Краткие сообщения ОИЯИ № 1[47]-91 *JINR Rapid Communications No.1[47]-91*
УДК 530.14.61

НЕПЕРТУРБАТИВНЫЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ. АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

А.Н. Сисакян, И.Л.Соловцов*

Предлагается непертурбативный метод построения эффективного потенциала, который содержит элемент вариационной процедуры вычисления основного вклада, а также позволяет находить соответствующие поправки и исследовать вопрос стабильности результата. Предлагаемый подход базируется только на гауссовых функциональных квадратурах и не требует введения новых фейнмановских диаграмм по сравнению с теорией возмущений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Nonperturbative Effective Potential. Unharmonic Oscillator

A.N.Sissakian, I.L.Solovtsov

The new method of the effective potential construction is proposed. It contains some variational procedure for calculating the main term in the effective potential and also gives the possibility to find the following terms in the decomposition and to investigate the stability of results. The proposed approach is based only on the Gauss functional integrals and does not require introducing new Feynman diagrams differing from the ordinary ones.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Понятие эффективного потенциала имеет широкую область применения в квантовой теории поля. Одним из наиболее распространенных методов вычисления эффективного потенциала является его разложение по числу петель /1/ . Это разложение связано с квазиклассическим приближением, и его нельзя рассматривать как существенный выход за рамки теории возмущений. К непертурбативным подходам относятся так называемые вариационные

*Гомельский политехнический институт

методы[2,3], к числу которых принадлежит метод гауссова эффективного потенциала[4-7]. Вариационные подходы, как правило, сталкиваются с трудностью, связанной с отсутствием в рамках метода алгоритма вычисления поправок к основному вкладу. В связи с этим встает вопрос об устойчивости и надежности получаемых результатов.

В настоящей работе мы предлагаем новый непертурбативный метод построения эффективного потенциала. Метод содержит элемент вариационной процедуры — оптимальный выбор свободных параметров и вместе с тем дает алгоритм вычисления поправок любого порядка. Так же как и в теории возмущений, мы используем лишь гауссовы функциональные квадратуры и понимаем функциональный интеграл по бозонным полям с помощью соотношения

$$\int D\phi \exp\{i[\frac{1}{2}\langle\phi K \phi\rangle + \langle J\phi\rangle]\} =$$

$$= [\det \frac{K}{-\partial^2 - m^2}]^{-1/2} \exp[-\frac{i}{2}\langle J K^{-1} J\rangle]. \qquad (1)$$

Важной особенностью предлагаемого подхода является тот факт, что он не требует введения новых диаграмм с иной структурой, чем в теории возмущений. Более того, для построения N-го порядка нашей аппроксимации нужны лишь те диаграммы, которые формируют N-й порядок стандартной теории возмущений. Изменение коснется лишь вида пропагатора, участвующего в фейнмановских правилах.

В данной работе мы продемонстрируем эффективность метода на примере ангармонического осциллятора, который всегда выступает пробной задачей в подобного рода рассмотрениях, так как в рамках формализма функционального интеграла представляет собой одномерную модель теории поля с взаимодействием $\lambda\phi^4$.

Мы будем вычислять производящий функционал функций Грина

$$W[J] = \int D\phi \exp\{i[S[\phi] + \langle J\phi\rangle\} \qquad (2)$$

для ангармонического осциллятора с обезразмеренным действием

$$S[\phi] = S_0[\phi] - \omega^2 S[\phi] - S_I[\phi], \qquad (3)$$

где

$$\omega^2 = \lambda^{-2/3} m^2, \quad S_0 = \frac{1}{2}\int dt\, \dot\phi^2, \quad \tilde S = \frac{1}{2}\int dt\, \phi^2, \quad S_I = \int dt\, \phi^4. \tag{4}$$

При этом будем иметь в виду, что нас в конечном счете интересует эффективный потенциал, получающийся из эффективного действия при постоянных конфигурациях поля, в пределе сильной связи $\omega^2 \to 0$.

