G_{2\nu}$ будут записываться в виде (3.5) с действием (3.6).

Так же, как и в стандартной теории возмущений, будем ориентироваться на гауссовы функциональные интегралы:

$$\begin{aligned} & \int D\varphi \exp \left\{ - \left[\frac{1}{2} \langle \varphi K \varphi \rangle + \langle \varphi J \rangle \right] \right\} = \\ & = \left(\det \frac{K}{-\partial^2 + m^2} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{1}{2} \langle JK^{-1}J \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Любой полином полей φ набирается, как обычно, соответствующим числом дифференцирований по источнику $J(x)$.

Рассмотрим следующий функционал:

$$A[\varphi] = \theta S_0[\varphi] + \frac{\chi}{2} S_2[\varphi], \quad (3.9)$$

где θ и χ — вариационные параметры.

Перепишем действие (3.6) в виде (здесь мы применяем ангармоническую вариационную процедуру)

$$S[\varphi] = S_0^a[\varphi] + S_{\text{int}}^a[\varphi], \quad (3.10)$$

$$S_0^a[\varphi] = S_0[\varphi] + \frac{\omega^2}{2} S_2[\varphi] + A^2[\varphi], \quad (3.11)$$

$$S_{\text{int}}^a[\varphi] = S_{\text{int}}[\varphi] - A^2[\varphi]. \quad (3.12)$$

Пробный функционал $A^2[\varphi]$ имеет ту же степень поля, что и исходное действие взаимодействия $S_{\text{int}}[\varphi]$. Точные функции Грина не зависят от вариационных параметров, поэтому можно использовать свободу их выбора для улучшения свойств ряда. Рассмотрим в качестве конкретного примера задачу о вычислении энергии основного уровня АО E_0 в пределе сильной связи [27]. Эта задача связана с вычислением четырехточечной функции Грина $G_4(0,0,0,0) \equiv G_4(0)$ благодаря соотношению

$$dE_0/dg = g^{-2/3} G_4(0). \quad (3.13)$$

Рассмотрим асимптотику дальних членов VPT-ряда. При этом мы имеем в виду, что поскольку мы в конечном итоге будем аппроксимировать искомую величину суммой первых слагаемых VPT-разложения, то естественно потребовать, чтобы вклад дальних членов ряда был минимален. Как мы увидим ниже, такая асимптотическая оптимизация приведет к взаимосвязи вариационных параметров. Дело сводится к нахождению асимптотики функционального интеграла

$$\int D\varphi [A^2 - S_1]^n \exp[-(S_0 - A^2)] \quad (3.14)$$

при больших номерах n . Воспользуемся методом функционального перевала и запишем выражение (3.14) в виде

$$n^n \int D\varphi \exp(-nS_{\text{eff}}[\varphi] - n^{1/2} S_0[\varphi]), \quad (3.15)$$

где

$$S_{\text{eff}} = A^2 - \ln[A^2 - S_1]. \quad (3.16)$$

Основной вклад определяется функцией φ_0 , удовлетворяющей уравнению $\delta S_{\text{eff}}/\delta \varphi = 0$, которое в развернутом виде запишется следующим образом:

$$-\ddot{\varphi}_0 + a \varphi_0 - b \varphi_0^3 = 0, \tag{3.17}$$

где

$$a = \chi / \theta, \quad b = \{\theta A[\varphi_0] (1 - D[\varphi_0])\}^{-1}, \quad D[\varphi_0] = A^2[\varphi_0] - S_I[\varphi_0]. \tag{3.18}$$

Соответствующее решение с конечным действием имеет вид

$$\varphi_0 = \pm \sqrt{\frac{2a}{b}} [\cos h \sqrt{a} (t - t_0)]^{-1}. \tag{3.19}$$

Произвольный параметр отражает трансляционную инвариантность теории. Выполняя далее простые вычисления, можно убедиться в том, что вклад дальних членов VPT-ряда будет минимален, если вариационные параметры θ и χ связаны соотношением

$$\chi = (9/16 \theta)^{1/3}. \tag{3.20}$$

Оставшийся независимый параметр θ можно фиксировать, оптимизируя первые слагаемые VPT-разложения.

Вернемся к вычислению энергии основного уровня АО. VPT-ряд для функции Грина $G_4(0)$ может быть записан в виде

$$G_4(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(n-m)!} \left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-m} \langle g_m(z^2) [1 + iu \theta \sqrt{1-\alpha}]^{-2-2m} \rangle, \tag{3.21}$$

где

$$g_m(z^2) = \frac{(-1)^m}{m!} \int D\varphi \varphi^4(0) \exp[-(S_0 + z^{-2}/2S_2)],$$

$$z^2 = [\omega^2 + iu \chi \sqrt{1-\alpha}] [1 + iu \theta \sqrt{1-\alpha}]^{-1},$$

$$\langle \dots \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{4}\right\} (\dots). \tag{3.22}$$

После дифференцирования в (3.21) по α следует положить $\alpha = 0$. Функции $g_m(z^2)$ есть обычные коэффициенты разложения $G_4(0)$ в ряд теории возмущений, и они могут быть найдены с помощью стандартной диаграммной техники. Из (3.21) видно, что N -й порядок VPT формирует те же диаграммы, что и N -й порядок обычной теории возмущений. При этом, конечно, изменятся структура ряда и модифицируется вид пропагатора. Функции $g_m(z^2)$ нетрудно выразить через коэффициенты разло-

жения A_n энергии основного уровня АО E_0 в ряд теории возмущений. Соответствующая связь определяется выражением

$$g_m(z^2) = \frac{(1+m)A_{1+m}}{z^{2+3m}}. \quad (3.23)$$

Численные значения коэффициентов A_n могут быть найдены, например, в работах [41,42]. Для рассматриваемого здесь первого нетривиального порядка нужны следующие коэффициенты: $A_1 = 3/4$ и $A_2 = -21/8$.

Далее удобно, используя выражение

$$a^{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^{\nu-1} \exp(-a\alpha),$$

записать (3.21) в виде

$$G_4(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1+m)A_{1+m}}{(n-m)!} [\Gamma(1+m/2) \Gamma(1+3m/2)]^{-1} \times \\ \times \left(\frac{d}{d\alpha}\right)^{n-m} F_m(\theta, \chi, \alpha), \quad (3.24)$$

где

$$F_m(\theta, \chi, \alpha) = \int_0^{\infty} dx x^{m/2} \exp(-x) \int_0^{\infty} dy y^{3m/2} \times \\ \times \exp[-\omega^2 y - (1-\alpha)(x\theta + y\chi)]. \quad (3.25)$$

В пределе сильной связи можно положить в (3.25) $\omega^2 = 0$. Однако заметим, что, разлагая выражение $\exp(-\omega^2 y)$ по степеням ω^2 , можно вычислить и соответствующие поправки к основному вкладу.

Из (3.24) и (3.25) в пределе сильной связи в N -м порядке VPT находим

$$E_0^{(N)} = 3g^{1/3} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{(1+m)A_{1+m}}{(n-m)!} \left(\frac{16}{9}\theta\right)^{1/3+m/2} \times \\ \times [\Gamma(1+m/2) \Gamma(1+3m/2)]^{-1} R_{n,m}(\theta), \quad (3.26)$$

где

$$R_{n,m}(\theta) = \int_0^{\infty} dx x^{m/2} \exp(-x) \times \\ \times \int_0^{\infty} dy y^{3m/2} (\theta x + y)^{2(n-m)} \exp[-(\theta x + y)^2]. \quad (3.27)$$

Оптимальное значение параметра θ в различных версиях процедуры оптимизации (см. [27,28]) $\theta_{1,2} \ll 1$. Используя этот факт, в первом порядке VPT находим

$$E_0^{(1)} = g^{1/3}(\epsilon_0 + \epsilon_1), \quad (3.28)$$

где

$$\epsilon_0 = \frac{3}{2} A_1 \sqrt{\pi} x^2, \quad (3.29)$$

$$\epsilon_1 = \frac{3}{4} A_1 \sqrt{\pi} x^2 + \frac{4\Gamma(5/4)}{\sqrt{\pi}} A_2 x^5, \quad (3.30)$$

$$x = \left(\frac{16}{9} \theta\right)^{1/6}. \quad (3.31)$$

Применяя «принцип минимальной чувствительности» [24,35] $\partial E_0^{(1)}/dx = 0$, находим $x_{\text{opt}} = 0,6062$ и $E_0^{(1)}(x_{\text{opt}}) = 0,660g^{1/3}$. Численное значение $E_{\text{exact}} = 0,668g^{1/3}$ [42]. Более точный расчет для φ^{2k} АО [29], не опирающийся на малость θ , приведен в таблице, где указаны также оптимальные значения параметра θ .

Таблица. Энергия основного уровня φ^{2k} ангармонического осциллятора

k	θ	$E_0^{\text{exact}} [g]$	$E_0^{(1)} [g]$
2	0,027926	$0,668g^{1/3}$	$0,663g^{1/3}$
3	0,038009	$0,680g^{1/4}$	$0,698g^{1/4}$
4	0,040149	$0,704g^{1/5}$	$0,709g^{1/5}$

Для нахождения поправок к основному вкладу выполним разложение по ω^2 в (3.25). В результате получаем

$$E_0^{(1)} = g^{1/3}(0,663 + 0,1407\omega^2 - 0,0085\omega^4 + \dots).$$

Для сравнения приведем численный результат [42]:

$$E_0^{\text{ex}} = g^{1/3}(0,668 + 0,1437\omega^2 - 0,0088\omega^4 + \dots).$$

Вычислим теперь массовый параметр μ^2 , связанный с двухточечной функцией Грина соотношением $\mu^{-2} = G_2(p=0)$, где

$$G_2(p=0) = \int dt \int D\varphi \varphi(t/2) \varphi(-t/2) \exp(-S[\varphi]). \quad (3.32)$$

Полученный результат будем сравнивать с соответствующим численным значением [43]:

$$\mu_{\text{exact}}^2 = 3,009g^{2/3}. \quad (3.33)$$

VPT-разложение в этом случае имеет вид

$$G_2(0) = g^{-2/3} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(n+1/2-m/4)}{(n-m)!} \frac{B_m}{\Gamma(1+3m/2)} x^{2+3m}, \quad (3.34)$$

где B_m — безразмерные коэффициенты теории возмущений. Здесь мы будем использовать значения $B_0 = 1$ и $B_1 = -6$. В первом порядке VPT из (3.34) находим

$$G_2^{(1)} = g^{-2/3}(G_{20} + G_{21}),$$

где

$$G_{20} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^2, \quad (3.35)$$

$$G_{21} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} x^2 - 4\Gamma(5/4)x^5. \quad (3.36)$$

Применяя принцип минимальной чувствительности ($\partial G_2^{(1)}/\partial x = 0$), получаем значение $\mu^2 = 3,078g^{2/3}$, которое следует сравнить с (3.33).

