ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 56, вып. 8, 1993

© 1993 г. ВИНИЦКИЙ С.И., ПЕРВУШИН В.Н., ПОГОСЯН Г.С., СИСАКЯН А.Н.

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАЗИРАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ДУБНА

(Поступила в редакцию 23 декабря 1992г.)

Посвящается светлой памяти Я.А. Смородинского

Получено радиальное уравнение Шредингера в дискретном импульсном представлении для центральных потенциалов на трехмерной сфере в виде системы однородных алгебраических уравнений. В пределе плоского пространства эта система соответствует известному интегральному уравнению Шредингера для радиальных функций в импульсном представлении. Явно вычислены ядра этого уравнения для ряда потенциалов, имеющих геометрический смысл и встречающихся в приложениях. Предложен метод вычисления квазирадиальных решений на основе чебышевской процедуры построения системы ортогональных полиномов дискретной переменной.

1. Введение

В последнее время квантовая механика на римановых многообразиях привлекает внимание многих исследователей [1, 2]. Задача об атоме водорода с гармоническим потенциалом в координатном пространстве на трехмерной сфере $S^3(\chi, \theta, \phi)$ радиуса R начиная с работ Шредингера, Инфельда и Стивенсона [3–5] изучалась многими авторами [6–10]. Однако в импульсном представлении эта задача до настоящего времени фактически не рассматривалась. Исследование данной задачи в импульсном представлении и разработка аналитических и численных методов ее решения для различных потенциалов, не имеющих точных решений, представляют большой интерес в связи с возможными применениями при описании более сложных трехчастичных систем [11], в физике кваркония [12], а также имеют непосредственное отношение к КХД с глобальной топологической переменной и самодуальным конденсатом типа "мешков", в которой квазичастичные возбуждения кварков и глюонов описываются полиномами Гегенбауэра [13].

В настоящей работе получено уравнение Шредингера для квазирадиальных волновых функций с центрально-симметричным потенциалом в импульсном представлении на трехмерной сфере в виде бесконечной системы однородных алгебраических уравнений, которая в пределе $R \to \infty$ переходит в известное интегральное уравнение Шредингера для радиальной волновой функции в импульсном представлении [14]. Получены явные выражения для ядра этого уравнения в случае ряда потенциалов, имеющих геометрический смысл, а также для гармонического потенциала $V_S^{\alpha}(\chi,R)=-(\alpha/R)\operatorname{ctg}\chi$, который определяется как решение уравнения Лапласа на трехмерной сфере и является аналогом обычного кулоновского потенциала. Соответствующие квазирадиальные решения через обобщенные гипергеометрические функции от единичного аргумента в дискретном импульсном пространстве были получены в нашей предыдущей работе [15] с помощью прямого вычисления интеграла перекрытия между квазирадиальными волновыми функциями и функциями Гегенбауэра. Полученные в работе [15] результаты можно использовать в качестве теста для проверки эффективности того или иного метода численного решения упомянутой выше задачи, когда она не имеет точного решения в координатном представлении.

В качестве такого метода предлагается использовать подходящее ортогональное преобразование, осуществляющее переход к эквивалентной системе алгебраических уравнений с более простым ядром. Соответствующая матрица преобразования задается чебышевской процедурой построения системы ортогональных полиномов дискретной переменной, которая обеспечивает наилучшую аппроксимацию при переходе к интегральному уравнению в пределе $R\to\infty$.

2. Решения свободного уравнения Шредингера на трехмерной сфере

Трехмерное пространство постоянной положительной кривизны может быть реализовано на трехмерной сфере S_R^3 радиуса $0<R<\infty$, вложенной в четырехмерное евклидово пространство M_4. Координаты $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ четырехмерного пространства M_4 связаны со сферическими координатами $\Omega=\{\chi,\vartheta,\varphi\}$, описывающими движение на трехмерной сфере

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=R^2,$$

соотношениями

$$\begin{gathered} x_1=R\sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi,\quad x_2=R\sin\chi\sin\vartheta\,\sin\varphi.\\ x_3=R\sin\chi\cos\vartheta,\quad x_4=R\cos\chi,\\ 0\leqslant\chi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi. \end{gathered}\tag{1}$$

Сферическая система координат (1) является наиболее удобной системой, поскольку переменная χ имеет смысл не только сферического угла, но и (при $R=1$) совпадает с длиной геодезической на трехмерной сфере.

Угловая часть четырехмерного оператора Лапласа $\hat{\Box}$, элемент объема $d\hat{M}_4$ и длины dS^2 в $\hat{M}_4$ имеют вид

$$\frac{1}{R^2}\hat{\Box}=\frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}-\frac{\mathbf{l}^2}{\sin^2\chi}\right],$$

$$d\hat{M}_4=R^3\sin^2\chi d\chi d\hat{M}_3,$$

$$dS^2=R^2d\chi^2+R^2\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2),$$

где

$$\mathbf{l}^2=-\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\upsilon}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right],$$

$$d\hat{M}_3=\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

– оператор квадрата углового момента на $\hat{M}_3\sim S^2(\vartheta,\varphi)$.

Уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в потенциальном поле $V_S^\alpha(\Omega,R)$ на S_R^3 при каждом значении R, можно записать в следующей форме ($\hbar=\mu=1$):

$$\left[-\frac{1}{2R^2}\hat{\Box}+V_S^\alpha(\Omega,R)\right]\Psi_S^\alpha(\Omega,R)=E^\alpha(R)\Psi_S^\alpha(\Omega,R). \tag{2}$$

Для свободного движения частицы на поверхности сферы S_R^3, т.е. при $V_S^\alpha\equiv 0$, решение уравнения Шредингера (2) в сферической системе координат (1) имеет вид

$$\Psi_{nlm}^{\alpha=0}(\chi,\vartheta,\varphi,R)=S_{nl}(\chi,R)Y_{lm}(\vartheta,\varphi).$$

Энергетический спектр такой динамической системы определяется формулой

$$E_n^{\alpha=0}(R)=\frac{(n^2-1)}{2R^2},\quad n=1,2\ldots$$

Сферические функции $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ удовлетворяют соотношениям нормировки и полноты

$$\sum_{lm}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{lm}(\vartheta',\varphi')=\delta(\cos\vartheta-\cos\vartheta')\delta(\varphi-\varphi'),$$

$$\int\int Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Квазирадиальные волновые функции $S_{nl}(\chi,R)$ связаны с полиномами Гегенбауэра соотношением

$$S_{nl}(\chi,R)=\frac{2^{l+1}l!}{R}\left[\frac{n(n-l-1)!}{2\pi R(n+l)!}\right]^{1/2}(\sin\chi)^l C_{n-l-1}^{l+1}(\cos\chi), \tag{3}$$

где квантовое число l при фиксированном n пробегает значения $l=0,1,\ldots,n-1$.

