ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 74, № 2
февраль, 1988

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ ДВУМЕРНОГО АТОМА ВОДОРОДА В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

Давтян Л. С. [1], Погосян Г. С. [1], Сисакян А. Н.,
Тер-Антонян В. М. [1]

Исследован вопрос о разложениях в фундаментальных параболических базисах двумерного атома водорода в непрерывном спектре. Получены интегральные представления для коэффициентов, определяющих такие разложения. Доказано, что эти коэффициенты выражаются через обобщенные гипергеометрические функции ${}_3F_2$ от единичного аргумента.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерным атомом водорода (ДАВ) принято называть систему, стационарные состояния которой описываются уравнением Шредингера ($\hbar=\mu=e=1$)

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Psi=E\Psi.$$

Известно [1], что ДАВ наделен скрытой симметрией и что переменные в этом уравнении разделяются в полярных и двух параболических системах координат. Каждое из получающихся решений (фундаментальные базисы ДАВ) является собственной функцией одного из генераторов группы скрытой симметрии. В работе [2] были получены преобразования, связывающие фундаментальные базисы в дискретном спектре. Заметим, что исследование такого типа преобразований составляет одну из важных задач теории квантовых систем со скрытой симметрией [3]. Недавно нами в работе [4] были получены разложения полярного базиса ДАВ по параболическим в непрерывном спектре. Для полного решения вопроса о преобразованиях в фундаментальных базисах ДАВ оставалось найти при $E>0$ разложения одного параболического базиса по другому. Цель настоящей статьи — восполнить этот пробел.

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ ДАВ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

Координаты, о которых шла речь выше, имеют вид

$$x=r\cos\varphi,\quad 0\leqslant r<\infty;\quad y=r\sin\varphi,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi;\quad 2x=u^2-v^2,$$
$$0\leqslant u<\infty;\quad y=uv,\quad -\infty<v<\infty,\quad x=\tilde{u}\tilde{v},\quad 0\leqslant\tilde{u}<\infty,\quad 2y=\tilde{u}^2-\tilde{v}^2,$$
$$-\infty<\tilde{v}<\infty.$$

[1] Ереванский государственный университет.

Согласно работе [4] при $E>0$ $(k=2\sqrt{E})$ фундаментальные базисы ДАВ определяются следующими выражениями:

$$\Psi_{km}(r,\varphi)=C_{km}\frac{(-2ikr)^{|m|}}{(2|m|)!}e^{ikr}\times \tag{1}$$
$$\times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+|m|-\frac{i}{k};2|m|+1;-2ikr\right)\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\Psi^{(+)}_{k\beta}(u,v)=C^{(+)}_{k\beta}\exp\left\{ik\frac{u^2+v^2}{2}\right\}\times \tag{2}$$
$$\times {}_1F_1\left(a_\beta;\frac{1}{2};-iku^2\right){}_1F_1\left(a_{-\beta};\frac{1}{2};-ikv^2\right),$$

$$\Psi^{(-)}_{k\beta}(u,v)=C^{(-)}_{k\beta}\exp\left\{ik\frac{u^2+v^2}{2}\right\}2kuv\times \tag{3}$$
$$\times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+a_\beta;\frac{3}{2};-iku^2\right){}_1F_1\left(\frac{1}{2}+a_{-\beta};\frac{3}{2};-ikv^2\right).$$

Второй параболический базис $\Psi^{(+)}_{k\mu}$, $\Psi^{(-)}_{k\mu}$ получается из (2) и (3) заменами $\beta\to\mu$, $(u,v)\to(\tilde u,\tilde v)$. Как видно, каждый из параболических базисов разбивается на два подбазиса, имеющих определенную четность относительно замены $y\to -y$ и $x\to -x$, соответственно[2)]. Выше приняты следующие обозначения: β и μ — это константы разделения в параболических координатах (u,v) и $(\tilde u,\tilde v)$, пробегающие непрерывный спектр вещественных значений $(-\infty<\beta<\infty,\ -\infty<\mu<\infty)$.