С помощью пропагатора $G_2(p)$ можно вычислить также вакуумную энергию [28,29]. Кроме того, можно оценить энергию первого уровня. Для этого определим величину $\mu_1 = E_1 - E_0$, для которой, используя спектральное представление

$$G_2(p) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{p^2 + \mu_n^2} |\langle 0|\hat{x}|n\rangle|^2, \quad (3.37)$$

где матричные элементы оператора координаты вычисляются для собственных состояний полного гамильтониана, получаем оценку

$$\mu_1 \leq \mu_1^{(+)}, \quad \mu_1^{(+)} = 2 \frac{G_2(t=0)}{G_2(p=0)}. \quad (3.38)$$

По аналогии с правилами сумм в квантовой механике [44] можно ожидать достаточно быстрого насыщения спектрального представления (3.37). В этом случае величины μ_1 и $\mu_1^{(+)}$ должны быть близки друг к другу. В первом порядке VPT находим $\mu_1^{(+)} = 1,763g^{1/3}$, в то время как численное значение $\mu_1^{\text{exact}} = 1,726g^{1/3}$ [42].

В заключение этого раздела отметим, что в рамках VPT-метода может быть построен непertурбативный эффективный потенциал [27,28]. Обобщение АО на случай φ^{2k} можно найти в работах [29,32].

4. ГАУССОВ ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

К числу распространенных непertурбативных методов относится метод гауссова эффективного потенциала (GEP) [23—26]. Как и для многих иных непertурбативных подходов, для метода GEP важным является вопрос об области применимости и надежности получаемых результатов. Другими словами, вопрос состоит в том, в какой мере основной вклад, вычисляемый вариационным путем, адекватно описывает рассматриваемую величину. Таким образом, первостепенное значение приобретает наличие алгоритма вычисления поправок к основному вариационному вкладу. В этом отношении метод GEP выгодно выделяется (см. [24,25]) в ряду других непertурбативных подходов вариационного типа.

Следует отметить, однако, что сама по себе возможность вычисления поправок еще недостаточна для решения вопроса об устойчивости результатов. Здесь особую роль играют свойства сходимости ряда. Действительно, если в теории имеется малый параметр — константа связи, то даже расходящийся ряд теории возмущений может давать полезную информацию в области малых значений констант связи. Иная картина возникает, когда такого малого параметра нет, и он не появляется некоторым эффективным образом. В таком случае мы можем рассчитывать на достоверность результатов только тогда, когда имеем дело со сходящимися рядами. Таким образом, в непertурбативных подходах задача вычисления поправок к основному вкладу и задача анализа свойств сходимости ряда должны сопутствовать друг другу.

В данном разделе мы рассмотрим метод VPT для $\lambda\varphi^4$ -теории в пространстве n измерений. Как было понятно из предыдущего, в VPT-подходе искомая величина с самого начала записывается в виде ряда, который определяет алгоритм вычисления поправок любого порядка. Важным в техническом плане является тот факт, что ряды VPT удается построить таким образом, что N -й порядок VPT-аппроксимации использует лишь те фейнмановские диаграммы, которые формируют тот же N -й порядок стандартной теории возмущений. Присутствие в методе свободных параметров вариационного типа позволяет с помощью их выбора влиять на свойства сходимости рядов VPT. Будем ориентироваться на взаимосвязь методов VPT и GEP. Мы предложим несколько способов вывода GEP в

рамках VPT. Во всех рассматриваемых вариантах GEP возникает как первый нетривиальный порядок VPT. При этом, однако, соответствующие ряды VPT обладают существенно различными свойствами сходимости.

Вначале применим метод VPT для вариационной коррекции квазиклассического приближения. Функционал действия имеет вид (псевдо-евклидова метрика)

$$S[\varphi] = S_0[\varphi] - \frac{m^2}{2} S_2[\varphi] - \lambda S_4[\varphi], \quad (4.1)$$

где

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2} \int dx (\partial\varphi)^2, \quad (4.2)$$

$$S_p[\varphi] = \int dx \varphi^p. \quad (4.3)$$

В дальнейшем мы будем иметь в виду размерную регуляризацию, полагая $n = d - 2\varepsilon$, где d — целое число. Как обычно, выделим классический вклад в производящем функционале функций Грина $W[J]$, записав

$$W[J] = \int D\varphi \exp\{i[S[\varphi] + \langle J\varphi \rangle]\} = \exp\{i[S[\varphi_c] + \langle J\varphi_c \rangle]\} D[J], \quad (4.4)$$

где

$$D[J] = \int D\varphi \exp\{-iP[\varphi]\}, \quad (4.5)$$

$$P[\varphi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \varphi (\partial^2 + m^2 + 12\lambda\varphi_c^2) \varphi + 4\lambda\varphi_c\varphi^3 + \lambda\varphi^4 \right]. \quad (4.6)$$

Функция φ_c подчиняется классическому уравнению движения

$$\delta S / \delta \varphi_c = -J.$$

В стандартном квазиклассическом приближении в выражении величины $P[\varphi]$ оставляют только квадратичные по полям φ слагаемые. Функциональный интеграл для $D[J]$ в этом случае становится гауссовым, и для $W[J]$ возникает обычное однопетлевое представление [45].

Для вычисления величины $D[J]$ методом VPT применим вначале гармонический способ варьирования. Представим функционал $P[\varphi]$ в виде

$$P[\varphi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \varphi (\partial^2 + z^2) \varphi + \lambda (4\varphi_c\varphi^3 + \varphi^4 - \frac{\chi^2}{2} \varphi^2) \right], \quad (4.7)$$

где

$$z^2 = m^2 + 12\lambda\varphi_c^2 + \lambda\chi^2.$$

Тогда VPT для $D[J]$ запишется следующим образом:

$$D|J\rangle = \left[\det \frac{\partial^2 + z^2}{\partial^2} \right]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{n!} \times \\ \times \left[\int dx \left(4\varphi_c \widehat{\varphi}^3 + \widehat{\varphi}^4 - \frac{\chi^2}{2} \widehat{\varphi}^2 \right) \right]^n \exp \left[-\frac{i}{2} \langle j \Delta j \rangle \right]_{j=0}, \quad (4.8)$$

где

$$\Delta(p) = (p^2 - z^2 + i0)^{-1}, \\ \widehat{\varphi}(x) = i \frac{\delta}{\delta j(x)}.$$

Ограничимся в выражении (8) первыми двумя слагаемыми. Их вклад в эффективный потенциал соответственно равен

$$V_0 = \frac{1}{n} z^2 \Delta_0(z^2), \quad (4.9)$$

$$V_1 = \lambda \left[3\Delta_0^2(z^2) - \frac{\chi^2}{2} \Delta_0(z^2) \right], \quad (4.10)$$

где

$$\Delta_0(z^2) = \mu^{2\epsilon} \frac{\Gamma(1 - n/2)}{(4\pi)^{n/2}} (z^2)^{n/2-1} \quad (4.11)$$

— евклидов пропагатор $\Delta(x=0, z^2)$ в размерной регуляризации. Условие оптимизации

$$\frac{d(V_0 + V_1)}{dz^2} = 0$$

дает уравнение для вариационного параметра

$$z^2 = m^2 + 12\lambda\varphi^2 + 12\lambda\Delta_0(z^2). \quad (4.12)$$

С учетом (4.12) для эффективного потенциала в рассматриваемом порядке VPT находим

$$V_{\text{eff}}(\varphi) = V_{\text{cl}} + V_0 + V_1 = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \lambda \varphi^4 + \frac{1}{n} z^2 \Delta_0(z^2) + \\ + \frac{1}{2} (m^2 - z^2) \Delta_0(z^2) + \lambda [3\Delta_0^2(z^2) + 6\varphi^2 \Delta_0(z^2)]. \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) с учетом условия оптимизации (4.12), как нетрудно убедиться, совпадает с GER в пространстве n измерений [26].

Вычислим теперь величину $D[J]$, используя ангармоническое варьирование функционала действия. Вариационную добавку выберем в виде $R^2[\varphi]$, где

$$R[\varphi] = \frac{\chi}{2\Omega^{1/2}} \int dx \varphi^2(x).$$

Появление здесь объема координатного пространства Ω связано с тем, что для получения V_{eff} из эффективного действия требуются постоянные конфигурации поля. Вышеуказанный выбор VPT-функционала обеспечивает независимость вариационного параметра χ от Ω .

В результате получаем

$$D[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int D\varphi \left[\lambda \int dx (\varphi^4 + 4\varphi_c \varphi^3) - R^2[\varphi] \right]^n \times \\ \times \exp \left\{ -i \left[\frac{1}{2} \int dx \varphi (\partial^2 + m^2 + 12\lambda \varphi_c^2) \varphi + R^2[\varphi] \right] \right\}. \quad (4.14)$$

Любую степень $R^2[\varphi]$ в выражении (4.14) можно набрать с помощью необходимого числа дифференцирований выражения $\exp(-i \epsilon R^2[\varphi])$ по параметру ϵ , полагая затем $\epsilon = 1$. Что касается слагаемого $R^2[\varphi]$ в показателе экспоненты, делающего функциональный интеграл негауссовым, то вопрос опять-таки решается с помощью фурье-преобразования, в результате которого в экспоненте возникает первая степень $R[\varphi]$.