Они также могут быть выражены через элементарные функции по формуле

$$S_{nl}(0,R)=\sqrt{\frac{2n^2}{\pi R^3}}\delta_{l0},\quad S_{n0}(\chi,R)=\sqrt{\frac{2}{\pi R^3}}\frac{\sin n\chi}{\sin\chi},$$

$$S_{nl}(\chi,R)=\frac{(\sin\chi)^l}{[(n^2-1)\ldots(n^2-l^2)]^{1/2}}\frac{d^l}{(d\cos\chi)^l}S_{n0}(\chi,R).$$

Используя условие полноты и нормировки для полиномов Гегенбауэра, легко проверить, что функции $S_{nl}(\chi,R)$ подчиняются следующим соотношениям:

$$R^3\sin\chi\sin\chi'\sum_n S_{nl}(\chi,R)S_{nl}(\chi',R)=\delta(\chi-\chi'), \tag{4}$$

$$R^3\int_0^\pi S_{nl}(\chi,R)S_{n'l}(\chi,R)\sin^2\chi d\chi=\delta_{nn'}. \tag{5}$$

Функции $S_{nl}(\chi,R)$, зависящие от двух дискретных параметров l, n и непрерывной переменной χ, удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям

$$\frac{[n^2-(l+1)^2]^{1/2}}{2l+1}S_{n,l+1}(\chi,R)+\frac{[n^2-l^2]^{1/2}}{2l+1}S_{n,l-1}(\chi,R)=\operatorname{ctg}\chi S_{nl}(\chi,R),$$

$$\left[\frac{(n-l)(n+l+1)}{4n(n+1)}\right]^{1/2}S_{n+1,l}(\chi,R)+\left[\frac{(n+l)(n-l-1)}{4n(n-1)}\right]^{1/2}S_{n-1,l}(\chi,R)=\cos\chi S_{nl}(\chi,R)$$

и дифференциальному уравнению

$$\left\{\frac{d^2}{d\chi^2}+2\operatorname{ctg}\chi\frac{d}{d\chi}-\frac{l(l+1)}{\sin^2\chi}\right\}S_{nl}(\chi,R)+(n^2-1)S_{nl}(\chi,R)=0. \tag{6}$$

Переход от искривленного пространства S_R^3 к плоскому M_3 осуществлялся в пределе $R\to\infty$ и отвечает следующему приближению:

$$\chi << 1, \quad n >> 1; \quad n/R = \text{фикс.}, \ \chi R = \text{фикс.},$$

причем $\chi R \to r$ и $n/R \to p$, где r – радиус-вектор, а p – импульс свободной частицы в плоском пространстве M_3. Нетрудно убедиться также, что в пределе $R\to\infty$ волновые функции $S_{nl}(\chi, R)$ переходят в сферические функции Бесселя

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ n/R\to p}} \sqrt{R}S_{nl}(\chi,R)=\sqrt{\frac{2p^2}{\pi}}j_l(pr),$$

т.е. в радиальные волновые функции свободного движения в M_3 [16].

3. Уравнение для квазирадиальных импульсных волновых функций на трехмерной сфере

Для любого центрально-симметричного потенциала $V^\alpha(\chi, R)$ уравнение Шредингера допускает разделение переменных в сферической системе координат и соответствующая волновая функция может быть представлена в виде

$$\Psi^\alpha_{Elm}(\chi,\vartheta,\varphi;R)=R_{El}(\chi,R)Y_{lm}(\vartheta,\varphi), \tag{7}$$

где квазирадиальные функции $S_{El}(\chi, R)$ удовлетворяют уравнению

$$\left\{\frac{d^2}{d\chi^2}+2\operatorname{ctg}\chi\frac{d}{d\chi}-\frac{l(l+1)}{\sin^2\chi}\right\}R_{El}(\chi,R)+2R^2\left\{E-V^\alpha(\chi,R)\right\}R_{El}(\chi,R)=0. \tag{8}$$

Будем предполагать, что задача Штурма–Лиувилля для уравнения (8) с потенциалом $V^\alpha(\chi, R)$ на конечном интервале $[0, \pi]$ при всех $R\in(0, \infty)$ имеет чисто дискретный спектр значений $E \equiv E_N$, $N = 1, 2, \ldots$ Тогда функцию $R_{Nl}(\chi, R)$, являющуюся решением уравнения (8), можно разложить в ряд по полной системе свободных волновых функций $S_{nl}(\chi, R)$

$$R_{Nl}(\chi,R)=\sum_{n=l+1}^{\infty}F_{Nl}(n,R)S_{nl}(\chi,R), \tag{9}$$

где коэффициенты $F_{Nl}(n, R)$ определяются соотношением

$$F_{Nl}(n,R)=R^3\int_0^\pi S_{nl}(\chi,R)R_{Nl}(\chi,R)\sin^2\chi d\chi. \tag{10}$$

Последнее соотношение можно рассматривать как преобразование функции $R_{Nl}(\chi, R)$ от непрерывной переменной χ к дискретной переменной $n = 1, 2, \ldots$ при фиксированных значениях энергии E_N, орбитального квантового числа l и параметра R. При этом функции $S_{nl}(\chi, R)$ играют роль матрицы преобразования от функций $R_{Nl}(\chi, R)$ к $F_{Nl}(n, R)$. По аналогии с плоским случаем мы можем назвать $F_{Nl}(n, R)$ квазирадиальными импульсными функциями от дискретной переменной n, а преобразования (9) и (10) преобразованиями Фурье–Гегенбауэра при переходе в дискретное импульсное пространство.

