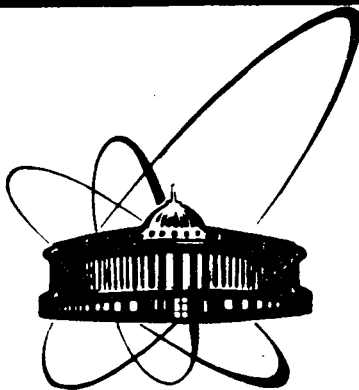


92-504



объединенный  
институт  
ядерных  
исследований  
дубна

P2-92-504

И.В.Луценко\*, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян\*

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ  
И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА

Направлено в журнал «Physics Letters A»

\*Ереванский государственный университет

1992

В сложных системах очень важно уметь правильно оценивать степень корреляции между признаками. В первую очередь это относится к наиболее простым, т.е. парным корреляциям. Считается самоочевидным, что корреляция является количественным отражением общего для двух признаков статистического свойства: насколько признак  $x$  зависит от признака  $y$ , настолько же признак  $y$  зависит от признака  $x$ . Сказанное неявно предполагается, когда для оценки парных корреляций используется критерий  $K = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$ . Если  $K = 0$ , то к делу привлекаются более сложные конструкции  $K^{\alpha\beta} = \langle x^\alpha y^\beta \rangle - \langle x^\alpha \rangle \langle y^\beta \rangle$ , в которых  $\alpha$  и  $\beta$  - целые положительные числа. Но и в этом случае требование корреляционной симметрии приводит к выбору  $\alpha = \beta$ . Правда, вопрос о том, чему должно быть равно  $\alpha$ , остаётся деликатным и его стараются не замечать [1].

В то же время ясно, что для большинства систем (в частности, геологических, биологических, экономических и экологических) указанная выше корреляционная симметрия сильно нарушена: в системе есть лидирующие признаки и есть признаки, подчиненные им. Поясним сказанное на простом, но абстрактном примере, в котором элементы системы (клетки) распределены по признаку  $x$  (точкам) и признаку  $y$  (крестам), как это показано в следующей таблице.

• ++	• ++	•• +++	• ++	•••• ++
•••• ++	••• ++++	• ••	•••• ++	• ++
• ++	•••• ++	• ••	•• ++++	•• +++
• ++	•• +++	•••• ••	•••• ++++	• ••

В клетках с заданным количеством точек встречается лишь определённое количество крестов, в то время как в клетки с заданным количеством крестов попало разное число точек. Понятно,

что точки связаны с крестами максимальным образом, а связь крестов с точками гораздо слабее.

Таким образом, парные корреляции по самой своей сути относительны и потому для их описания требуется не один, а два критерия: критерий  $L^{xy}$ , служащий мерой корреляции признака  $x$  с признаком  $y$ , и критерий  $L^{yx}$ , служащий мерой корреляции признака  $y$  с признаком  $x$ . Получить два критерия можно, например, нарушив симметрию выражения  $\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$ , разделив один раз его на  $\langle x \rangle$ , а другой раз на  $\langle y \rangle$ . Можно было бы использовать также критерий  $K^{\alpha\beta}$  с  $\alpha \neq \beta$ . Однако эти возможности в достаточной мере произвольны и потому не могут отражать сути дела.

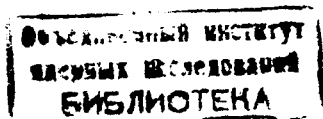
Совершенно иная точка зрения на обсуждаемую проблему была высказана в работе [2]. Корреляция там трактуется как один из итогов, к которым приводят процессы смешивания и разделения признаков в системе, т.е. процессы, которые, собственно, порождают статистику системы. Такая точка зрения приводит к следующим двум критериям [2]:

$$L^{xy} = \sum_q' \sum_p \left( 1 - \frac{x_p}{\langle x \rangle} \right) \tau(x_p, y_q), \quad (1a)$$

$$L^{yx} = \sum_p' \sum_q \left( 1 - \frac{y_q}{\langle y \rangle} \right) \tau(x_p, y_q). \quad (1b)$$

Здесь  $\tau(x_p, y_q)$  — это функция распределения вероятностей по признакам  $x$  и  $y$ , а суммирование ведётся по следующему правилу. В сумме по  $p$  в (1a) учитываются все значения признака  $x$ , а в сумме по  $q$  учитываются лишь те значения признака  $y$ , для которых первая сумма положительна. Аналогичное правило работает в отношении формулы (1b).

Цель настоящей статьи — установить связь критериев (1a) и (1b) с корреляционной матрицей  $K^{\alpha\beta}$ , о которой говорилось выше. Такая связь пролила бы свет на два интересных вопроса. Во-первых, станет ясно, в каком соответствии находится подход работы [2] с методами математической статистики [3]. Во-вторых, вопрос



о том, сколько корреляционных моментов нужно учитывать при оценке парных корреляций, "перестанет висеть в воздухе".