Таким образом, ряд VPT запишется в виде

$$D[J] = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^{n-k}}{(n-k)! n!} \left[\frac{d}{d\epsilon} \right]^{n-k} \times \\ \times \sqrt{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\sqrt{\pi}} \exp \left\{ i \Omega \frac{v^2}{4} - i \frac{\pi}{4} \right\} \left[\det \frac{\partial^2 + M^2}{\partial^2} \right]^{-1/2} \times \\ \times \left[\lambda \int dx (4\varphi_c \hat{\varphi}^3 + \hat{\varphi}^4) \right]^k \exp \left[-\frac{i}{2} \langle j \Delta j \rangle \right]_{j=0}, \quad (4.15)$$

где

$$M^2 = m^2 + 12\lambda \varphi_c^2 + \sqrt{\epsilon} \chi v.$$

Интеграл по v в (4.15) содержит большой параметр Ω и, следовательно, может быть вычислен методом стационарной фазы. В результате эффективный потенциал в первом нетривиальном порядке VPT имеет вид

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}} &= V_c + V_0 + V_1, \\
 V_0 &= \frac{1}{n} M^2 \Delta_0 - \frac{\chi^2}{4} \Delta_0^2, \\
 V_1 &= -\frac{\chi^2}{4} \Delta_0^2 + 3 \lambda \Delta_0^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Здесь M^2 — массовый параметр при $\varepsilon = 1$ и $v = v_0$, где v_0 — точка стационарной фазы в интеграле (4.15). Уравнение, которому он подчиняется, имеет вид

$$M^2 = m^2 + 12 \lambda \varphi^2 + \chi^2 \Delta_0(M^2). \tag{4.17}$$

Различные версии оптимизации, как требование $\min |V_1|$ (в данном случае существует решение уравнения $V_1 = 0$), так и принцип минимальной чувствительности $\partial V_{\text{eff}} / \partial \chi^2 = 0$, приводят к одному и тому же значению вариационного параметра $\chi^2 = 12\lambda$.

В результате эффективный потенциал (4.16) вместе с условием (4.17) дают GER. Получим GER еще одним способом, который не опирается на представление (4.4), а непосредственно оперирует с исходным функционалом $W[j]$. Будем рассматривать двухпараметрическую вариационную добавку к действию ангармонического типа:

$$Q[\varphi] = \frac{a^2}{\Omega} S_2^2[\varphi] + \frac{b^4}{\Omega^3} S_1^4[\varphi]. \tag{4.18}$$

Ряд VPT для производящего функционала $W[j]$ запишется в виде

$$\begin{aligned}
 W[j] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int D\varphi |Q[\varphi] - \lambda S_4[\varphi]|^n \times \\
 &\times \exp \left\{ i \left[S_0 - m^2 S_2 - \varepsilon \frac{a^2}{\Omega} S_2^2 - \theta \frac{b^4}{\Omega^3} S_1^4 + \langle j \varphi \rangle \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Параметры ε и θ введены здесь для того, чтобы выражения в предэкспоненте, связанные с S_1 и S_2 , можно было бы набирать с помощью дифференцирования по этим параметрам. В окончательном результате следует положить $\varepsilon = 1$ и $\theta = 1$. В этом случае в функциональном интеграле в предэкспоненте остаются только степени действия взаимодействия λS_4 . Выражение в экспоненте в (4.19) приводится к квадратичной по полям форме с помощью преобразования Фурье. В результате (4.19) запишется в виде

$$W[j] = \Omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{dq}{2\pi} \exp \{ i \Omega [px - qy - p^2 - q^4] \} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{i^{n-k}}{m!(n-k-m)!} \left(i \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)^m \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^{n-k-m} \times$$

$$\times \left[\det \frac{\partial^2 + M^2}{\partial^2} \right]^{-1/2} w_k [J, M^2], \quad (4.20)$$

где

$$M^2 = m^2 + \sqrt{\varepsilon} ax, \quad J = j + \theta^{1/4} by,$$

и $w_k [J, M^2]$ — коэффициенты ряда теории возмущений для производящего функционала $W[j]$. Для вычисления $w_k [J, M^2]$ могут быть использованы стандартные фейнмановские правила с массовым параметром M^2 в пропагаторе.

В первом нетривиальном порядке для производящего функционала связанных функций Грина

$$Z[j] = (i\Omega)^{-1} \ln W[j]$$

находим

$$Z^{(1)} = jx - \frac{1}{2} m^2 x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) m^2 y \Delta_0(m^2 y) -$$

$$- \frac{1}{2} m^2 \Delta_0(m^2 y) - \lambda [3\Delta_0^2(m^2 y) + 6\Delta_0(m^2 y) x^2 + x^4], \quad (4.21)$$

где

$$x = \frac{j}{M^2}, \quad y = \frac{M^2}{m^2}.$$

Условие оптимизации $\partial Z^{(1)}/\partial x = 0$ приводит к уравнению

$$m^2 x = 4\lambda x (3\Delta_0 + x^2) = j. \quad (4.22)$$

Аналогично для параметра y , требуя $\partial Z^{(1)}/\partial y = 0$, получаем

$$m^2(y - 1) = 12\lambda(\Delta_0 + x^2). \quad (4.23)$$

Используя (4.22) и (4.23), находим

$$\varphi = \frac{dZ^{(1)}}{dj} = \frac{\partial Z^{(1)}}{\partial j} = x.$$

Для эффективного потенциала $V_{\text{eff}} = j\varphi - Z$ окончательно получим

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right) M^2 \Delta_0(M^2) + \frac{1}{2} m^2 \Delta_0(M^2) +$$

$$+ \lambda [3\Delta_0^2(M^2) + 6\Delta_0(M^2)\varphi^2 + \varphi^4]. \quad (4.24)$$

Выражение (4.24), как легко видеть, совпадает с GEP.

Все вышеприведенные в этом разделе способы построения рядов VPT для эффективного потенциала были нацелены на то, чтобы первый нетривиальный порядок VPT приводил к GEP. Однако свойства рядов, несмотря на один и тот же результат в первом порядке, различны. Мы рассмотрим этот вопрос в следующем разделе, а в заключение отметим, что новый взгляд на проблему перенормировки GEP можно найти в работах [46—50].

5. СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ РЯДОВ VPT

Рассмотрим теперь безмассовую φ^4 -теорию в четырехмерном евклидовом пространстве с действием

$$S[\varphi] = S_0[\varphi] + \lambda S_4[\varphi]. \quad (5.1)$$

Построим ряд VPT для вакуумного функционала

$$W[0] = \int D\varphi \exp \{-S[\varphi]\}. \quad (5.2)$$

Обобщение метода на случай функций Грина не представляет труда. В качестве вариационной добавки будем использовать функционал ангармонического вида

$$\tilde{S}[\varphi] = \theta^2 S_0^2[\varphi]. \quad (5.3)$$

Тогда ряд VPT для величины (5.2) запишется следующим образом:

$$W[0] = \sum_{n=0}^{\infty} W_n[0, \theta],$$

$$W_n[0, \theta] = \frac{(-1)^n}{n!} \int D\varphi \exp \{-S_{\text{eff}}[\varphi, n]\}, \quad (5.4)$$

где

$$S_{\text{eff}}[\varphi, n] = S_0[\varphi] + \theta^2 S_0^2[\varphi] - n \ln \{\lambda S_4[\varphi] - \theta^2 S_0^2[\varphi]\}. \quad (5.5)$$

Основной вклад в асимптотику дальних членов ряда дают те конфигурации полей, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}[\varphi_0, n]}{\delta \varphi_0(x)} = 0. \quad (5.6)$$

Варируя (5.5), получаем

$$-\partial^2 \varphi_0 + \frac{a}{3!} \varphi_0^3 = 0, \quad (5.7)$$

где

$$a = \frac{-4! \lambda n}{D[\varphi_0] + 2\theta^2 S_0[\varphi_0](n + D[\varphi_0])}, \quad (5.8)$$

$$D[\varphi] = \lambda S_4[\varphi] - \theta^2 S_0^2[\varphi]. \quad (5.9)$$

Необходимое нам решение уравнения (5.7) имеет вид

$$\varphi_0(x) = \pm \sqrt{\frac{48}{a}} \frac{\mu}{(x - x_0)^2 + \mu^2}. \quad (5.10)$$

Произвольные параметры x_0 и μ отражают трансляционную и масштабную инвариантность рассматриваемой модели.

Далее удобно определить новые переменные, положив

$$g = 4C_s \lambda, \quad \theta^2 = g\chi. \quad (5.11)$$

Здесь $C_s = 4!/(16\pi)^2$ представляет собой константу, фигурирующую в неравенстве Соболева (см., например, [51,52]):

$$S_4[\varphi] \leq 4C_s S_0^2[\varphi]. \quad (5.12)$$

Для функционала (5.9) на функциях (5.10) находим

$$D[\varphi_0] = 4 \frac{(16\pi^2)^2}{a^2} g(1 - \chi). \quad (5.13)$$

Подставляя значение $S_0[\varphi]$ и (5.13) в (5.8), получим уравнение для параметра a , решение которого имеет вид

$$a = \{\sqrt{b^2/4 + nb} - b/2\}^{-1},$$

$$b = [(32/\pi^2)^2 g\chi]^{-1}. \quad (5.14)$$

В пределе больших номеров n находим

$$D[\varphi_0] \sim n(1 - \chi)/\chi. \quad (5.15)$$

Тогда в ведущем порядке по n получим

$$W_n[0, \theta] \sim \frac{(-1)^n}{n!} n^n \left(\frac{1 - \chi}{\chi}\right)^n \exp\{-n\}. \quad (5.16)$$

Учет следующих порядков по n , в том числе функционального детерминанта, приводит к появлению в (5.16) зависящего от n мультипликативного фактора, который не является доминирующим и не оказывает влияния на свойства сходимости ряда.

Из выражения (5.16) видно, что независимо от значений константы связи g ряд VPT абсолютно сходится при $\chi > 1/2$. Причем, как следует из

неравенства Соболева (5.12), при $\chi > 1$ ряд VPT является знакоположительным. При $1/2 < \chi < 1$ члены ряда при больших n образуют ряд Лейбница. Здесь опять-таки значение $\chi = 1$ соответствует как смене режима ряда, так и его асимптотической оптимизации.