Из условия нормировки для $R_{Nl}(\chi, R)$

$$R^3\int_0^\pi R_{Nl}(\chi,R)R_{N'l}(\chi,R)\sin^2\chi d\chi=\delta_{NN'}$$

следует соотношение ортогональности для квазирадиальных импульсных волновых функций

$$R^3\sum_{n=l+1}^{\infty}F_{Nl}(n,R)F_{N'l}(n,R)=\delta_{NN'}.$$

Подставляя в уравнение для квазирадиальных волновых функций (8) разложение (9) по свободным функциям, используя далее уравнение (6) и умножая слева на $R^3\sin^2\chi S_{n'l}(\chi,R)$, после интегрирования по углу χ в интервале $[0, \pi]$ приходим к бесконечной системе однородных алгебраических уравнений для квазирадиальных волновых функции $F_{Nl}(n, R)$

$$\sum_{n=l+1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n^2-1}{2R^2}-E_N\right)\delta_{n,n'}+W_l(n,n')\right\}F_{Nl}(n,R)=0, \tag{11}$$

где матричные элементы потенциальной энергии имеют вид

$$W_l(n,n')=R^3\int_0^\pi S_{nl}(\chi,R)V^\alpha(\chi,R)S_{n'l}(\chi,R)\sin^2\chi d\chi. \tag{12}$$

Как видно из определения (12), "ядро" $W_l(n, n')$ при каждом значении величины l является симметричной матрицей относительно n и n', зависит от параметра R и формы центрально-симметричного потенциала $V^\alpha(\chi, R)$. Собственные значения энергии E_N системы с потенциалом $V^\alpha(\chi, R)$ вычисляются из условия обращения в нуль детерминанта однородной алгебраической системы уравнений (11). При $R \to \infty$ алгебраическая система (11) переходит в известное интегральное уравнение Шредингера для радиальной волновой функции в импульсном представлении [14].

Наиболее важны и интересны с точки зрения приложений следующие потенциалы: гармонический потенциал $V^\alpha(\chi, R) = -(\alpha/R)\,\mathrm{ctg}\chi$, который является решением уравнения Лапласа на трехмерной сфере [3] и переходит в кулоновский потенциал для обычного атома водорода, а также потенциал $V^\alpha(\chi, R) = \alpha(R\sin\chi)^{p-2}$, $p = 1, 2...$

3.1. Вычисление ядра $W_l(n, n')$ для гармонического потенциала

Для гармонического потенциала $V_S^\alpha=-(\alpha/R)\,\mathrm{ctg}\,\chi$ ядро $W_l(n, n')$ имеет следующий вид:

$$W_l(n,n')=-\frac{\alpha}{R}\int_0^\pi S_{nl}(\chi,R)\,\mathrm{ctg}\,\chi S_{n'l}(\chi,R)R^3\sin^2\chi d\chi. \tag{13}$$

Так как $\mathrm{ctg}\,\chi$ – нечетная функция, то $W_l(n, n')$ отлично от нуля, когда квантовые числа n и n' имеют разную четность.

Для вычисления интеграла (13) воспользуемся определением (3) и известным разложением для полиномов Гегенбауэра в виде рядов Фурье [17]:

$$C_n^\nu(\cos\varphi)=\frac{\Gamma(n+\nu)}{n!\Gamma(\nu)}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-n)_s(\nu)_s}{s!(1-\nu-n)_s}e^{-i(n-2s)\varphi}, \tag{14}$$

где $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha + n)/\Gamma(\alpha)$ является символом Похгаммера.

Подставляя выражение (14) в интегральное представление (13) для $W_l(n, n')$, имеем

$$W_l(n,n') = -\frac{\alpha}{\pi R}\frac{2^{2l+1}\sqrt{nn'}(n-1)!(n'-1)!}{[(n-l-1)!(n'-l-1)!(n+l)!(n'+l)!]^{1/2}}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{n-l-1}\frac{(-n+l+1)_s(l+1)_s}{(-n+1)_s s!}\sum_{t=0}^{n'-l-1}\frac{(-n'+l+1)_t(l+1)_t}{(-n'+1)_t t!}A_{st}^l(n,n'), \tag{15}$$

где

$$A_{st}^l(n,n') = \int_0^\pi \exp\{i\chi[2(s+t+l+1)-(n+n')]\}\cos\chi(\sin\chi)^{2l+1}d\chi.$$

Используя далее формулу

$$\int_0^\pi (\sin\chi)^\alpha e^{i\beta\chi}d\chi = \frac{\pi}{2^\alpha}\frac{\exp[i(\pi/2)\beta]\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1+(\alpha-\beta)/2)\Gamma(1+(\alpha+\beta)/2)},$$

легко видеть, что

$$A_{st}^l(n,n') = (-1)^{l+1}\frac{(2l+1)!}{2^{2l+2}}\left\{\frac{\Gamma(1+s+t-(n+n')/2)}{\Gamma(2l+3+s+t-(n+n')/2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(s+t-(n+n')/2)}{\Gamma(2l+2+s+t-(n+n')/2)}\right\}.$$

Подставляя полученное выражение для $A_{st}^l(n,n')$ в разложение (15) и собирая один из рядов в обобщенную гипергеометрическую функцию

$${}_{p+1}F_p\left\{\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p\end{matrix}\middle|1\right\} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_s(\alpha_1)_s\ldots(\alpha_p)_s}{(\beta_1)_s\ldots(\beta_p)_s(s)!}$$