Начнём с того, что по определению

$$\langle x^\alpha y^\beta \rangle = \sum_{i,j} r(x_i, y_j) x_i^\alpha y_j^\beta, \quad (2)$$

где  $i, \alpha = 0, 1, \dots, n$ , а  $j, \beta = 0, 1, \dots, m$ . Введём матрицы  $Q_p^\alpha(z)$ , такие, что

$$\sum_{\alpha} z_1^\alpha Q_p^\alpha(z) = \delta_{1p}. \quad (3)$$

Если такие матрицы существуют, то умножив (2) на  $Q_p^\alpha(x) Q_q^\beta(y)$ , взяв сумму полученного выражения по  $\alpha$  и  $\beta$  и учтя условие (3), приходим к следующему результату:

$$r(x_p, y_q) = \sum_{\alpha\beta} \langle x^\alpha y^\beta \rangle Q_p^\alpha(x) Q_q^\beta(y). \quad (4)$$

Легко показать из (3), что

$$Q_p^\alpha(z) = \frac{(-1)^{\alpha+p} \Delta_{p\alpha}(z)}{W(z)}, \quad (5)$$

где  $W(z)$  – известный определитель Вандермонда [4]

$$W(z) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \dots & z_0^{n-1} \\ 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_{n-1} & \dots & z_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

а  $\Delta_{p\alpha}(z)$  есть минор этого определителя, соответствующий элементу  $z_p^\alpha$ . Таким образом, матрицы  $Q_p^\alpha(x)$  и  $Q_q^\beta(y)$  не зависят от средних величин, и потому формула (4) – это разложение функции распределения  $r(x_p, y_q)$  по матрице моментов  $\langle x^\alpha y^\beta \rangle$ .

Из (5) следует, что матрица  $Q_p^\alpha(z)$  удовлетворяет условию

$$\sum_p z_p^\alpha Q_p^{\alpha'}(z) = \delta_{\alpha\alpha'} . \quad (6)$$

Пользуясь условием (6), легко показать, что

$$L^{xy} = \sum_q' \sum_\beta \frac{\langle x y^\beta \rangle - \langle x \rangle \langle y^\beta \rangle}{\langle x \rangle} Q_q^\beta(y) , \quad (7a)$$

$$L^{yx} = \sum_p' \sum_\alpha \frac{\langle y x^\alpha \rangle - \langle y \rangle \langle x^\alpha \rangle}{\langle y \rangle} Q_p^\alpha(x) . \quad (7b)$$

Мы видим, что информация о средних величинах факторизуется в каждом слагаемом в (7a) и (7b) от информации о спектрах случайных величин  $x$  и  $y$ . Наличие такой факторизации позволяет трактовать формулы (7a) и (7b) как разложения критериев относительных корреляций по элементам корреляционной матрицы, т.е. как соотношения, связывающие фундаментальные понятия подхода [2] с фундаментальным понятием математической статистики.

В критерии  $L^{xy}$  фигурируют лишь средние значения выражений, зависящих от  $x$  линейно. В то же время эти выражения содержат все допустимые степени признака  $y$ . Иными словами, в организации относительной корреляции признака  $x$  с признаком  $y$  эти признаки играют разные роли. Именно, признак  $x$  принимает пассивное участие, а признак  $y$  за счёт нужного числа своих степеней формирует структуру соответствующей относительной корреляции. В случае критерия  $L^{xy}$  роли признаков  $x$  и  $y$  меняются местами. Замечательно также, что критерии  $L^{xy}$  и  $L^{yx}$  сами отбирают те элементы корреляционной матрицы, которые причастны к делу. Тем самым автоматически решается отмеченный выше вопрос об участии корреляционной матрицы в формировании относительных корреляций.

Мы благодарны В.И. Луценко за стимулирующие обсуждения.

#### Литература

1. D. Bohm. Quantum Theory. New York. Prentice-Hall. Inc. 1952.
2. И. В. Луценко, В. М. Тер-Антонян. ОИЯИ P2-90-109, Дубна, 1990.
3. Г. Крамер. Математические методы статистики. М.: ИЛ, 1948.
4. R. Horn, C. Johnson. Matrix Analysis. Cambr. Univ. Press, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 декабря 1992 года.

Луценко И.В., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М.  
Относительные корреляции и корреляционная матрица

P2-92-504

Найдена связь критериев относительных парных корреляций с корреляционной матрицей  $\langle x^\alpha y^\beta \rangle - \langle x^\alpha \rangle \langle y^\beta \rangle$ .

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод авторов

Lutsenko I.V., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M.  
Relative Correlations and Correlation Matrix

P2-92-504

Direct relationship between criteria of relative pair correlations and the correlation matrix  $\langle x^\alpha y^\beta \rangle - \langle x^\alpha \rangle \langle y^\beta \rangle$  is derived.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992

7 р.74 к.



Редактор Е.В.Калинникова. Макет Н.А.Киселевой.

Подписано в печать 17.12.92.

Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 0,43.

Тираж 490. Заказ 45929.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.  
Дубна Московской области.