Рассмотрим теперь двухпараметрическую VPT в пространстве произвольного числа измерений. Из предыдущего анализа видно, что член с источником в действии, предэкспоненциальный полиномиальный фактор в функциональном интеграле типа $\{\varphi^{2\nu}\}$, а также массовый член, с точки зрения изучения свойств сходимости, ничего принципиального не привносят. Поэтому ограничимся здесь рассмотрением вакуумного функционала, для которого члены ряда VPT имеют вид

$$J_k = \frac{1}{k!} \int D\varphi (A^2|\varphi| - S_4|\varphi|)^k \exp [-(S_0|\varphi| + A^2|\varphi|)], \quad (5.17)$$

где $A|\varphi|$ определен согласно (3.9). Выполняя замену $\varphi \rightarrow k^{1/4}\varphi$, получаем

$$J_k = \frac{k^k}{k!} I_k, \quad (5.18)$$

$$I_k = \int D\varphi \exp (-kS_{\text{eff}}|\varphi| - k^{1/2}S_0|\varphi|), \quad (5.19)$$

где

$$S_{\text{eff}}|\varphi| = A^2|\varphi| - \ln D|\varphi|, \quad (5.20)$$

$$D|\varphi| = A^2|\varphi| - S_4|\varphi|. \quad (5.21)$$

Основной вклад в функциональный интеграл (5.19) дадут такие конфигурации полей φ_0 , которые минимизируют эффективное действие (5.20).

Соответствующее уравнение имеет вид

$$-\partial^2\varphi_0 + a\varphi_0 - b\varphi_0^3 = 0, \quad (5.22)$$

где

$$a = \chi/\theta, \quad (5.23)$$

$$b = 2|\theta A|\varphi_0|(1 - D|\varphi_0|)^{-1}. \quad (5.24)$$

Удобно перейти к функции $f(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$[-\partial^2 + 1]f(x) - f^3(x) = 0 \quad (5.25)$$

и связанной с функцией $\varphi_0(x)$ соотношением

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{a}{b}} f(\sqrt{a}x). \quad (5.26)$$

Определим зависящую от размерности пространства константу [2]:

$$C = \int dx f^4(x). \quad (5.27)$$

В [2] было показано, что абсолютный минимум полного действия достигается на сферически-симметричных решениях уравнения движения. Используя этот результат, а также уравнение (5.22), можно показать, что в рассматриваемом случае минимум S_{eff} также достигается на сферически-симметричных решениях. Константа (5.27) в принципе может быть вычислена (см. [2]), однако для наших целей ее значение не существенно.

Для функционалов $S_4[\varphi_0]$ и $A^2[\varphi_0]$ находим

$$S_4[\varphi_0] = \alpha/b^2, \quad (5.28)$$

$$A^2[\varphi_0] = \alpha^2 \tau / b^2, \quad (5.29)$$

где α и τ определены следующим образом:

$$\alpha = C a^{2-n/2}, \quad (5.30)$$

$$\tau = \theta^2/4. \quad (5.31)$$

Три параметра α , b и τ , как следует из (5.24), связаны соотношением

$$\alpha \tau (1 - D[\varphi_0]) = 1, \quad (5.32)$$

где

$$D[\varphi_0] = \alpha (\alpha \tau - 1) / b^2. \quad (5.33)$$

Таким образом, как и ранее, только два параметра остаются независимыми. В ведущем порядке по k для (5.17) находим

$$J_k \sim k^{-1/2} D^k[\varphi_0] \exp\{-k [A^2[\varphi_0] - 1]\}. \quad (5.34)$$

Используя уравнение (5.22), можно убедиться, что $A[\varphi_0] = 1$. Область изменения параметров, в которой ряд VPT сходится, определяется неравенством

$$|D[\varphi_0]| < 1. \quad (5.35)$$

Наилучший выбор вариационных параметров, при которых вклад дальних членов ряда минимален (метод асимптотической оптимизации [28,30]), соответствует условию $D[\varphi_0] = 0$, которое приводит к соотношению $\alpha \tau = 1$. Оставшийся независимый параметр фиксируется оптимизацией сумм первых членов ряда VPT. Условие асимптотической оптимизации для исходных параметров θ и χ записывается следующим образом:

$$\chi = \left(\frac{16}{\theta^n C^2} \right)^{\frac{1}{4-n}}. \quad (5.36)$$

В частности, в одномерном случае, соответствующем ангармоническому осциллятору, $C = 16/3$ и условие (5.36) переходит в (3.20).

6. НЕПЕРТУРБАТИВНАЯ β -ФУНКЦИЯ В $\varphi_{(4)}^4$ -МОДЕЛИ

В данном разделе мы рассмотрим процедуру перенормировки в методе VPT на примере скалярной модели теории поля. Наше изложение основано на работе [33]. Для безмассовой $\varphi_{(4)}^4$ -модели в четырех измерениях евклидово действие имеет вид

$$S[\varphi] = S_0[\varphi] + S_I[\varphi], \quad (6.1)$$

где

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2} \int dx \varphi(-\partial^2)\varphi, \quad (6.2)$$

$$S_I[\varphi] = \frac{(4\pi)^2}{4!} g \int dx \varphi^4. \quad (6.3)$$

Как хорошо известно, ряд теории возмущений для производящего функционала функций Грина

$$W[J] = \int D\varphi \exp \{ - S[\varphi] + \int dx J \cdot \varphi \} \quad (6.4)$$

расходится, и функция $W[J]$ как функция константы связи g не является аналитической в окрестности $g = 0$. Конкретное асимптотическое поведение дальних членов ряда теории возмущений может быть установлено с помощью метода функционального перевала [4]. Большим перевальным параметром при этом может служить номер рассматриваемого члена ряда. Главный вклад определяется такими конфигурациями, которые отвечают большим полям, пропорциональным положительной степени перевального параметра. Ясно, что в этом случае действие взаимодействия (6.3) не может рассматриваться как малое возмущение свободного действия (6.2).

Как мы видели в предыдущих разделах, в методе VPT в рамках исходной динамики строится новое действие взаимодействия S'_I и, соответственно, новое свободное действие S'_0 . При этом такое разбиение осуществляется с некоторыми параметрами вариационного типа. Подстройка этих параметров осуществляется таким образом, чтобы улучшить свойства сходимости ряда VPT. Как было показано в предыдущем разделе-

ле, существуют такие способы построения VPT, в которых возникающие ряды сходятся в конечной области изменения параметров.

Здесь мы рассмотрим VPT-функционал вида

$$\tilde{S}[\varphi] = \theta^2 S_0^2[\varphi] \quad (6.5)$$

и перепишем полное действие (6.1) в виде

$$S[\varphi] = S'_0[\varphi] + \eta S'_1[\varphi], \quad (6.6)$$

где

$$S'_0[\varphi] = S_0[\varphi] + \tilde{S}[\varphi] \quad (6.7)$$

и

$$S'_1[\varphi] = S_1[\varphi] - \tilde{S}[\varphi]. \quad (6.8)$$

Параметр η мы ввели для удобства. Его степень будет соответствовать порядку VPT, в котором мы работаем. В окончательных выражениях будем полагать $\eta = 1$. Параметр θ^2 в уравнении (6.5) является вариационным параметром. Исходный функционал (6.4) не зависит от этого параметра, поэтому его можно использовать для оптимизации VPT-разложения. В используемой здесь нормировке действия взаимодействия удобно вместо θ^2 ввести параметр t с помощью соотношения

$$\theta^2 = 4C_s \frac{(4\pi)^2}{4!} g \cdot t, \quad (6.9)$$

где $C_s = 4!/(16\pi)^2$ — константа Соболева, фигурирующая в неравенстве (см., например, в связи с этим [2,3,51,52]).

$$\int dx \varphi^4 \leq C_s \left[\int dx \varphi(-\partial^2) \varphi \right]^2. \quad (6.10)$$

Параметр t фиксируем на основе принципа асимптотической оптимизации, рассмотренного в предыдущем разделе. В результате находим $t = 1$ [30].

После разложения по параметру η функциональный интеграл приводится к гауссову виду с помощью преобразования Фурье. В результате для функции Грина $G_{2\nu}$ в N -м порядке VPT получаем

$$G_{2\nu}^{(N)} = \int_0^\infty d\alpha \alpha^{\nu-1} \exp(-\alpha - \theta^2 \alpha^2) \sum_{n=0}^N \eta^n \alpha^{2n} \sum_{k=0}^n \frac{(\theta^2)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{g_{2\nu}^k}{\Gamma(2k+\nu)}. \quad (6.11)$$

Здесь функции $g_{2\nu}^k$ — обычные коэффициенты теории возмущений для функции Грина $G_{2\nu}$. Для их вычисления можно применять стандартные фейнмановские правила.

Следует подчеркнуть, что разложение (6.11) в ряд по степеням константы связи g содержит все степени g . Первые N коэффициентов такого разложения совпадают с соответствующими коэффициентами, вычисленными в N -м порядке теории возмущений.

Перейдем теперь непосредственно к реализации программы перенормировки. Вместо поля φ и константы связи g введем голые величины φ_0 и g_0 . Поля φ_0 и φ связаны соотношением $\varphi_0 = Z^{1/2}\varphi$. Расходящиеся константы Z и g_0 будем вычислять здесь на основе VPT. Константа Z вычисляется по пропагатору G_2 . Для рассматриваемого приближения ее достаточно написать в первом порядке. Используя (6.11), находим

$$Z^{(1)} = \Gamma(1) J_1(\theta_0^2) + \eta \theta_0^2 \Gamma(3) J_3(\theta_0^2), \quad (6.12)$$

где мы определили

$$J_\nu(\theta^2) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{\nu-1} \exp(-\alpha - \alpha^2 \theta^2). \quad (6.13)$$

Функция $J_\nu(\theta^2)$ нормирована условием $J_\nu(0) = 1$.