от единичного аргумента, немедленно получаем

$$W_l(n,n') = \frac{\alpha}{2\pi R}\frac{(-1)^l\sqrt{nn'}(2l+1)!(n-1)!(n'-1)!}{[(n-l-1)!(n'-l-1)!(n+l)!(n'+l)!]^{1/2}}\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{n-l-1}\frac{(-n+l+1)_s(l+1)_s}{(-n+1)_s s!}\left\{\frac{\Gamma(s-(n+n')/2)}{\Gamma(2l+2+s-(n+n')/2)}\times\right.$$

$$\times{}_3F_2\left\{\begin{matrix}-n'+l+1,l+1,s-(n+n')/2\\ -n'+1,2l+s+2-(n+n')/2\end{matrix}\middle|1\right\}+\frac{\Gamma(s+1-(n+n')/2)}{\Gamma(2l+3+s-(n+n')/2)}\times$$

$$\left.\times{}_3F_2\left\{\begin{matrix}-n'+l+1,l+1,s+1-(n+n')/2\\ -n'+1,2l+s+3-(n+n')/2\end{matrix}\middle|1\right\}\right\}. \tag{16}$$

Функции ${}_3F_2(1)$, входящие в соотношение (16), являются конечными рядами и могут быть просуммированы согласно теореме Заальщютца по формуле [17]

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}-n,a,b\\ c,1+a+b-c-n\end{matrix}\middle|1\right\} = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}.$$

Последнее соотношение позволяет записать выражение для $W_l(n,\,n')$ в виде суммы двух обобщенных гипергеометрических функций ${}_4F_3$ от единичного аргумента

$$W_l(n,n') = \frac{\alpha}{2\pi R}\frac{(-1)^l l!(n-1)![nn'(n'+l)!]^{1/2}}{[(n-l-1)!(n'-l-1)!(n+l)!]^{1/2}}\times$$

$$\times\left\{\frac{\Gamma(-(n+n')/2)\Gamma((n'-n)/2)}{\Gamma(l+1-(n+n')/2)\Gamma(l+1+(n'-n)/2)}\times\right.$$

$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n+l+1,l+1,-(n+n')/2,(n'-n)/2\\-n+1,l+1-(n+n')/2,l+1+(n'-n)/2\end{matrix}\middle|1\right\}+$$

$$+\frac{\Gamma(1-(n+n')/2)\Gamma(1+(n'-n)/2)}{\Gamma(l+2-(n+n')/2)\Gamma(l+2+(n'-n)/2)}\times$$

$$\left.\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n+l+1,l+1,1-(n+n')/2,1+(n'-n)/2\\-n+1,l+2-(n+n')/2,l+2+(n'-n)/2\end{matrix}\middle|1\right\}\right\}.$$

Принимая во внимание известное свойство симметрии рядов ${}_4F_3(1)$ [18]

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n,b,c,d\\e,f,g\end{matrix}\middle|1\right\}=\frac{(f-b)_n(g-b)_n}{(f)_n(g)_n}\times$$

$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n,b,e-c,e-d\\e,b-f-n+1,b-g-n+1\end{matrix}\middle|1\right\},$$

$$-n+b+c+d=1+e+f+g,$$

можно без труда убедиться, что

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n+l+1,l+1,-(n+n')/2,-(n-n')/2\\-n+1,l+1-(n+n')/2,l+1-(n-n')/2\end{matrix}\middle|1\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma((n+n')/2-l-1)l!(n+l)!\Gamma(l+1+(n'-n)/2)}{(2l+1)!(n-1)!\Gamma((n+n')/2)\Gamma((n'-n)/2)}\times$$

$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n+l+1,-n'+l+1,l+1,l+1\\2l+2,l+2-(n+n')/2,l+1-(n+n')/2\end{matrix}\middle|1\right\},$$

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n+l+1,l+1,1-(n+n')/2,1-(n-n')/2\\-n+1,l+2-(n+n')/2,l+2-(n-n')/2\end{matrix}\middle|1\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma((n+n')/2-l)l!(n+l)!\Gamma(l+2+(n'-n)/2)}{(2l+1)!(n-1)!\Gamma(1+(n+n')/2)\Gamma(1+(n'-n)/2)}\times$$

$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n+l+1,-n'+l+1,l+1,l+1\\2l+2,l+2-(n+n')/2,l+1-(n+n')/2\end{matrix}\middle|1\right\}.$$

Тогда после очевидных преобразований

$$\frac{\Gamma(-(n+n')/2)\Gamma((n+n')/2-l-1)}{\Gamma(l+1-(n+n')/2)\Gamma((n+n')/2)}=\frac{\Gamma(1+(n+n')/2)\Gamma((n+n')/2-l)}{\Gamma(l+2-(n+n')/2)\Gamma(1-(n+n')/2)}=$$

$$=(-1)^{l+1}\frac{\Gamma((n+n')/2-l)\Gamma((n+n')/2-l-1)}{\Gamma((n+n')/2)\Gamma((n+n')/2+1)}$$

окончательно получаем следующую формулу для ядра $W_l(n, n')$:

$$W_l(n,n') = -\frac{\alpha}{\pi R}\frac{\sqrt{nn'}(l!)^2}{(2l+1)!}\frac{\Gamma((n+n')/2-l-1)\Gamma((n+n')/2-l)}{\Gamma((n+n')/2+1)\Gamma((n+n')/2)}\times$$

$$\times\left[\frac{(n+l)!(n'+l)!}{(n-l-1)!(n'-l-1)!}\right]^{1/2} {}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n+l+1,-n'+l+1,l+1,l+1\\ 2l+2,l+2-(n+n')/2,l+1-(n+n')/2\end{matrix}\middle|1\right\}. \qquad (18)$$

Заметим, что выражение (18) для ядра $W_l(n, n')$ явно симметрично относительно n и n', что гарантирует вещественность спектра соответствующей алгебраической задачи на собственные значения для уравнения (11).

