сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-86-436

Л.Г.Мардоян*, Г.С.Погосян*, А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян*

НЕКОТОРЫЕ МЕЖБАЗИСНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ИЗОТРОПНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

*Ереванский государственный университет

1986

В последние годы во многих работах [I -9] отмечалась связь KS - преобразований с физикой водородоподобных атомов во внешних электрическом и сильном магнитном полях. На этой почве в [6] была сформулирована задача о разложениях, связывающих друг с другом базисы атома водорода и четырехмерного изотропного осциллятора. Были выведены общие правила отбора и билинейные соотношения, которым обязаны подчиняться коэффициенты разложений, составлены программы численных и аналитических расчетов на ЭВМ, получен явный вид некоторых коэффициентов при конкретных /некоторых первых/ значениях квантовых чисел. Однако для произвольных значений квантовых чисел явный вид этих коэффициентов до сих пор не удалось установить.

Программа точного аналитического решения указанной задачи включает, на наш взгляд, два этапа. В настоящей статье реализован первый /предварительный/ этап, заключающийся в вычислении коэффициентов, связывающих друг с другом базисы четырехмерного изотропного осциллятора. Второй этап будет разработан в отдельной статье.

Изложение построено следующим образом. В п.п.I и 2 даны необходимые для дальнейшего сведения о координатных системах, в которых производится разделение переменных, и о соответствующих базисах. В п.п. 3 и 4 приведен общий вид межбазисных разложений и выявлены "структурные элементы", входящие в выражения для искомых коэффициентов. Пункт 5 содержит сводку результатов статьи. Необходимые доказательства включены в п. 6. Некоторые частные случаи разобраны в п. 7. Статью замыкают таблицы численных значений коэффициентов.

<u>I. Координаты.</u> Начнем с определения используемых нами координат: а/ канонические координаты $(u, \psi, \theta, \varphi)$

$$u_1 = u \sin\psi \sin\theta \sin\varphi, \qquad u_3 = u \sin\psi \cos\theta,$$

$$u_2 = u \sin\psi \sin\theta \cos\varphi, \qquad u_4 = u \cos\psi,$$

$$0 \le \psi \le \pi, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Здесь u_1, u_2, u_3, u_4 - декартовы координаты, $u=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2}$.
б/ неканонические координаты (u,α,β,γ)

$$u_1 = u\sin\alpha\sin\beta \qquad u_3 = u\cos\alpha\sin\gamma$$

$$u_2 = u\sin\alpha\cos\beta \qquad u_4 = u\cos\alpha\cos\gamma$$

$$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}, \quad 0\le\beta<2\pi, \quad 0\le\gamma<2\pi;$$

в/ двойные полярные координаты $(\rho_1, \rho_2, \beta, \gamma)$

$$u_1 = \rho_1\sin\beta, \qquad u_3 = \rho_2\sin\gamma,$$

$$u_2 = \rho_1\cos\beta, \qquad u_4 = \rho_2\cos\gamma,$$

$$0\le\rho_1<\infty, \quad 0\le\rho_2<\infty, \quad 0\le\beta<2\pi, \quad 0\le\gamma<2\pi.$$

Переменные β и γ в неканонических и двойных полярных координатах выбраны тождественными.

2. Базисы. Так названы нами решения уравнения Шредингера для 4-мерного изотропного осциллятора в приведенных выше координатах.
а/ декартов базис $|C\rangle$

$$|C\rangle = \lambda^2\bar{H}_{n_1}(\lambda u_1)\bar{H}_{n_2}(\lambda u_2)\bar{H}_{n_3}(\lambda u_3)\bar{H}_{n_4}(\lambda u_4) \qquad /1/$$

$$\bar{H}_n(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}}H_n(x), \quad \lambda=\sqrt{\mu\omega/\hbar};$$

б/ канонический $|K\rangle$ и неканонический $|N\rangle$ базисы

$$|K\rangle = R_{n_r' j}(u)\,Y_{jm_1m_2}(\psi,\theta,\varphi), \qquad /2/$$

$$|N\rangle = R_{n'j}(r)\,\tilde{Y}_{jk_1k_2}(\alpha,\beta,\gamma), \qquad /3/$$

$$R_{n'j}(r) = \left\{\frac{2\lambda^4(n'+j+1)!}{(n')!}\right\}^{1/2} \frac{(\lambda r)^j}{(j+1)!} e^{-\lambda^2 r^2/2}\cdot$$

$$\cdot F(-n'; j+2; \lambda^2 r^2),$$

$$Y_{jm_1m_2}(\psi,\theta,\varphi) = \frac{(-1)^{\tilde{m}_2}(j)!\{(2j+2)(j-m_1)!(j+m_1+1)!\}^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,(2j+1)!\,2^{m_1-2j+1}}\cdot$$

$$\cdot(\sin\psi)^{m_1} P_{j-m_1}^{(\tilde{m}_1,\tilde{m}_1)}(\cos\psi)\, Y_{m_1m_2}(\theta,\varphi),$$