Для связанной части четырехточечной функции Грина во втором порядке VPT получаем

$$-G_4^{(2)}(\mu^2) = \eta g_0 J_4(\theta_0^2) + \eta^2 \left[g_0 \frac{\theta_0^2}{1!} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(4)} J_6(\theta_0^2) - \frac{3}{2} g_0^2 J_6(\theta_0^2) \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right]. \quad (6.14)$$

В этом выражении мы выписали только расходящуюся часть, которая необходима нам в дальнейшем, и использовали схему с симметричной точкой нормировки μ^2 . Для голой константы связи g_0 выпишем VPT-разложение в виде $g_0 = g(1 + \eta \alpha + \dots)$. Аналогичные разложения следует записать для параметра θ_0^2 и, соответственно, $J_\nu(\theta_0^2)$. Расходящийся коэффициент α определяется из выражений (6.12), (6.14) и требования конечности величины $-Z^2 G_4(\mu^2)$. Если мы теперь изменим точку нормировки $\mu \rightarrow \mu'$ и учтем, что голая константа g_0 от этой точки не зависит, мы придем к взаимосвязи констант g и g' :

$$g' = g + \eta \beta(g) \ln \frac{\mu'^2}{\mu^2}, \quad (6.15)$$

где β -функция

$$\beta(g) = \frac{3}{2} g^2 \frac{J_6(\theta^2)/J_4(\theta^2)}{1 - \theta^2 \{ [\Gamma(6)J_6(\theta^2)/\Gamma(4)J_4(\theta^2)] - 2[\Gamma(3)J_3(\theta^2)/\Gamma(1)J_1(\theta^2)] \}}. \quad (6.16)$$

Параметр θ^2 в (6.16) определяется через константу связи g согласно (6.9) с оптимальным значением $l = 1$.

Разложение β -функции (6.16) в ряд по степеням константы связи содержит все степени g . Интересно сравнить возникающие коэффициенты VPT β -функции (6.16) с известными коэффициентами теории возмущений. Из (6.16) находим

$$\beta(g) = 1,5g^2 - 2,25g^3 + 14,63g^4 - 134,44g^5 + 1456,6g^6 - 17627,2g^7 + \dots \quad (6.17)$$

При проведении перенормировки контрчлены содержали только расходящиеся выражения. В размерной регуляризации это соответствует случаю, когда контрчлены включают в себя только полюсные части (см. [53,54], а также обзор [55]). Соответствующая пертурбативная β -функция в приближении пяти петель имеет вид [56]:

$$\beta_{\text{perturb}}(g) = 1,5g^2 - 2,83g^3 + 16,27g^4 - 135,80g^5 + 1420,68g^6 + \dots \quad (6.18)$$

Отметим, что при вычислении β -функции (6.16) мы использовали лишь низший нетривиальный порядок VPT. Для этого приближения согласие выражений (6.17) и (6.18) вполне приемлемо. В работе [56] на основе суммирования ряда теории возмущений дано также предсказание для шестипетлевого коэффициента пертурбативной β -функции:

$\beta_6 = 17200 \pm 50$. Это значение также согласуется с разложением (6.17).

Как следует из (6.16), β -функция монотонно возрастает с увеличением константы связи g и не имеет ультрафиолетово-стабильной точки (рис.4). Для больших констант

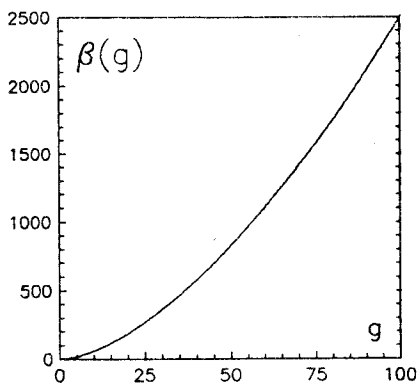


Рис.4. График β -функции, определенной согласно (6.16)

связи асимптотическое поведение β -функции (6.16) следующее:

$$\beta(g) \cong \frac{3}{10} \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3\pi}{8} - 1} g^{3/2}. \quad (6.19)$$

В литературе можно встретить различные предсказания асимптотики β -функции, полученные на основе различных методов. Отметим, например, что степень возрастания β -функции в (6.19) больше, чем линейный рост, найденный в [57], и меньше квадратичного, полученного в [58].

7. ПРИМЕНЕНИЕ К КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

Многочисленные задачи квантовой хромодинамики требуют для своего решения применения непertурбативных методов. В этом направлении предпринимались и предпринимаются значительные усилия, характеризующиеся большим разнообразием подходов. В данном разделе мы рассмотрим применение метода VPT к квантовой хромодинамике как возможный способ проведения вычислений в непertурбативной области. Наше изложение будет основываться на работе [59]. Мы пойдем по пути построения ряда VPT на основе вариационной процедуры гармонического типа (несколько иные возможности обсуждались нами ранее в [60]). Доказать сходимость ряда VPT для квантовой хромодинамики в этом случае пока не представляется возможным. Тем не менее имеются обнадеживающие результаты, полученные в более простых моделях [39,40], относящиеся к индуцированной сходимости [35]. Важной особенностью предлагаемого подхода является возможность построения на основе идей VPT в рамках квантовой хромодинамики нового параметра разложения, который оказывается всегда меньше единицы при любых значениях константы связи.

Чтобы объяснить основную идею метода, рассмотрим чистую теорию Янга — Миллса. Включение кварков в рассмотрение не представляет проблемы. Соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} L_{YM} &= -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2} g F_{\mu\nu} [A_\mu \times A_\nu] - \frac{1}{4} g^2 [A_\mu \times A_\nu]^2 + L_{g.f.} + L_{FP} = \\ &= L_0(A) + gL_3(A) + g^2L_4(A), \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $L_{g.f.}$ — калибровочная добавка и L_{FP} — лагранжиан Фаддеева — Попова.

Выражение $L_3(A)$ генерирует трехглюонные и дух-глюон-дух вершины. Для нас важно, что эти взаимодействия — юкавского типа. Выраже-

ние $L_4(A)$ генерирует четырехглюонные вершины. Введем поля $\chi_{\mu\nu}$ и преобразуем $L_4(A)$ так, чтобы глюонные поля и поля $\chi_{\mu\nu}$ взаимодействовали юкавским образом. Соответствующее преобразование имеет вид

$$\exp\left\{-i\frac{g^2}{4}\int dx[A_\mu \times A_\nu]^2\right\} = \int D\chi \exp\left\{\frac{i}{2}\int dx \chi_{\mu\nu}^2 + i\frac{g}{\sqrt{2}}\int dx \chi_{\mu\nu}[A_\mu \times A_\nu]\right\}. \quad (7.2)$$

Функциональный интеграл в (7.2) нормирован условием

$$\begin{aligned} \int D\chi \exp\left\{\frac{i}{2}\int dx \chi_{\mu\nu}^2(x) + i\int dx \chi_{\mu\nu}(x) J_{\mu\nu}(x)\right\} = \\ = \exp\left\{\frac{i}{2}\int dx dy J_{\mu\nu}(x) \Delta(x,y)_{\mu\nu; \mu_1, \nu_1} J_{\mu_1 \nu_1}(y)\right\}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $\Delta(x,y)$ — пропагатор поля χ :

$$\Delta(x,y)_{\mu\nu; \mu_1, \nu_1}^{ab} = \delta(x-y) \delta_{ab} \delta_{\mu\mu_1} \delta_{\nu\nu_1}. \quad (7.4)$$

Таким образом, функционал действия может быть записан в виде

$$S = S_0(\chi) + S(A, \chi) + S_{\text{YM}}^{\text{Yuk}}(A), \quad (7.5)$$

где

$$S(A, \chi) = \frac{1}{2} \int dx dy A_\mu^a(x) [D^{-1}(x, y | \chi)]_{\mu\nu}^{ab} A_\nu^b(y), \quad (7.6)$$

а $D(x, y | \chi)$ — пропагатор калибровочного поля в поле χ :

$$[D^{-1}(x, y | \chi)]_{\mu\nu}^{ab} = [-\partial^2 g_{\mu\nu} \delta_{ab} + g\sqrt{2} f_{abc} \chi_{\mu\nu}^c + \text{gauge terms}] \delta(x-y). \quad (7.7)$$

Для функции Грина можем записать

$$G(\dots) = \langle G_{\text{Yuk}}(\dots | \chi) \rangle, \quad (7.8)$$

где

$$G_{\text{Yuk}}(\dots | \chi) = \int DA[\dots] \exp\{i[S(A, \chi) + S_{\text{YM}}^{\text{Yuk}}(A)]\}, \quad (7.9)$$

$$\langle \dots \rangle = \int D\chi [\dots] \exp[iS_0(\chi)]. \quad (7.10)$$

Функции Грина $G_{\text{Yuk}}(\dots | \chi)$ определяются только взаимодействиями юкавского типа с глюонным пропагатором $D(x, y | \chi)$. На рис.5,а показан полный глюонный пропагатор $\langle D_{\text{full}}(x, y | \chi) \rangle$. Диаграммы с четырехглюонными вершинами возникают при разложении $D(x, y | \chi)$ в ряд теории возмущений (рис.5,б). Они добавляются к юкавским диаграммам, и возникает стандартное диаграммное представление ряда теории возмущений (рис.5,в).