Исследуем теперь переход данного ядра в пределе $R \to \infty$. При $R \to \infty$ и $n/R \to p$, $n'/R \to p'$ имеем следующие правила соответствия:

$$\frac{\Gamma((n+n')/2-l-1)\Gamma((n+n')/2-l)}{\Gamma((n+n')/2+1)\Gamma((n+n')/2)}\left[\frac{nn'(n+l)!(n'+l)!}{(n-l-1)!(n'-l-1)!}\right]^{1/2} \to \left\{\frac{(4pp')}{(p+p')^2}\right\}^{l+1},$$

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n+1,-n'+1,l+1,l+1\\ 2,2-(n+n')/2,1-(n+n')/2\end{matrix}\middle|1\right\} \to {}_2F_1\left\{\begin{matrix}l+1,l+1\\ 2l+2\end{matrix}\middle|\frac{4pp'}{(p+p')^2}\right\}$$

и, следовательно,

$$\lim_{R\to\infty} R\cdot W_l(n,n') = -\frac{\alpha}{\pi}\frac{(l!)^2}{(2l+1)!}\left\{\frac{(4pp')}{(p+p')^2}\right\}^{l+1} {}_2F_1\left\{\begin{matrix}l+1,l+1\\ 2l+2\end{matrix}\middle|\frac{4pp'}{(p+p')^2}\right\}.$$

Сравнивая гипергеометрическую функцию, входящую в последнее выражение, с представлением функций Лежандра второго рода Q_μ через гипергеометрические ряды [17]

$$Q_\mu(z) = \frac{2^\mu}{(z+1)^{\mu+1}}\frac{[\Gamma(1+\mu)]^2}{\Gamma(2+2\mu)}\, {}_2F_1\left\{\begin{matrix}1+\mu,1+\mu\\ 2+2\mu\end{matrix}\middle|\frac{2}{1+z}\right\},$$

при $z = (p^2 + p'^2)/2pp'$ получаем, что

$$\lim_{R\to\infty} R\cdot W_l(n,n') = -\frac{2\alpha}{\pi}Q_l\left(\frac{p^2+p'^2}{2pp'}\right)$$

и, следовательно, уравнение (11) переходит в известное интегральное уравнение для атома водорода [14]

$$(p^2-2E)F(p) = \frac{2\alpha}{\pi p}\int_0^\infty Q_l\left(\frac{p^2+p'^2}{2pp'}\right)F(p')p'dp'.$$

В частном случае $l = 0$ формула (18) существенно упрощается. В самом деле, имеем

$$W_0(n,n') = -\frac{\alpha}{\pi R}\frac{4nn'}{(n+n')(n+n'-2)}\, {}_4F_3\left\{\begin{matrix}-n+1,-n'+1,1,1\\ 2,2-(n+n')/2,1-(n+n')/2\end{matrix}\middle|1\right\}.$$

Используя далее формулу [19]

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix}-N,a,1,1\\ 2,b,1+a-b-N\end{matrix}\middle|1\right\} =$$

$$= \frac{(b-1)(a-b-N)}{(N+1)(a-1)}\{\Psi(N+b)+\Psi(1+a-b)-\Psi(b-1)-\Psi(a-b-N)\},$$

где $\Psi(n)$ есть логарифмическая производная гамма-функции, легко видеть, что

$$W_0(n,n') = -\frac{\alpha}{\pi R}\left\{\Psi\left(\frac{n+n'}{2}\right)+\Psi\left(-\frac{n+n'}{2}\right)-\Psi\left(\frac{n-n'}{2}\right)-\Psi\left(\frac{n'-n}{2}\right)\right\}.$$

При больших номерах n' (или n) ядро имеет асимптотический вид

$$W_l(n,n') \sim -\frac{\alpha}{R}\frac{2l!}{(2l+1)!!}\left(\frac{2}{n'}\right)^{l+1}\left[\frac{n(n+l)!}{(n-l-1)!}\right]^{1/2}.$$

Последнее соотношение позволяет доказать теорему редукции Л.В. Канторовича и получить явные оценки скорости сходимости решения по номеру.

3.2. Ядро $W_l(n, n')$ для потенциала $V_l^\alpha(\chi, R) = \alpha(R\sin\chi)^{p-2}$

Выпишем интегральное представление для ядра $W_l(n, n')$ с потенциалом $V^\alpha(\chi, R) = \alpha(R\sin\chi)^{p-2}$:

$$W_l^{p-2}(n,n') = \frac{\alpha}{\pi}2^{2l+1}(l!)^2(R)^{p-2}\left[\frac{nn'\Gamma(n-l)\Gamma(n'-l)}{\Gamma(n+l+1)\Gamma(n'+l+1)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{l+p-1/2}C_{n-l-1}^{l+1}(x)C_{n'-l-1}^{l+1}(x)dx. \qquad (19)$$

Так как в подынтегральном выражении стоит нечетная функция, то $W_l^{p-2}(n,n')$ отлично от нуля, если квантовые числа n и n' имеют одинаковую четность. Интеграл (19) был вычислен в работе Кильдюшова [20] и в наших обозначениях выглядит следующим образом:

для $(n-l-1)$ и $(n'-l-1)$ четных

$$W_l^{p-2}(n,n') =$$

$$=(-1)^{\frac{n'-l-1}{2}}\frac{\alpha\sqrt{nn'}(R)^{p-2}\Gamma(l+(p+1)/2)\Gamma(p/2)}{\Gamma(l+3/2)\Gamma((n'-l+1)/2)\Gamma(p/2+(n'+l+1)/2)\Gamma((n'-l+1)/2)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma((n'+l+1)/2)}{\Gamma(p/2-(n'-l-1)/2)}\left[\frac{\Gamma(n+l+1)\Gamma(n'-l)}{\Gamma(n'+l+1)\Gamma(n-1)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-(n-l-1)/2,(n+l+1)/2,l+(p+1)/2,p/2\\ l+3/2,p/2+(n'+l+1)/2,p/2-(n'-l-1)/2\end{matrix}\middle|1\right\}, \qquad (20)$$