Величина a_σ определена формулой

$$a_\sigma=\frac{1}{4}-\frac{i}{2k}(1+\sigma). \tag{4}$$

Если придерживаться условий нормировки

$$\int_0^\infty r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\,\Psi^*_{k'm'}(r,\varphi)\,\Psi_{km}(r,\varphi)=2\pi\delta(k'-k)\,\delta_{mm'},$$

$$\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^\infty dw\,(\lambda^2+w^2)\,\Psi^{*(\pm)}_{k'\sigma'}(\lambda,w)\,\Psi^{(\pm)}_{k\sigma}(\lambda,w)=2\pi\delta(k'-k)\,\delta(\sigma'-\sigma),$$

то константы C_{km} и $C^{(\pm)}_{k\sigma}$ имеют вид

$$C_{km}=i^m e^{\pi/2k}\sqrt{2k}\,|\Gamma(1/2+|m|-i/k)|,$$

$$C^{(+)}_{k\sigma}=\frac{e^{\pi/2k}}{2\pi^{1/2}}|\Gamma(a_\sigma)\Gamma(a_{-\sigma})|,$$

---

2) В двумерных системах такое разбиение носит принципиальный характер. Этот вопрос детально освещен в работах [1, 5].

$$C^{(-)}_{k\sigma}=\frac{e^{\pi/2k}}{\pi^{3/2}}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+a_\sigma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a_{-\sigma}\right)\right|.$$

Фазовый множитель i^m в C_{km} принят ради удобства.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ДВА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ БАЗИСА

Свойством полноты в непрерывном спектре обладает система волновых функций, включающая в себя параболические базисы обеих четностей. Из сказанного следует, что интересующие нас разложения могут быть записаны следующим образом:

$$\Psi^{(+)}_{k\mu}(\tilde{u},\tilde{v})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[P^{(++)}_{k\mu\beta}\Psi^{(+)}_{k\beta}(u,v)+P^{(+-)}_{k\mu\beta}\Psi^{(-)}_{k\beta}(u,v)]d\beta, \tag{5}$$

$$\Psi^{(-)}_{k\mu}(\tilde{u},\tilde{v})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[P^{(-+)}_{k\mu\beta}\Psi^{(+)}_{k\beta}(u,v)+P^{(--)}_{k\mu\beta}\Psi^{(-)}_{k\beta}(u,v)]d\beta. \tag{6}$$

Из формул (2)–(3) видно, что межбазисные интегралы перекрытия сложны для прямого вычисления. Поэтому мы используем косвенный метод, опирающийся на установленные в работе [4] разложения параболических подбазисов по полярным:

$$\Psi^{(\pm)}_{k\beta}(u,v)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}W^{(\pm)}_{k\beta m}\Psi_{km}(r,\varphi), \tag{7}$$

$$\Psi^{(\pm)}_{k\mu}(\tilde{u},\tilde{v})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\pi/2}W^{(\pm)}_{k\mu m}\Psi_{km}(r,\varphi). \tag{8}$$

Заметим, что разложение (8) получается из (7), если учесть, что замена $(u,\ v)\leftrightarrow(\tilde{u},\ \tilde{v})$ эквивалентна преобразованию $x\leftrightarrow y$. Из (5)–(8) легко показать, что коэффициенты P связаны с коэффициентами W следующими соотношениями:

$$P^{(r,t)}_{k\mu\beta}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^mW^{(r)}_{k\mu m}W^{*(t)}_{k\beta,-m}, \tag{9}$$

в которых индексы (r) и (t) принимают значения $(+)$ и $(-)$. Формула (9) составляет основу дальнейших вычислений.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Для коэффициентов W интегральные представления были получены в работе [4]:

$$W^{(+)}_{k\sigma m}=2\sqrt{\pi}\,2^{-i/k}\frac{C^{(+)}_{k\sigma}\,\Gamma(1/2+|m|+i/k)}{C_{km}\Gamma(a_\sigma^*)\Gamma(a_{-\sigma}^*)}\int\limits_0^\pi(1-\cos\varphi)^{-a_\sigma}\times$$
$$\times(1+\cos\varphi)^{-a_{-\sigma}}\cos m\varphi\,d\varphi,$$

$$W_{k\sigma m}^{(-)}=\sqrt{\pi}\,2^{-i/k}\frac{C_{k\sigma}^{(-)}\Gamma(^1/_2+|m|+i/k)}{C_{km}\Gamma(^1/_2+a_\sigma^*)\Gamma(^1/_2+a_{-\sigma}^*)}\int_0^\pi(1-\cos\varphi)^{-a_\sigma}\times$$
$$\times(1+\cos\varphi)^{-a_{-\sigma}}\sin m\varphi\,d\varphi.$$