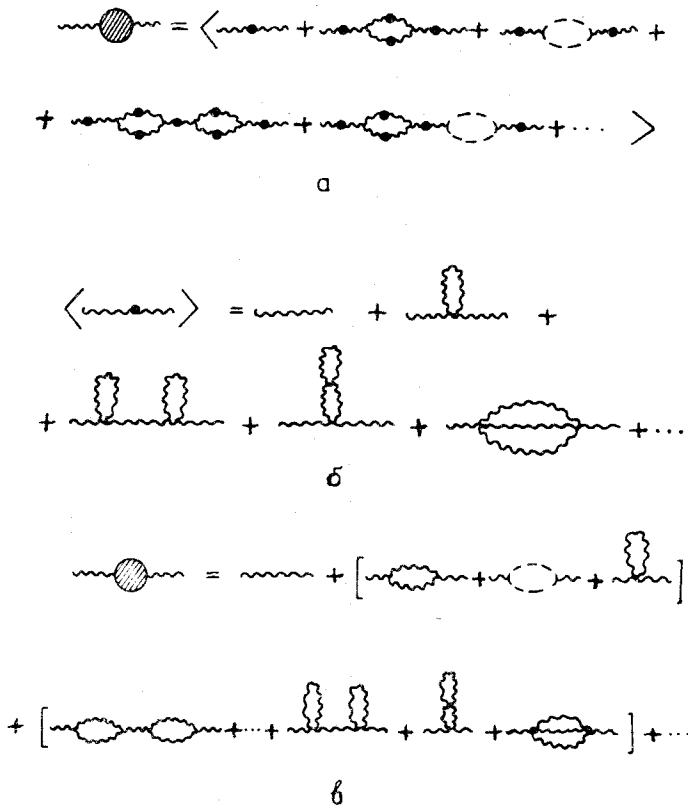


Рис.5. Диаграммное представление полного глюонного пропагатора в теории возмущений с использованием χ -преобразования. Функции $D(\chi)$ отвечает волнистая линия с точкой

Следуя идеям метода VPT, запишем лагранжиан в виде

$$L(A, \chi) = L_0(A, \chi) + L_f(A, \chi),$$

$$L_0(A, \chi) = \zeta^{-1} L(A, \chi) + \xi^{-1} L(\chi),$$

$$L_f(A, \chi) = \eta \lg L_{\text{YM}}^{\text{Yuk}}(A) - (\zeta^{-1} - 1) L(A, \chi) - (\xi^{-1} - 1) L(\chi), \quad (7.11)$$

где ζ и ξ — вариационные параметры. Исходный полный лагранжиан $L(A, \chi)$, конечно, от них не зависит. Поэтому свободу в выборе ζ и ξ можно использовать для получения VPT-разложения с определенными свойствами. Напомним, что здесь мы стремимся к построению нового малого параметра разложения.

Из (7.11) видно, что если для введенных параметров выполняются условия $0 < \zeta < 1$ и $0 < \xi < 1$, то, записав лагранжиан в виде (7.11), мы «ослабим» действие взаимодействия и «усилим» свободное действие. Как и ранее, после всех вычислений положим $\eta = 1$. Этот параметр предусмотрим также в пропагаторе $D(x, y | \chi)$ в комбинации с константой связи. В результате для функции Грина получаем

$$G(\dots) = \sum_n G_n(\dots),$$

$$G(\dots) = \frac{1}{n!} \eta^n \int D\chi DA [\dots] |iS_I(A, \chi)|^n \exp[iS_0(A, \chi)] =$$

$$= (i\eta)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!} \int D\chi DA [\dots] |g S_{YM}^{Yuk}(A)|^k \times$$

$$\times [(\zeta^{-1} - 1)S(A, \chi) + (\xi^{-1} - 1)S(\chi)]^{n-k} \times \exp[iS_0(A, \chi)]. \quad (7.12)$$

Для удобства вычислений переопределим $L_0(A, \chi)$ следующим образом:

$$L_0(A, \chi) \Rightarrow L'_0(A, \chi) = [1 + \kappa (\zeta^{-1} - 1)]L(A, \chi) + [1 + \kappa (\xi^{-1} - 1)]L(\chi). \quad (7.13)$$

После этого любую степень

$$[(\zeta^{-1} - 1)S(A, \chi) + (\xi^{-1} - 1)S(\chi)]$$

в (7.12) можно получить с помощью соответствующего числа дифференцирований выражения $\exp[iS'_0(A, \chi, \kappa)]$ по параметру κ , положив затем $\kappa = 1$.

Таким образом, из (7.12) и (7.13) находим

$$G_n = \eta^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \left(-\frac{\partial}{\partial \kappa} \right)^{n-k} \langle g_k(\kappa) \rangle, \quad (7.14)$$

где функции

$$g_k(\kappa) = \frac{i^k}{k!} \int DA [\dots] |g S_{YM}^{Yuk}(A)|^k \exp\{i[1 + \kappa (\zeta^{-1} - 1)] \int dx L(A, \chi)\} \quad (7.15)$$

строятся на основе юкавских диаграмм теории Янга — Миллса с пропагатором

$$[1 + \kappa (\zeta^{-1} - 1)]^{-1} D(x, y | \chi) \rightarrow \xi D(x, y | \chi)$$

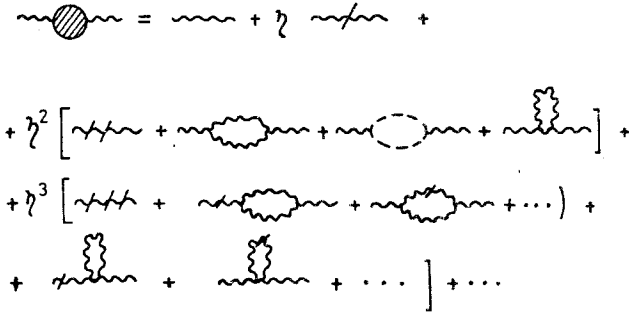


Рис.6. Диаграммы, соответствующие VPT-разложению полного глюонного пропагатора

для $\kappa = 1$. Пропагатор поля χ содержит фактор $[1 + \kappa (\xi^{-1} - 1)]^{-1}$, который переходит в ξ при $\kappa = 1$.

Оператор дифференцирования $\frac{1}{l!} \left(-\frac{\partial}{\partial \kappa}\right)^l$ выбрасывает множитель $(1 - \xi)^l$ для пропагатора глюона и $(1 - \xi)^l$ для пропагатора поля χ .

Нетрудно показать, что N -й порядок ряда VPT совпадает с N -м порядком теории возмущений с точностью $O(g^{N+1})$:

$$G_{\text{VPT}}^{(N)} = \sum_{n=0}^N G_n = G_{\text{PT}}^{(N)} + O(g^{N+1}). \tag{7.16}$$

Поэтому при малых константах связи VPT-разложение приведет к тем же результатам, что и стандартная теория возмущений.

На рис.6 изображены диаграммы для полного пропагатора глюона, соответствующие новому разложению. Перечеркнутая глюонная линия обозначает дифференцирование по параметру κ и содержит, следовательно, фактор $(1 - \xi)$. В том случае, когда глюонная линия возникла с помощью поля χ , соответствующим фактором будет $(1 - \xi)$.

Структура полученного разложения выглядит следующим образом:

$$1 + \eta (1 - \xi) + \eta^2 [(1 - \xi)^2 + g^2 \xi^3 + g^2 \xi] + \\ + \eta^3 [(1 - \xi)^3 + g^2 \xi^3 (1 - \xi) + g^2 \xi (1 - \xi) + g^2 \xi (1 - \xi)] + \dots \tag{7.17}$$

Нетрудно убедиться в сохранении этой структуры и для других функций Грина.

Теперь видно, что если мы выберем

$$\xi = \zeta^3, \quad (1 - \xi)^2 \sim g^2 \zeta^3, \tag{7.18}$$

то мы получим, что n -й член ряда VPT содержит общий множитель $(1 - \zeta)^n$, причем второе условие в (7.18) гарантирует нам выполнение неравенства $(1 - \zeta) < 1$ для всех положительных значений константы связи.

Применяя размерную регуляризацию с $d = 4 - 2\epsilon$, для констант перенормировки Z_{1YM} и Z_{3YM} (соответствующие обозначения см. в [61]) в ведущем порядке VPT находим

$$Z_{1YM} = 1 + \lambda \zeta^3 \left[N \left(\frac{17}{6} - \frac{3}{2} \alpha_G \right) - \frac{4}{3} N_f \right] \frac{1}{2\epsilon}, \quad (7.19)$$

$$Z_{3YM} = 1 + \lambda \zeta^3 \left[N \left(\frac{13}{3} - \alpha_G \right) - \frac{4}{3} N_f \right] \frac{1}{2\epsilon}. \quad (7.20)$$

Здесь мы уже ввели в рассмотрение кварки, которые без труда вписываются в вышеизложенную схему, в силу их юкавского взаимодействия с глюонами. Величина $\lambda = \alpha_s / (4\pi)$ и параметр ζ связаны друг с другом уравнением

$$(1 - \zeta)^2 = C \lambda \zeta^3 \quad (7.21)$$

с положительной константой C .

Из (7.19) и (7.20) находим

$$\lambda_0 = \mu^{2\epsilon} Z_{1YM}^2 Z_{3YM}^{-3} \lambda = \lambda \mu^{2\epsilon} \left[1 - \lambda \zeta^3 \frac{b_0}{\epsilon} \right], \quad (7.22)$$

где $b_0 = 11 - 2/3 N_f$. Откуда для β -функции получаем

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu^2 \frac{\partial \lambda}{\partial \mu^2} = \\ &= -b_0 \left(\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - 1 \right) (\lambda^2 \zeta^3) = -2b_0 \lambda^2 \frac{\zeta^4}{3 - \zeta}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Решая соответствующее ренормгрупповое уравнение, находим

$$\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} = \frac{C}{2b_0} f(\zeta), \quad (7.24)$$

где функция $f(\zeta)$ имеет вид

$$f(\zeta) = \frac{2}{(1 - \zeta)^2} + \frac{12}{1 - \zeta^2} + 21 \ln \frac{\zeta}{1 - \zeta} - \frac{9}{\zeta}. \quad (7.25)$$

Нетрудно видеть, что в пертурбативной области, когда $Q^2 \gg \Lambda^2$ ($\zeta \sim 1$), из (7.21), (7.24) и (7.25) получается хорошо известный однопетлевой результат:

$$\lambda(Q^2) = \frac{1}{b_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}.$$

При уменьшении Q^2 и, соответственно, увеличении $\lambda(Q^2)$ логарифмический рост сменяется степенным: $\lambda(Q^2) \sim Q^{-2}$.