для $(n-l-1)$ и $(n'-l-1)$ нечетных

$$W_l^{p-2}(n,n') = (-1)^{\frac{n'-l}{2}-1}\frac{\alpha\sqrt{nn'}(R)^{p-2}\Gamma(l+(p+1)/2)\Gamma(p/2)}{\Gamma(l+3/2)\Gamma((n'-l)/2)\Gamma(1+p/2+(n'+l)/2)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma((n'+l)/2+1)}{\Gamma(1+p/2-(n'-l)/2)}\left[\frac{\Gamma(n+l+1)\Gamma(n'-l)}{\Gamma(n'+l+1)\Gamma(n-1)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-(n-l)/2+1,(n+l)/2+1,l+(p+1)/2,p/2\\ l+3/2,1+p/2+(n'+l)/2,1+p/2-(n'-l)/2\end{matrix}\middle|1\right\}. \qquad (21)$$

Формулы (20) и (21) можно объединить в одну, если воспользоваться преобразованием (17) для ${}_4F_3(1)$. В результате получаем для $W_l^{p-2}(n,n')$:

$$W_l^{p-2}(n,n') = \frac{(-1)^{(n-n')/2}\alpha\sqrt{nn'}(R)^{p-2}\Gamma(l+(p+1)/2)\Gamma(p/2)}{\Gamma(l+3/2)\Gamma(1+(n'-n)/2)\Gamma(p/2+(n-n')/2)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma((n'+n)/2)}{\Gamma(p/2+(n+n')/2)}\left[\frac{\Gamma(n+l+1)\Gamma(n'-l)}{\Gamma(n'+l+1)\Gamma(n-l)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-(n-l-1)/2,-(n-l-2)/2,1-p/2,p/2\\ l+3/2,1-(n+n')/2,1+(n'-n)/2\end{matrix}\middle|1\right\}. \tag{22}$$

Приведенная нами формула не является симметричной относительно квантовых чисел n и n', однако не зависит от четности $(n-l-1)$ (или, что то же самое, $(n'-l-1)$).

При $p = 2M + 2$, $M = 0, 1, 2, \ldots$ отличны от нуля только матричные элементы

$$W_l^M(n,n),\ W_l^M(n,n\pm 2),\ldots,W_l^M(n,n\pm 2M).$$

В результате уравнение (11) переходит в $(2M+1)$-членное рекуррентное соотношение на квазирадиальные импульсные волновые функции $F_{NL}(n, R)$:

$$\sum_{k=1}^{M}\delta_{n',n\pm 2k}W_l^M(n,n')F_{Nl}(n',R)-\left(E_N-W_l^M(n,n)-\frac{n^2-1}{2R^2}\right)F_{Nl}(n,R)=0,$$

$$F_{Nl}(0,R)=F_{Nl}(1,R)=\ldots=F_{Nl}(l,R)=0.$$

В качестве примера приведем некоторые простейшие выражения для отличных от нуля коэффициентов $W_l^M(n,n')$ при $M = 1$:

$$W_l^2(n,n)=\frac{\alpha R^2}{2}\frac{\{(n^2-1)+l(l+1)\}}{(n^2-1)},$$

$$W_l^2(n,n+2)=-\frac{\alpha R^2}{4}\left[\frac{(n-l)(n-l+1)(n+l+1)(n+l+2)}{n(n+1)^2(n+2)}\right]^{1/2},$$

$$W_l^2(n,n-2)=-\frac{\alpha R^2}{4}\left[\frac{(n-l-2)(n-l-1)(n+l-1)(n+l)}{(n-2)(n-1)^2n}\right]^{1/2}.$$

При $p = 2M + 1$, $M = 0, 1, 2,\ldots$ алгебраическое уравнение (11) не сводится к системе простых рекуррентных соотношений на функции $F_{NL}(n, R)$.

В случае $M = 0$ ядро $W_l^p(n,n')$ уравнения (11) можно выразить через $6j$-символы или коэффициенты Рака для четвертьцелых моментов группы SU (1, 1). Сравнивая выражение для $W_l^p(n,n')$ с представлением $6j$-символов через гипергеометрические функции ${}_4F_3(1)$ от единичного аргумента [21]:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}=(-1)^{a+b+d+e}\frac{\Delta(abc)\Delta(cde)\Delta(aef)\Delta(bdf)}{\Gamma(2f+2)\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(a+c-b+1)\Gamma(d+e-c+1)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(a+f+e+2)\Gamma(b+f+d+2)\Gamma(a+c+d-f+1)}{\Gamma(c+d-e+1)\Gamma(a+e-f+1)\Gamma(b+d-f+1)\Gamma(c-a-d+f+1)}\times$$

$$\times{}_4F_3\left\{\begin{matrix}-a-e+f,-b-d+f,-a+e+f+1,b-d+f+1\\ -a-c-d+f,-a+c-d+f+1,2f+2\end{matrix}\middle|1\right\},$$

где $\Delta(abc)$ означает

$$\Delta(abc)=\left[\frac{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(a-b+c+1)\Gamma(b+c-a+1)}{\Gamma(a+b+c+2)}\right]^{1/2},$$

получаем искомую формулу

$$W_l^{-1}(n,n')=(-1)^{(n'+l)/2-3/2}\sqrt{nn'}\begin{pmatrix}(n-1)/2 & -1/2 & (n'-1)/2\\ (l-1/2)/2 & -1/4 & (l-1/2)/2\end{pmatrix}.$$