Перепишем действие (3) в виде

$$S[\phi] = S_0'[\phi] - S_I'[\phi], \tag{5}$$

где

$$S_0'[\phi] = S_0 - \omega^2 \tilde S - a^2 \tilde S^2/T, \tag{6}$$

$$S_I'[\phi] = S_I - a^2 \tilde S^2/T. \tag{7}$$

Введение вариационного параметра с помощью отношения a^2/T связано с нашей конечной целью — построением эффективного потенциала. Для постоянных конфигураций полей параметр a^2 не будет зависеть от "объема" x-пространства T. Новое разложение для $W[J]$ получим с помощью разложения экспоненты в (2) по степеням $S_I'[\phi]$ (в связи с этим см. /8/). В результате находим

$$W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k!} \int D\phi\, (-S_I)^k \times$$
$$\times \left(\frac{a^2}{T}\tilde S^2\right)^{n-k} \exp[i(S_0' + \langle J\phi\rangle)]. \tag{8}$$

Во-первых, отметим, что из предэкспоненты в (8) выражение $(a^2\tilde S^2/T)^{n-k}$ можно исключить, если воспользоваться соотношением

$$\left(\frac{a^2}{T}\tilde S^2\right)^p \exp\left(-i\frac{a^2}{T}\tilde S^2\right) = \left(i\frac{d}{d\epsilon}\right)^p \exp\left(-i\epsilon\frac{a^2}{T}\tilde S^2\right)\Big|_{\epsilon=1}. \tag{9}$$

Такой прием позволит не вводить в рассмотрение новых фейнмановских диаграмм. Во-вторых, из-за присутствия слагаемого, пропорционального $\tilde S^2$, в S_0' функциональный интеграл в (8) не является гауссовым. Однако с помощью преобразования

$$\exp(-iA^2) = \exp(-i\frac{\pi}{4})\, T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\sqrt{\pi}} \times \tag{10}$$
$$\times \exp[\, iTv^2/4 \pm ivT^{1/2}A\,]$$

мы приходим к функциональному интегралу гауссова вида. В результате в N-м порядке нашей аппроксимации находим

$$W^{(N)}[J] = \exp(-i\frac{\pi}{4})\, T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\sqrt{\pi}} \exp(iTv^2/4) \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)} \left(\frac{d}{d\epsilon}\right)^{n-k} \left[\det \frac{-\partial^2 - M^2}{-\partial^2 - m^2}\right]^{-1/2} \omega_k[J, M^2], \tag{11}$$

где $\omega_k[J, M^2]$ — обычные коэффициенты ряда теории возмущений

$$\omega_k[J, M^2] = \frac{(-i)^k}{k!}\left[\int dt \frac{\delta^4}{\delta J^4(t)}\right]^k \exp\{-\frac{i}{2} <J \Delta J>\} \tag{12}$$

с пропагатором

$$\Delta(p) = (p^2 - M^2 + i0)^{-1}, \quad M^2 = \omega^2 + a \cdot v \cdot \sqrt{\epsilon}\,. \tag{13}$$

Вычисляя функциональный определитель в (11), для первого порядка (N =1) получим

$$W^{(1)}[J] = \exp(-i\pi/4)\, T^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{2\sqrt{\pi}} \exp[\, iTS(v)\,] \times$$
$$\times [\, 1 + (\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{d}{d\epsilon} \ln\tilde{\omega}_0)\,], \tag{14}$$

где

$$S(v) = \frac{1}{2}\frac{J^2}{M^2} + \frac{v^2}{4} - \frac{1}{2}(M - m)\,, \tag{15}$$

$$\tilde{\omega}_0^2 = \exp\{iT \cdot [\frac{J^2}{2M^2} - \frac{1}{2}(M - m)]\}, \tag{16}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = -iT[\frac{3}{4}\frac{1}{M^2} + 3\frac{J^2}{(M^2)^{5/2}} + \frac{J^4}{M^8}]. \tag{17}$$

Интеграл по v в (14) содержит большой параметр T и может быть вычислен методом стационарной фазы. Выражения (14)-(17) написаны для $J = \mathrm{const}$, что достаточно для получения эффективного потенциала, который определяется соотношением

$$V_{eff}(\phi_0) = J\phi_0 - Z[J], \tag{18}$$

где $Z[J]$ — производящий функционал связанных функций Грина

$$Z[J] = (iT)^{-1}\ln W[J], \tag{19}$$

а J находится как корень уравнения

$$\phi_0 = \frac{dZ[J]}{dJ}. \tag{20}$$

Для $Z[J]$ из (14)-(17) в пределе сильной связи ($\omega^2 = 0$) находим

$$Z^{(1)}[J] = Z_0[J] + Z_1[J], \tag{21}$$

где

$$Z_0[J] = \frac{3}{4}\frac{J^2}{M^2} - \frac{3}{8}M, \tag{22}$$

$$Z_1[J] = \frac{1}{4}\frac{J^2}{M^2} + \frac{1}{8}M - [\frac{3}{4}\frac{1}{M^2} + 3\frac{J^2}{M^5} + \frac{J^4}{M^8}]. \tag{23}$$