Подставляя эти формулы в (9) и используя тождество

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}=2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\varphi-2\pi m),$$

после довольно долгих вычислений получим следующие интегральные представления для коэффициентов P:

$$P_{k\mu\beta}^{(++)}=\frac{\pi}{2}A_{k\mu\beta}^{(++)}(B_{k\mu\beta}+B_{k\beta,-\mu}^*+B_{k\mu,-\beta}-B_{k,-\beta,-\mu}^*),$$

$$P_{k\mu\beta}^{(+-)}=\frac{\pi}{2i}A_{k\mu\beta}^{(+-)}(B_{k\beta,-\mu}^*-B_{k\mu\beta}+B_{k,-\beta,-\mu}^*-B_{k\mu,-\beta}),$$

$$P_{k\mu\beta}^{(-+)}=\frac{\pi}{2i}A_{k\mu\beta}^{(-+)}(B_{k\mu\beta}+B_{k\beta,-\mu}^*-B_{k\mu,-\beta}-B_{k,-\beta,-\mu}^*),$$

$$P_{k\mu\beta}^{(--)}=\frac{\pi}{2}A_{k\mu\beta}^{(--)}(B_{k\mu\beta}-B_{k\beta,-\mu}^*+B_{k,-\beta,-\mu}^*-B_{k\mu,-\beta}).$$

Здесь величина $B_{k\mu\beta}$ задается интегралом

$$B_{k\mu\beta}=\int_0^{\pi/2}(1-\sin\varphi)^{-a_{-\mu}}(1+\sin\varphi)^{-a_\mu}(1-\cos\varphi)^{-a_{-\beta}^*}(1+\cos\varphi)^{-a_\beta}\,d\varphi,$$

а постоянные A определяются выражениями

$$A_{k\mu\beta}^{(++)}=\frac{2\pi}{k}\frac{C_{k\mu}^{(+)}C_{k\beta}^{(+)}e^{-\pi/k}}{\Gamma(a_\mu^*)\Gamma(a_{-\mu}^*)\Gamma(a_\beta)\Gamma(a_{-\beta})},$$

$$A_{k\mu\beta}^{(+-)}=\frac{\pi}{k}\frac{C_{k\mu}^{(+)}C_{k\beta}^{(-)}e^{-\pi/k}}{\Gamma(a_\mu^*)\Gamma(a_{-\mu}^*)\Gamma(^1/_2+a_\beta)\Gamma(^1/_2+a_{-\beta})},$$

$$A_{k\mu\beta}^{(-+)}=\frac{\pi}{k}\frac{C_{k\mu}^{(-)}C_{k\beta}^{(+)}e^{-\pi/k}}{\Gamma(^1/_2+a_\mu^*)\Gamma(^1/_2+a_{-\mu}^*)\Gamma(a_\beta)\Gamma(a_{-\beta})},$$

$$A_{k\mu\beta}^{(--)}=\frac{\pi}{2k}\frac{C_{k\mu}^{(-)}C_{k\beta}^{(-)}e^{-\pi/k}}{\Gamma(^1/_2+a_\mu^*)\Gamma(^1/_2+a_{-\mu}^*)\Gamma(^1/_2+a_\beta)\Gamma(^1/_2+a_{-\beta})}$$

Наконец, совершая замену переменной $\sin\varphi=\operatorname{th}\nu$ в $B_{k\mu\beta}$ и $B_{k\mu,-\beta}$ и $\cos\varphi=\operatorname{th}\nu$ в $B_{k\beta,-\mu}^*$ и $B_{k,-\beta,-\mu}^*$ и вводя функцию

$$g_\beta(\nu)=(\operatorname{ch}\nu-1)^{-a_\beta^*}(\operatorname{ch}\nu+1)^{-a_\beta^*},$$