4. Метод вычисления радиальных волновых функций в импульсном представлении

Решение задачи на собственные значения для однородной системы уравнений (11), полученной в предыдущем разделе, для произвольного центрально-симметричного потенциала в широком диапазоне значений квантовых чисел nl и параметра R требует разработки специальных численных методов. Функцию $F(R)$ можно рассматривать как решение задачи Коши:

$$\frac{\partial F(R)}{\partial R}=AF(R), \tag{23}$$

$$F(0)=1, \tag{24}$$

с матрицей коэффициентов A, которая формально определяется соотношением

$$A(R)=\left(\frac{\partial F(R)}{\partial R}\right)F(R)^{-1}. \tag{25}$$

Матрица A отвечает оператору связности на гильбертовом расслоении $H(\mathcal{F}_R,\pi,B)$ с типовым слоем $\mathcal{F}_R\simeq L^2(\hat{M}_4,d\hat{M}_4(R))$ и проекцией π: $H\to B$ на базу $B=R^1_+$ или C, ассоциированным с решениями спектральной задачи (8), (11), которые приобретают смысл локальных сечений в H. Тогда стандартное калибровочное преобразование

$$F(R)=\Lambda(R)U(R) \tag{26}$$

индуцирует новый оператор связности

$$A'(R)=\Lambda(R)^{-1}A\Lambda(R)-\Lambda(R)^{-1}\frac{\partial\Lambda(R)}{\partial R}, \tag{27}$$

а для матрицы коэффициентов $U(R)$, которая играет роль оператора транспорта репера $\hat{e}\in\mathcal{F}_{\hat{R}}$ над базой B, U: $\mathcal{F}_{\hat{R}}\to\mathcal{F}_R$, или элемента группы голономии G, имеем эквивалентное эволюционное уравнение

$$\frac{\partial U(R)}{\partial R}=A'U(R), \tag{28}$$

$$U(0)=1. \tag{29}$$

Его решение представимо в виде P-экспоненты

$$U(R)=P\exp\int_0^R A'(R')dR'. \tag{30}$$

Аналогичная конструкция для матрицы конечного ранга, которая реализуется в практических расчетах, хорошо известна в связи с исследованиями устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [22].

Стандартный способ получения рекуррентных соотношений для коэффициентов F состоит в усреднении уравнения (8) по некоторому локальному базису $\hat{e} \in \mathcal{F}_{\hat{R}}$ $\hat{R} \in \hat{U} \in B$, например, в окрестности $\hat{U} = (0 < R < \varepsilon$ при $\varepsilon > 0)$. В действительности при усреднении по базису свободных квазирадиальных решений (3) вместо бесконечной системы уравнений (11) в практических расчетах обычно используются матрицы конечного ранга $n_{max} - l$:

$$\sum_{n'=l+1}^{n_{max}} \left\{ [E_{n'}^{\alpha=0}(R) - E_N^{\alpha}(R)]\delta_{n,n'} + W_l(n,n';R) \right\} F_{Nl}(n,R) = 0. \tag{31}$$

Другая возможность состоит в получении приближенных рекуррентных соотношений при значениях $l+1 \leqslant n \leqslant n_{max}$ для некоторого калибровочно-эквивалентного решения (26). Его можно построить с помощью подходящего ортогонального преобразования

$$\sum_{k=1}^{n_{max}-l} T_{nk}T_{n'k} = \delta_{nn'}, \quad \sum_{n=l+1}^{n_{max}} T_{nk}T_{nk'} = \delta_{kk'} \tag{32}$$

исходного базиса (3) в разложении (9) квазирадиальных решений

$$R_{Nl}(\chi,R) = \sum_{k=1}^{n_{max}-l} P_{kl}(\chi,R)U_{kl}^N(R), \tag{33}$$

где

$$P_{kl}(\chi,R) = \sum_{n=l+1}^{n_{max}} S_{nl}(\chi,R)T_{nk}, \quad U_{kl}^N(R) = \sum_{n=l+1}^{n_{max}} T_{nk}F_{nl}^N. \tag{34}$$

Соответствующие (31) рекуррентные соотношения для новых коэффициентов (34) примут следующий вид:

$$\sum_{k'=1}^{n_{max}-l} \left\{ E_{kk'}^{\alpha=0}(R) + V_{kk'}^{\alpha}(R) - E_N^{\alpha}(R)\delta_{kk'} \right\} U_{k'l}^N(R) = 0, \tag{35}$$

где кинетическая и потенциальная энергии заданы соотношениями

$$E_{kk'}^{\alpha=0}(R) = \sum_{n=l+1}^{n_{max}} T_{nk}E_n^{\alpha=0}(R)T_{nk'}, \tag{36}$$

$$V_{kk'}^{\alpha}(R) = \sum_{n=l+1}^{n_{max}} \sum_{n'=l+1}^{n_{max}} T_{nk}W_l(n,n';R)T_{n'k}, \tag{37}$$

а матричный элемент $W_l(n, n'; R)$ определен формулой (12). В качестве коэффициентов T_{nk} можно использовать полную ортогональную с весами w_k систему полиномов дискретной переменной $x_k = \cos \chi_k$

$$T_{nk} = w_k^{1/2} S_{nl}(x_k) \tag{38}$$

на сетке $\omega_k = \{x_k \in (-1,1), k = 1, n_{max} - l\}$, составленных из узлов полиномов $S_{n_{max}l}(x_k) = 0$ непрерывной переменной $x_k \in (-1, 1)$. Тогда интеграл (12) можно вычислить явно с помощью квадратуры Гаусса-Якоби:

$$W_l(n,n';R) = \sum_{k=1}^{n_{max}-l} w_k S_{nl}(x_k) V^{\alpha}(x_k;R) S_{n'l}(x_k).$$

В новом представлении (33) оператор кинетической энергии на сфере задается недиагональной матрицей (36) ранга $n_{max} - l$. Оператор потенциальной энергии $V^{\alpha}(R)$, заданный соотношением (37), благодаря выполнению условий ортогональности и полноты (32) в узлах сетки ω_k определяется диагональной матрицей того же ранга:

$$V^{\alpha}_{kk'}(R) = \sum_{k''=1}^{n_{max}-l} \sum_{n=l+1}^{n_{max}} T_{nk} T_{nk''} V^{\alpha}_{kk'}(x_{k''};R) \sum_{n'=l+1}^{n_{max}} T_{n'k''} T_{n'k'} = V^{\alpha}(x_k;R)\delta_{kk'}.$$