Вариационный параметр M в (22) и (23) должен быть фиксирован с помощью некоторой оптимизационной процедуры. Естественными представляются следующие две возможности. Во-первых, можно потребовать минимизации последней вычисляемой поправки. В данном случае речь идет о $Z_1[J]$. Наиболее благоприятной является ситуация, когда параметр M является корнем уравнения

$$Z_1[J] = 0. \tag{24}$$

Во-вторых, учитывая, что точное значение $Z[J]$ не зависит от вариационного параметра и, следовательно, $\partial Z/\partial M = 0$, естественно потребовать, чтобы вариационный параметр M удовлетворял уравнению

$$\frac{\partial Z^{(1)}[J]}{\partial M} = 0. \tag{25}$$

Выбрав ту или иную версию процедуры оптимизации, с помощью (18), (20)-(23) можно построить $V^{(1)}_{eff}(\phi_0)$. Для сравнения с известными численными результатами найдем разложение эффективного потенциала в окрестности минимума

$$V^{(1)}_{eff}(\phi_0) = E^{(1)}_0 + \frac{\mu^2}{2}\phi_0^2 + O(\phi_0^4). \tag{26}$$

Для энергии основного состояния E_0 и для массового параметра μ^2 оптимизация как с помощью (24), так и на основе (25) приводит к одним и тем же значениям

$$E^{(1)}_0 = \frac{3}{8}(6\lambda)^{1/3} = 0{,}681\,\lambda^{1/3}, \quad \mu^2 = (6\lambda)^{2/3} = 3{,}302\,\lambda^{2/3}. \tag{27}$$

Для сравнения приведем соответствующие точные значения /9/

$$E_0^{\text{точн}} = 0{,}668\,\lambda^{1/3}, \quad \mu^2_{\text{точн}} = 3{,}009\,\lambda^{2/3}. \tag{28}$$

Авторы благодарят В.Г.Кадышевского, Д.И.Казакова, Г.В.Ефимова, С.Н.Неделько и К.Робертса за интерес к работе и полезные обсуждения полученных результатов.

Литература

1. Coleman S., Weinberg S. — Phys.Rev., 1973, v.D7, No.6, p.1888.
2. Efimov G.V. — Commun.Math.Phys., 1979, v.65, No.1, p.15; Ефимов Г.В., Иванов М.А. — Препринт ОИЯИ Р2-81-707, Дубна, 1981;
   Ефимов Г.В. — Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985.
3. Bornes T., Ghandour T. — Phys.Rev., 1980, v.D22, No.4, p.924.

4. Stevenson P.M. — Phys.Rev., 1984, v.D30, No.8, p.1712;
Phys.Rev., 1985, v.D32, No.6, p.1389;
Hajj G.A., Stevenson P.M. — Phys.Rev., 1988, v.D37, No.2, p.413.
5. Stevenson P.M., Alles B., Tarrach R. — Phys.Rev., 1987, v.D35, No.8, p.2407;
Stevenson P.M. — Z.Phys.C — Part. and Fields, 1987, v.35, No.4, p.467.
6. Bollini C.G., Giambiagi J.J. — Nuovo Cimento, 1986, v.93A, No.2, p.113.
7. Ritshel U. — Phys.Lett., 1989, v.227B, No.2, p.251.
8. Holliday I.G., Suranyi P. — Phys.Lett., 1979, v.85B, No.4, p.421;
Phys.Rev.h 1980, v.D21, No.6, p.1529;
Ushveridze A.C. — Phys.Lett., 1984, v.142B, No.5, 6, p.403.
9. Hioe F.T., Montroll E.W. — Journ.Math.Phys., 1975, v.16, No.9, p.1945;
Hioe F.T., MacMillen D., Montroll E.W. — Phys.Rep., 1978, v.43, No.7, p.305;
Schiff L.I. — Phys.Rev., 1953, v.92, p.766.

Рукопись поступила 12 марта 1991 года.