Для построения нерелятивистского кварк-антикваркового потенциала воспользуемся выражением

$$V(r) = -\frac{16\pi}{3} \int \frac{dQ}{(2\pi)^3} \exp(iQr) \frac{\alpha_S(Q^2)}{Q^2}. \quad (7.26)$$

Чтобы найти $V(r)$, аппроксимируем $\alpha_S(Q^2)$ следующим выражением:

$$\alpha_S^{\text{appr}}(Q^2) = \frac{a_1}{Q^2} + \frac{4\pi}{b_0 \ln(a_2 + Q^2/\Lambda^2)} \quad (7.27)$$

с двумя параметрами a_1 и a_2 , которое представляет собой минимальную форму, позволяющую в достаточной мере приблизить найденную $\alpha_S(Q^2)$ в подходящей области Q^2 . Результат такой аппроксимации для $\Lambda_{\text{MS}} = 140$ МэВ, $N_f = 3$ и $C = 0,82$ с параметрами $a_1 = 0,260$ ГэВ² и $a_2 = 897,0$ показан на рис.7. Пересчет Λ_{MS} в применяемую здесь MS-схему осуществлялся по обычной двухпетлевой формуле. Подставив (7.27) в (7.26), получим нерелятивистский кварк-антикварковый потенциал, изображенный на рис.8 сплошной линией. Пунктирной линией отмечен феноменологический потенциал, взятый из работы [62] и согласующийся с мезонной спектроскопией.

Рассмотрим также эффективную кварковую массу. Соответствующая аномальная размерность в нашем приближении имеет вид

$$\gamma_m = 4\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda \xi^3). \quad (7.28)$$

Используя (7.21) и (7.24) и решая уравнение

$$\frac{d \ln m(Q^2)}{d \ln Q^2} = -\gamma_m, \quad (7.29)$$

находим

$$m_r(Q^2) = \hat{m} \left[\frac{b_0}{2\pi} \alpha_S(Q^2) \right]^{4/b_0}, \quad (7.30)$$

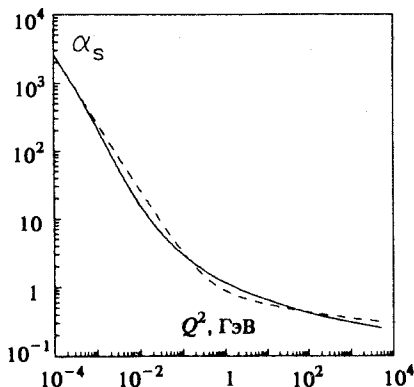


Рис.7. Результат аппроксимации $\alpha_s(Q^2)$ выражением (7.27). Сплошная линия отвечает $\alpha_s(Q^2)$, полученному на основе VPT. Пунктиром показан результат аппроксимации по формуле (7.27)

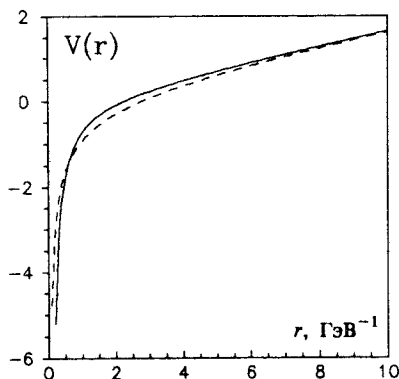


Рис.8. Нерелятивистский потенциал взаимодействия кварков. Сплошная линия — полученный здесь потенциал, пунктирная — феноменологический потенциал [62]

где \hat{m} — ренорминвариантный массовый параметр. Величина $m(Q^2)$ для тех же параметров, которые мы использовали ранее, и для $\hat{m} = 7$ МэВ показана на рис.9.

Сингулярное инфракрасное поведение инвариантного заряда

$$\alpha_s(Q^2) \sim Q^{-2} \quad (7.31)$$

неоднократно обсуждалось в литературе (см., например, обзор [63]). Если в импульсном пространстве записать потенциал взаимодействия кварков в виде

$$V(q^2) = -\frac{16\pi}{3} \frac{\alpha_s(q^2)}{q^2}, \quad (7.32)$$

то такое поведение обеспечит линейный рост потенциала в координатном пространстве $V(r) \sim r$ на больших расстояниях.

Асимптотическое поведение (7.31) связано с асимптотикой β -функции $\beta(\lambda) \rightarrow -\lambda$ при больших константах связи. Такая инфракрасная картина квантовой хромодинамики согласуется с уравнениями Дайсона — Швингера [64] и с решеточными расчетами [65]. Поведение величины $-\beta(\lambda)/\lambda$ для приведенных выше параметров представлено на рис.10, из которого видно, что при больших λ ее значение близко к единице.

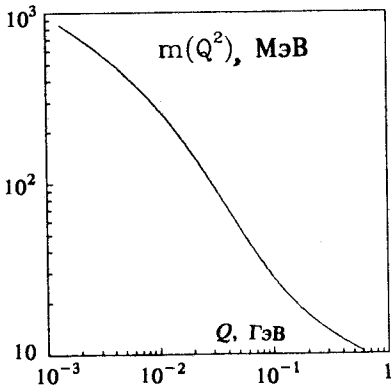


Рис.9. Бегущая масса кварка $m(Q^2)$ как функция Q для $\hat{m} = 7$ МэВ

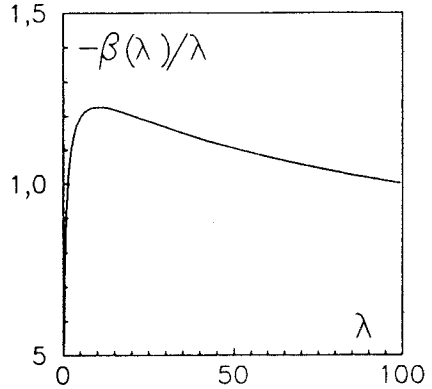
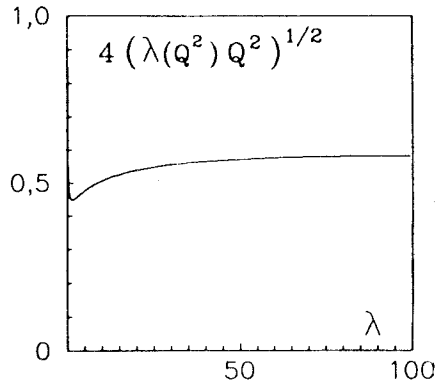


Рис.10. Величина $-\beta(\lambda)/\lambda$ как функция λ

Рис.11. Величина $4\sqrt{Q^2\lambda(Q^2)}$ как функция λ



На рис.11 изображена величина $4\sqrt{Q^2\lambda(Q^2)}$, для которой феноменологическое значение при больших константах связи, вытекающее из мезонной спектроскопии, равно 0,59 ГэВ [63]. Как видно, это значение вполне хорошо просматривается на графике.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен подход к квантовой теории поля, основанный на вариационной теории возмущений. Исходный функционал действия переписывается с помощью некоторой добавки вариационного типа, и применяется разложение по эффективному действию взаимодействия. Таким образом, в отличие от многих непертурбативных подходов, в мето-

де VPT рассматриваемая величина с самого начала представляется в виде некоторого ряда, что позволяет вычислять необходимые поправки. Тем самым метод VPT предоставляет возможность ответить на вопрос, в какой мере основной вклад, определяемый вариационным путем на основе некоторого принципа оптимизации, адекватно отражает рассматриваемую задачу, и какова область применимости полученных результатов.

Возможность проведения вычислений в рамках обсуждаемого подхода основывается на том факте, что метод VPT, так же, как и стандартная теория возмущений, использует лишь гауссовы функциональные квадратуры. При этом, конечно, ряд VPT обладает иной структурой, и, кроме того, модифицируются некоторые фейнмановские правила на уровне пропагаторов и вершин. Вид самих диаграмм при этом не меняется, что в техническом плане весьма существенно. В N -й порядок VPT-разложения вклад дадут диаграммы того же вида, что и в N -й порядок обычной теории возмущений.

Возникающие в методе VPT вариационные параметры позволяют управлять свойствами сходимости ряда VPT. В случае ангармонической вариационной процедуры для φ^4 -теории поля существует конечная область значений параметров, в которой ряд VPT сходится при всех положительных значениях константы связи. При гармонической вариационной процедуре имеются обсуждавшиеся выше указания, что ряд VPT также будет сходиться в смысле так называемой индуцированной сходимости, когда вариационные параметры «подкручиваются» от порядка к порядку. Интересной также представляется возможность построения рядов Лейбница в теории поля. В этом случае первые члены ряда позволяют получить двухсторонние оценки его суммы, а наличие вариационных параметров дает возможность эти оценки в рассматриваемом порядке VPT максимально сузить.

В настоящей работе мы привели различные способы вывода в рамках VPT непертурбативного гауссова эффективного потенциала. Например, он возникает как первое нетривиальное приближение при вариационной коррекции однопетлевого вклада, на основе как гармонической, так и ангармонической вариационной процедуры. Однако свойства возникающих при этом рядов различны. Если оставлять массовый параметр, оптимизирующий эффективный потенциал, фиксированным по первому порядку, что может быть удобно в силу относительной простоты уравнения, которому он удовлетворяет, то сходимость ряда может обеспечить только ангармонический способ введения пробного функционала. Добиться сходимости для гармонической вариационной процедуры можно лишь в смысле индуцированной сходимости, подстраивая вариационный параметр от порядка к порядку. Тем не менее гармонический способ по-

строения VPT благодаря своей простоте и возможности обобщения на другие модели теории поля выглядит весьма привлекательным. Именно его мы выбрали для применения VPT к квантовой хромодинамике.

Предлагаемый подход к квантовой хромодинамике основан на разложении, в котором используется новый малый параметр. Этот параметр подчиняется уравнению, решения которого всегда меньше единицы при любой величине константы связи. Таким образом, оставаясь в рамках применимости такого разложения, можно по сравнению с теорией возмущений продвинуться в область существенно меньших энергий. В данной работе мы рассмотрели лишь первый нетривиальный порядок. Полученные результаты для непертурбативной β -функции и потенциала взаимодействия кварков выглядят обнадеживающими. Конечно, на данный момент остается открытым вопрос об устойчивости этих результатов и об описании в рамках предложенной схемы многих других величин и процессов. Этот вопрос в настоящее время нами изучается. Не забегая вперед, отметим лишь следующие два обстоятельства. Во-первых, для применяемого здесь метода можно рассчитывать на индуцированную сходимость VPT-ряда. Как мы упоминали выше, строгое доказательство такого рода сходимости имеется для простых моделей [39,40]. В случае квантовой хромодинамики предложить строгое доказательство сходимости пока не представляется возможным. Однако наши предварительные расчеты для следующего порядка показывают, что изложенная выше картина сохраняется. Во-вторых, важной особенностью предложенного подхода является тот факт, что для достаточно малых α_S он воспроизводит стандартную теорию возмущений. Таким образом, в нашем методе сохраняется вся высокоэнергетическая физика. При продвижении в область малых энергий, когда обычная теория возмущений перестает работать ($\alpha_S(Q^2) \sim 1$), наш параметр разложения остается все еще малым, и мы не выходим за рамки применимости нашего подхода.