Ее элементы заданы значениями исходной потенциальной энергии $V^{\alpha}(x_k;R)$ на дискретной сетке узлов $x_k \in \omega_k$, которые легко табулируются. В результате система рекуррентных соотношений (35) приобретает вид

$$\sum_{k'=l}^{n_{max}-l} \left\{ \sum_{n=l+1}^{n_{max}} T_{nk} \left(\frac{n^2-1}{2R^2} \right) T_{nk'} + \left[V^{\alpha}(x_k;R) - E^{\alpha}_N(R) \right] \delta_{kk'} \right\} U^N_{k'l}(R) = 0. \quad (39)$$

Эта система удобна для исследования асимптотик решений (11) по номеру $n_{max} \to \infty$ и различных предельных соотношений, поскольку узлы x_k в этом случае определяются соответствующими узлами функции Бесселя [17]. Такое исследование необходимо для построения асимптотик матричных элементов оператора связности $A(R)$, которые нужны для понимания особенностей структуры гильбертова расслоения и динамики более сложных трехчастичных систем.

Для низколежащих состояний достаточно непосредственно решать систему уравнений (31) с ядрами, вычисленными в разд. 3. Для высоковозбужденных состояний предпочтительней использовать систему уравнений (39).

5. Заключение

Для релятивистского обобщения уравнения Шредингера на сфере S^3_R найденная здесь форма уравнения является более предпочтительной в связи с тем, что одночастичные энергии являются решениями уравнений Швингера – Дайсона и как правило сложным образом зависят от импульса. Как показано в работе [12], нерелятивистское уравнение Шредингера на трехмерной сфере для гармонического потенциала хорошо описывает спектр тяжелых кваркониев. В этой связи представляет интерес получить систему уравнений Швингера – Дайсона и Бете – Солпитера в трехмерном пространстве постоянной положительной кривизны для описания физики легких кваркониев как голдстоуновских мод этих уравнений [23]. Решение уравнения (11) для центральных потенциалов и релятивистское обобщение данного уравнения составляют объект наших дальнейших исследований.

В заключение выражаем благодарность А.А. Изместьеву, Ю.Л. Калиновскому, В. Каллису, И.В. Пузынину и В.М. Тер-Антоняну за полезные обсуждения.

Литература

1. *Кобушкин А.П., Огава Н., Фудзий К., Чепилко Н.М.* // ЯФ. 1990. Т. 52. С. 772. *Чепилко Н.М.* // ЯФ. 1992. Т. 55. С. 273.
2. *Grosche C.* // J. Math. Phys.1991. V. 32. P. 1984.
3. *Shrödinger E.* // Proc. Irish. Acad. 1940, V.A46. P.9; 1941. V.A46 P. 183; V.A 47. P. 53.
4. *Infeld L.* // Phys. Rev. 1941. V. 59. P. 737.
5. *Stivenson A.F.* // Phys. Rev. 1941. V. 59. P. 842.
6. *Богуш А.А., Отчик В.С., Редьков В.М.* // Вестн. АН БССР. 1983. Т.3. С. 56. *Отчик В.С., Редьков В.М.* Препринт 298, ИН АН БССР. Минск, 1983.
7. *Barut A.O., Wilson R.* // Phys. Lett. 1985. V.A110. P. 351. *Barut A.O., Inomata A., Junker G.* // J. Phys. 1987. V.A20. P. 6271; 1990, V.A23. P. 1179.

8. *Мардоян Л.Г., Сисакян А.Н.* // ЯФ. 1992. Т. 55. С. 2458.
9. *Higgs P.W.* // J.Phys. 1979. V.A12. P. 309.
10. *Leemon H.I.* // J. Phys. 1979. V.A12. P. 489.
11. *Виницкий С.И., Марковский Б.Л., Сузько А.А.* // ЯФ. 1992. Т. 55. С. 669. *Виницкий С.И., Кадомцев М.Б., Сузько А.А.* // ЯФ. 1990. Т. 51. С. 952.
12. *Изместьев А.А.* // ЯФ. 1990. Т. 52. С. 1697; 1991. Т.53. С. 1402.
13. *Первушин В.Н.* // ТМФ. 1980. Т. 45. С.394; ЯФ. 1982. Т. 36. С. 262.
14. *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атома с одним и двумя электронами. М.: ГИФМЛ, 1960.
15. *Виницкий С.И., Мардоян Л.Г., Погосян Г.С., Сисакян А.Н., Стриж Т.А.* // ЯФ. 1993. Т. 56. С. 59.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1963.
17. *Бейтмен Т., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966.
18. *Bailey W.N.* Generalized hypergeometric series, Cambridge Tracts, № 32. Cambridge, 1935.
19. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
20. *Кильдюшов М.С.* // ЯФ. 1972. Т. 15. С. 197.
21. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
22. *Гантмахер Ф.Р.* Теория Матриц. М.: Наука, 1988.
23. *Pervushin V.N. et al.* // Fortschr. Phys. 1989. V. 38. P. 323. *Kalinovsky Yu.L. et al.* // Sov. J. Nucl. Phys. 1989. V. 49. P. 1059. *Kalinovsky Yu.L., Kaschluhn L., Pervushin V.N.* // Fortschr. Phys. 1989. V. 38. P. 353; Phys. Lett. 1989. V.B231. P. 288.

Vinitsky S.I., Pervushin V.N., Pogosyan G.S., Sissakian A.N.

EQUATION FOR QUASIRADIAL FUNCTIONS IN MOMENTUM REPRESENTATION ON A THREE-DIMENSIONAL SPHERE

The radial Schrödinger equation for the wave functions in discrete the momentum representation for central potentials on a three-dimensional sphere are obtained in the form of a system of homogeneous algebraic equations. This system corresponds to the ordinary integral Schrödinger equation for radial wave functions in the momentum representation in the limit of a flat Euclidean space. The kernels of this equation are calculated explicitly for a class of central potentials having a geometrical sense and appearing in applications. The numerical method of calculation of quasiradial solutions and spectrum is proposed on the basis of the Chebychev procedure of constructing a suitable system of orthogonal polynomials of a discrete variable.