приходим к следующим интегральным представлениям:

$$P_{k\mu\beta}^{(++)}=\pi A_{k\mu\beta}^{(++)}\int_0^\infty\cos\left(\frac{\mu\nu}{k}\right)\{g_\beta(\nu)+g_{-\beta}(\nu)\}\,d\nu, \tag{10}$$

$$(11)\qquad P_{k\mu\beta}^{(+-)}=-\pi A_{k\mu\beta}^{(+-)}\int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{\mu\nu}{k}\right)\{g_\beta(\nu)+g_{-\beta}(\nu)\}d\nu,$$

$$(12)\qquad P_{k\mu\beta}^{(-+)}=-i\pi A_{k\mu\beta}^{(-+)}\int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{\mu\nu}{k}\right)\{g_\beta(\nu)-g_{-\beta}(\nu)\}d\nu,$$

$$(13)\qquad P_{k\mu\beta}^{(--)}=i\pi A_{k\mu\beta}^{(--)}\int\limits_0^\infty \sin\left(\frac{\mu\nu}{k}\right)\{g_\beta(\nu)-g_{-\beta}(\nu)\}d\nu.$$

Полученные формулы позволяют непосредственно проверить ряд общих соотношений, которым должны подчиняться коэффициенты $P_{k\mu\beta}$. С их помощью можно совершить аналитическое продолжение межбазисных преобразований (5) и (6) в область дискретного спектра и восстановить результаты, полученные в работе [5]. Мы не будем останавливаться на этих вопросах и перейдем к вычислению интегралов (10)—(13).

5. ЯВНЫЙ ВИД КОЭФФИЦИЕНТОВ $P_{k\mu\beta}^{(r,t)}$

Для нахождения явного вида коэффициентов P воспользуемся известными формулами [6]

$$(14)\qquad \cos\left(\frac{\mu\nu}{k}\right)=\left(\operatorname{ch}\frac{\nu}{2}\right)^{-2i\mu/k}{}_2F_1\left(\frac{i\mu}{k},\frac{1}{2}+\frac{i\mu}{k};\frac{1}{2};\operatorname{th}^2\frac{\nu}{2}\right),$$

$$(15)\qquad \sin\left(\frac{\mu\nu}{k}\right)=\frac{2\mu}{k}\operatorname{th}\frac{\nu}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{\nu}{2}\right)^{-2i\mu/k}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(1+\frac{i\mu}{k},\frac{1}{2}+\frac{i\mu}{k};\frac{3}{2};\operatorname{th}^2\frac{\nu}{2}\right).$$

Подставляя (14) и (15) в интегральные представления (10)—(13), раскладывая функции ${}_2F_1$ в ряд и учитывая соотношение [6]

$$\int\limits_0^\infty(\operatorname{sh}\nu)^\alpha(\operatorname{ch}\nu)^{-\gamma}d\nu=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right),$$

справедливое при $\operatorname{Re}\alpha>-1$, $\operatorname{Re}(\alpha-\gamma)>0$, приходим окончательно к следующим выражениям для $P_{k\mu\beta}$:

$$(16)\qquad P_{k\mu\beta}^{(++)}=\frac{\sqrt{\pi^3}}{2^pk}e^{-\pi/k}C_{k\beta}^{(+)}C_{k\mu}^{(+)}\frac{\Gamma(1-a_\mu)}{\Gamma(^1/_2-a_\mu)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma(a_\beta)\Gamma(1-p-a_\beta)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-p,\,^1/_2-p,\,a_{-\beta}\\ ^1/_2,\,1-p-a_\beta\end{matrix}\,\Big|\,1\right)+(\beta\to-\beta)\right\},$$

$$(17)\qquad P_{k\mu\beta}^{(+-)}=-\frac{ip\sqrt{\pi^3}}{k2^p}e^{-\pi/k}C_{k\mu}^{(+)}C_{k\beta}^{(-)}\frac{\Gamma(1-a_\mu)}{\Gamma(^1/_2-a_\mu)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma(^1/_2+a_\beta)\Gamma(^3/_2-p-a_{-\beta})}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}^1/_2-p,\,1-p,\,^1/_2+a_\beta\\ ^3/_2,\,^3/_2-p-a_{-\beta}\end{matrix}\right)+\right.$$