Авторы выражают глубокую благодарность Л.Д.Корсун, О.П.Соловцовой и О.Ю.Шевченко, в соавторстве с которыми были получены некоторые из изложенных здесь результатов. Мы также признательны Б.А.Арбузову, А.М.Балдину, Б.М.Барбашову, А.А.Владимирову, Х.Ф.Джоунсу, Г.В.Ефимову, А.В.Ефремову, М.А.Иванову, В.Г.Кадышевскому, Д.И.Казакову, В.Каллису, А.Л.Катаеву, М.Консоли, Э.А.Кураеву, Ф.М.Льву, Г.И.Лыкасову, О.В.Теряеву, П.М.Стивенсону, Д.В.Ширкову, Н.М.Шумейко за интерес к работе и полезные обсуждения полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-02-3754).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kazakov D.I., Shirkov D.V. — *Fortschr. Phys.*, 1980, vol.28, p.465.
2. Zinn-Justin J. — *Phys.Rep.*, 1981, vol.70, p.109.
3. Zinn-Justin J. — *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Clarendon Press. Oxford, 1989.
4. Липатов Л.Н. — *ЖЭТФ*, 1977, т.72, с.411.
5. Lam C.G. — *Nuovo Cimento*, 1966, vol.A47, p.451.
6. Langer J.S. — *Ann.Phys.*, 1967, vol.44, p.108.
7. Collins J.C., Soper D. — *Ann.Phys.*, 1978, vol.112, p.209.
8. Auberson G. et al. — *Nuovo Cimento*, 1978, vol.A48, p.1.
9. Рид М., Саймон Б. — *Методы современной математической физики. Анализ операторов*. М.: Мир, 1982, т.4.
10. Глимм Дж., Джаффе А. — *Математические методы квантовой физики*. М.: Мир, 1984.
11. Halliday I.J., Suranyi P. — *Phys.Lett.*, 1979, vol.B85, p.421; *Phys.Rev.*, 1980, vol.D21, p.1529.
12. Shaverdyn B.S., Ushveridze A.G. — *Phys.Lett.*, 1983, vol.B123, p.403; Ushveridze A.G. — *Phys.Lett.*, 1984, vol.B142, p.403; Ушверидзе А.Г., Шубитидзе Н.И. — *ЯФ*, 1984, т.40, с.1195.
13. Parisi G. — *Phys.Lett.*, 1977, vol.B69, p.329.
14. Bender C.M. et al. — *Phys.Rev.*, 1979, vol.D19, p.1865; Soto J. — *Nucl.Phys.*, 1989, vol.B316, p.141; Tarrach R. — *Phys.Lett.*, 1991, vol.B262, p.294; Ritschel U. — *Z.Phys.*, 1991, vol.51, p.469; Fried H.M. — *Nucl.Phys.*, 1980, vol.B169, p.329; Abbot R.B. — *Z.Phys.*, 1984, vol.C26, p.393; Ader J.P., Bonner B., Hontebeyrie M. — *Nucl.Phys.*, 1980, vol.B170, p.165.
15. Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталеv О.А. — *ТМФ*, 1972, т.10, с.162; *ТМФ*, 1972, т.11, с.317.
16. Тавхелидзе А.Н., Токарев В.Ф. — *ЭЧАЯ*, 1990, т.21, с.1126; Матвеев В.А., Тавхелидзе А.Н., Шапошников М.Е. — *ТМФ*, 1984, т.59, с.323.
17. Shifman M.A., Vainshtein A.L., Zacharov V.I. — *Nucl.Phys.*, 1979, vol.B147, p.385.
18. Caswell W.E. — *Ann.Phys.*, 1979, vol.123, p.153; Killingbeck J. — *J.Phys.*, 1981, vol.A14, p.1005; Austin E.J., Killingbeck J. — *J.Phys.*, 1982, vol.A15, p.443.
19. Schiff L.I. — *Phys.Rev.*, 1963, vol.130, p.458; Rosen G. — *Phys.Rev.*, 1968, vol.173, p.1632.
20. *Variational Calculation in Quantum Field Theory, Proc. of the Workshop (Wangerooge, Germany, 1987)*, eds. Polley L. and Pottinger E.L. World Scientific, Singapore, 1988.
21. Ефимов Г.В. — *Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий*. М.: Наука, 1985, с.216.
22. Efimov G.V. — *Comm.Math.Phys.*, 1979, vol.65, p.15; Ефимов Г.В., Иванов М.А. — *Препринт ОИЯИ, P2-81-707*, Дубна, 1981.
23. Barnes T., Ghandour G.T. — *Phys.Rev.*, 1980, vol.D22, p.924.
24. Stevenson P.M. — *Phys.Rev.*, 1984, vol.D30, p.1712; *Phys.Rev.*, 1985, vol.D32, p.1389. Hajj G.A., Stevenson P.M. — *Phys.Rev.*, 1988, vol.D37, p.413; Stancu I., Stevenson P.M. — *Phys.Rev.*, 1990, vol.D42, p.2710; Stancu I. — *Phys.Rev.*, 1991, vol.D43, p.1283.
25. Okopinska A. — *Phys.Rev.*, 1987, vol.D35, p.1835; *Phys.Rev.*, 1987, vol.D36, p.1273.
26. Bollini C.G., Giambiagi J.J. — *Nuovo Cim.*, 1986, vol.A93, p.113.
27. Sissakian A.N., Solovtsov I.L. — *Phys.Lett.*, 1991, vol.A157, p.261.
28. Sissakian A.N., Solovtsov I.L. — *Z.Phys.*, 1992, vol.C54, p.263.
29. Корсун Л.Д., Сисакян, А.Н., Соловцов И.Л. — *ТМФ*, 1992, т.90, с.37.
30. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. — *Phys.Lett.*, 1992, vol.B297, p.305.
31. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. — *Phys.Lett.*, 1993, vol.B313, p.367.

32. Korsun L.D., Sissakian A.N., Solovtsov I.L. — *Int.J.Mod.Phys.*, 1993, vol.8, No.29, p.5129.
33. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Solovtsova O.P. — *Phys.Lett.*, 1994, vol.B321, p.381.
34. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1986.
35. Stevenson P.M. — *Nucl.Phys.*, 1984, vol.B231, p.65.
36. Contogouris A.P., Mebarki N. — *Phys.Rev.*, 1989, vol.D39, p.1464.
37. Chyla J., Kataev A.L., Larin S.A. — *Phys.Lett.*, 1991, vol.B267, p.269.
38. Mattingly A.C., Stevenson P.M. — *Phys.Rev.Lett.*, 1992, vol.69, p.1320.
39. Buckley I.R.C., Duncan A., Jones H.F. — *Phys.Rev.*, 1993, vol.D47, p.2554.
40. Duncan A., Jones H.F. — *Phys.Rev.*, 1993, vol.D47, p.2560.
41. Bender C.M., Wu T.T. — *Phys.Rev.*, 1969, vol.184, p.1231.
42. Hioe F.T., Montroll E.W. — *J.Math.Phys.*, 1975, vol.16, p.1945; Hioe F.T., MacMillen D., Montroll E.W. — *Phys.Rep.*, 1978, vol.C43, p.305.
43. Schiff L.I. — *Phys.Rev.*, 1953, vol.92, p.766.
44. Вайнштейн А.И. и др. — *ЯФ*, 1980, т.32, с.1622.
45. Coleman S., Weinberg E. — *Phys.Rev.*, 1973, vol.D7, p.1888.
46. Consoli M. — *Phys.Lett.*, 1993, vol.B305, p.78.
47. Branchina V., Consoli M., Stivala N.M. — *Z.Phys.*, 1993, vol.C57, p.251.
48. Consoli M., Stevenson P.M. — Rice Preprint DE-FG05-92ER40717-5, 1993; Rice Preprint DE-FG05-92ER40717-9, 1993.
49. Branchina V., Castorina P., Consoli M., Zappala D. — *Phys.Lett.*, 1992, vol.B274, p.404.
50. Ibanez-Meier R., Stancu I., Stevenson P.M. — Gaussian Effective Potential for the U(1) Higgs Model. Rice Preprint, 1993.
51. Parisi G. — *Phys.Lett.*, 1977, vol.B68, p.361.
52. Khuri N.N. — *Phys.Lett.*, 1985, vol.B150, p.199.
53. t'Hoof G. — *Nucl.Phys.*, 1973, vol.B61, p.455.
54. Weinberg S. — *Phys.Rev.*, 1973, vol.D8, p.3497.
55. Владимирив А.А., Ширков Д.В. — *УФН*, 1979, т.129, с.407.
56. Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. — *Phys. Lett.*, 1983, vol.B132, p.351.
57. Castoldi P., Schomblond C. — *Nucl.Phys.*, 1978, vol.B139, p.269.
58. Казakov Д.И., Тарасов О.В., Ширков Д.В. — *ТМФ*, 1979, т.38, с.15.
59. Solovtsov I.L. — *Phys.Lett.*, 1994, vol.B327, p.335.
60. Sissakian A.N., Solovtsov I.L., Shevchenko O.Yu. — *Int.J.Mod.Phys.*, 1994, vol.A9, No.12, p.1929.
61. Narison S. — *Phys. Rep.*, 1982, vol.84, p.263.
62. Levine R., Tomozawa Y. — *Phys.Rev.*, 1979, vol.D19, p.1572.
63. Арбузов Б.А. — *ЭЧАЯ*, 1988, т.19, вып.1, с.5.
64. Ball J.S., Zachariassen F. — *Phys.Lett.*, 1980, vol.B95, p.273; Baker M., Ball J.S., Zachariassen F. — *Nucl.Phys.*, 1981, vol.B186, p.531.
65. Baker M. — *Phys.Rep.*, 1981, vol.75, p.205.