$$+(\beta\to-\beta)\Big\},$$

(18) $$P^{(-+)}_{k\mu\beta}=-\frac{i\sqrt{\pi^3}}{2k2^p}e^{-\pi/k}C^{(-)}_{k\mu}C^{(+)}_{k\beta}\frac{\Gamma(^1/_2-a_{-\mu})}{\Gamma(1-a_\mu)}\times$$
$$\times\Big\{\frac{1}{\Gamma(a_\beta)\Gamma(1-p-a_\beta)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-p,{}^1/_2-p,a_{-\beta}\\{}^1/_2,1-p-a_\beta\end{matrix}\Big|\,1\right)+(\beta\to-\beta)\Big\},$$

(19) $$P^{(--)}_{k\mu\beta}=-\frac{p\sqrt{\pi^3}}{2k2^p}e^{-\pi/k}C^{(-)}_{k\mu}C^{(-)}_{k\beta}\frac{\Gamma(^1/_2-a_{-\mu})}{\Gamma(1-a_\mu)}\times$$
$$\times\Big\{\frac{1}{\Gamma(^1/_2+a_\beta)\Gamma(^3/_2-p-a_\beta)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}{}^1/_2-p,1-p,{}^1/_2+a_\beta\\{}^3/_2,{}^3/_2-p-a_{-\beta}\end{matrix}\Big|\,1\right)+$$
$$+(\beta\to-\beta)\Big\},$$

где введено обозначение $-i\mu/k=p$. Приведем для сравнения также явный вид коэффициентов W. Согласно [4]

(20) $$W^{(+)}_{k\beta m}=\sqrt{2\pi}\frac{C^{(+)}_{k\beta}\Gamma(1-a_{-\beta})}{C_{km}\Gamma(1-a_{-\beta}-|m|)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}-|m|,{}^1/_2-|m|,a_\beta\\{}^1/_2,1-|m|-a_{-\beta}\end{matrix}\Big|\,1\right),$$

(21) $$W^{(-)}_{k\beta m}=m\sqrt{2\pi}\frac{C^{(-)}_{k\beta}\Gamma(^1/_2-a_{-\beta})}{C_{km}\Gamma(^3/_2-a_{-\beta}-|m|)}\times$$
$$\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}{}^1/_2-|m|,1-|m|,{}^1/_2+a_\beta\\{}^3/_2,{}^3/_2-|m|-a_{-\beta}\end{matrix}\Big|\,1\right).$$

Из формул (9) и (16)—(21) легко выводятся следующие математические соотношения:

$$\sum_m i^m\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-|m|,|m|,a_\mu\\{}^1/_2,{}^1/_2-i/k\end{matrix}\Big|\,1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix}-|m|,|m|,{}^1/_2-a_\beta\\{}^1/_2,{}^1/_2+i/k\end{matrix}\Big|\,1\right)=$$
$$=\frac{\Gamma(1-a_{-\mu})\sqrt{\pi^3}}{2^p\Gamma(^1/_2-a_\mu)\operatorname{ch}(\pi/k)}\Big\{\frac{1}{\Gamma(a_\beta)\Gamma(1-p-a_{-\beta})}\times$$
$$\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}-p,{}^1/_2-p,a_{-\beta}\\{}^1/_2,1-p-a_\beta\end{matrix}\Big|\,1\right)+(\beta\to-\beta)\Big\},$$

$$\sum_m i^m m\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-|m|,|m|,a_\mu\\{}^1/_2,{}^1/_2-i/k\end{matrix}\Big|\,1\right){}_3F_2\left(\begin{matrix}1-|m|,1+|m|,1-a_\beta\\{}^3/_2,{}^3/_2+i/k\end{matrix}\Big|\,1\right)=$$
$$=\frac{ip(^1/_2+i/k)\sqrt{\pi^3}\,\Gamma(1-a_{-\mu})}{2^p\operatorname{ch}(\pi/k)\Gamma(^1/_2-a_\mu)}\Big\{\frac{1}{\Gamma(^1/_2+a_\beta)\Gamma(^3/_2-p-a_\beta)}\times$$
$$\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}1-p,{}^1/_2-p,{}^1/_2+a_{-\beta}\\{}^3/_2,{}^3/_2-p-a_\beta\end{matrix}\Big|\,1\right)+(\beta\to-\beta)\Big\},$$

$$\sum_m i^m m^2\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}1-|m|,1+|m|,{}^1/_2+a_\mu\\{}^3/_2,{}^3/_2-i/k\end{matrix}\Big|\,1\right)\times$$

$$\times {}_3F_2\left(\begin{matrix}1-|m|, 1+|m|, 1-a_\beta\\ {}^3/_2, {}^3/_2+i/k\end{matrix}\Bigg| 1\right)=$$

$$=-\frac{p}{2}\frac{\sqrt{\pi^3}({}^1/_4+1/k^2)\Gamma({}^1/_2-a_{-\mu})}{2^p \operatorname{ch}(\pi/k)\Gamma(1-a_\mu)}\left\{\frac{1}{\Gamma({}^1/_2+a_\beta)\Gamma({}^3/_2-p-a_\beta)}\times\right.$$

$$\left.\times {}_3F_2\left(\begin{matrix}{}^1/_2-p, 1-p, {}^1/_2+a_{-\beta}\\ {}^3/_2, {}^3/_2-p-a_\beta\end{matrix}\Bigg| 1\right)+(\beta\to-\beta)\right\}.$$

Заметим, что в частном $\mu=0$ коэффициенты P заметно упрощаются:

$$P_{k0\beta}^{(+-)}=P_{k0\beta}^{(--)}=0,$$

$$P_{k0\beta}^{(++)}=\frac{e^{-\pi/2k}}{k}\operatorname{ch}\frac{\pi\beta}{2k}C_{k\beta}^{(+)},\quad P_{k0\beta}^{(-+)}=-\frac{e^{-\pi/2k}}{k}\operatorname{sh}\frac{\pi\beta}{2k}C_{k\beta}^{(\pm)}.$$

Вследствие вещественности коэффициентов W из (9) следует свойство симметрии $P_{k\mu\beta}=P_{k\beta\mu}$. Поэтому аналогичные выражения справедливы для частного случая $\beta=0$. Наконец, при $\mu=\beta=0$ имеем

$$P_{k00}^{(+-)}=P_{k00}^{(--)}=P_{k00}^{(-+)}=0,\quad P_{k00}^{(++)}=\frac{|\Gamma({}^1/_4+i/_2k)|^2}{2k\sqrt{\pi^3}}.$$

Мы признательны С. И. Виницкому, И. В. Луценко, Л. Г. Мардояну и Л. И. Пономареву за полезные обсуждения.

Литература

[1] *Englefield M. J.* Group Theory and the Coulomb Problem. New York, Sydney, Toronto: Wiley-Interscience, 1972.
[2] *Mardoyan L. G., Pogosyan G. S., Sisakian A. N., Ter-Antonyan V. M.* // J. Phys. 1985. V. A18. № 3. P. 455–466.
[3] *Kalnins E. G., Miller W., Jr., Winternitz P.* // SIAM J. Appl. Math. V. 30. № 4. 1976. P. 630–664.
[4] *Давтян Л. С., Погосян Г. С., Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М.* // ТМФ. 1986. Т. 66. № 2. С. 222–233.
[5] *Cisneros A., McIntosh H. Y.* // J. Math. Phys. 1968. V. 10. P. 277–286.
[6] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, Т. 1. М.: Наука, 1973.

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию 10.VII.1986 г.

TRANSFORMATIONS BETWEEN PARABOLIC BASES OF A TWO-DIMENSIONAL HYTROGEN ATOM IN THE CONTINUOUS SPECTRUM

Davtyan L. S., Pogosyan G. S., Sissakyan A. N., Ter-Antonyan V. M.

Expansions over fundamental parabolic bases are studied for a two-dimensional hydrogen atom in the continuous spectrum. Integral representations are found for the expansion coefficients. It is proved that these coefficients are expressed through values of the generalized hypergeometrical functions ${}_3F_2$ at the unity.