где $Y_{m_1m_2}(\theta\varphi)$- обычная сферическая функция, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ - полином Якоби.

$$\tilde{Y}_{jk_1k_2}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{(j+1)(j_0+\sigma_1)!(j_0-\sigma_1)!}{2(j_0+\sigma_2)!(j_0-\sigma_2)!}\right\}^{1/2}\cdot$$

$$\cdot(\sin\alpha)^{|k_1|}(\cos\alpha)^{|k_2|} P_{j_0-\sigma_1}^{(|k_1|,|k_2|)}(\cos 2\alpha)\, e^{ik_1\beta} e^{ik_2\beta}.$$

Приняты обозначения:

$$\tilde{m}_1 = (2m_1+1)/2 \quad , \quad \tilde{m}_2 = (m_2 - |m_2|)/2$$

$$j_0 = j/2\ ; \quad \sigma_1 = (|k_1|+|k_2|)/2, \quad \sigma_2 = (|k_1|-|k_2|)/2\ ;$$

в/ двойной полярный базис $|2\mathcal{P}\rangle$

$$|2\mathcal{P}\rangle = \frac{\lambda^2}{\pi}\,\mathcal{L}_{t_1q_1}(\lambda^2\rho_1^2)\,\mathcal{L}_{t_2q_2}(\lambda^2\rho_2^2)\, e^{iq_1\beta} e^{iq_2\gamma} \qquad /4/$$

$$\mathcal{L}_{tq} = \left\{\frac{(t+|q|)!}{(t)!}\right\}^{1/2} \frac{e^{-x^2/2}}{|q|!}\, x^{|q|/2}\, F(-t; |q|+1; x).$$

Итак, каждый базис определяется своей четверкой квантовых чисел:

$|c\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, $|\mathcal{K}\rangle = (n_0, j, m_1, m_2)$, $|N\rangle = (n_0, j, k_1, k_2)$ $|2\mathcal{P}\rangle = (t_1, t_2, q_1, q_2)$. Очевидно, спектр энергий $E = \hbar\omega(n_0+2)$, $n_0 = n_1+n_2+n_3+n_4$; кратность вырождения уровня энергии $d = (n_0+1)\cdot(n_0+2)(n_0+3)/6$; имеют место связи $2t_1+2t_2+|q_1|+|q_2| = n_0$, $2n'+j = n_0$. Область изменения квантовых чисел такова: $j=0,2,\ldots,n_0$ или $j=1,3,\ldots,n_0$ для четных и нечетных n_0 сооиветственно; $0 \le m_1 \le j$, $|m_2| \le m_1$; $|k_1| \le j$, $|k_2| = 0,2,\ldots, j-|k_1|$; $|k_2| = 1,3,\ldots j-|k_1|$.

3. Межбазисные разложения. Общее число нетривиальных межбазисных разложений равно двенадцати. В силу условия унитарности коэффициенты "прямых" и "обратных" разложений получаются друг из друга комплексным сопряжением. Таким образом, достаточно исследовать следующие шесть разложений:

$$|c\rangle = \sum_{q_1=-n_1-n_2}^{n_1+n_2}{}' \sum_{q_2=-n_3-n_4}^{n_3+n_4}{}' \langle 2\mathcal{P}|c\rangle |2\mathcal{P}\rangle, \qquad /5/$$

$$|c\rangle = \sum_{j=0,1}^{n_0}{}' \sum_{k_1=-n_1-n_2}^{n_1+n_2}{}' \sum_{k_2=-n_3-n_4}^{n_3+n_4}{}' \langle N|c\rangle |N\rangle, \qquad /6/$$

$$|c\rangle = \sum_{j=0,1}^{n_0}{}' \sum_{m_1=0,1}^{n_1+n_2+n_3}{}' \sum_{m_2=-n_1-n_2}^{n_1+n_2}{}' \langle \mathcal{K}|c\rangle |\mathcal{K}\rangle, \qquad /7/$$

$$|2\mathcal{P}\rangle = \sum_{j=0,1}^{n_0}{}' \sum_{k_1=-j}^{j} \sum_{k_2=-j+|k_1|}^{j-|k_1|}{}' \langle N|2\mathcal{P}\rangle |N\rangle, \qquad /8/$$

$$|\mathcal{K}\rangle = \sum_{t_2=0}^{(n_0-|q_1|-|q_2|)/2} \sum_{k_2=-j+|m_2|}^{j-|m_2|} \langle N|\mathcal{K}\rangle |N\rangle, \qquad /9/$$

$$|\mathcal{K}\rangle = \sum_{K_1=-j}^{j} \sum_{K_2=-j+|m_2|}^{j-|m_2|}{}' \langle N|\mathcal{K}\rangle |N\rangle . \qquad /10/$$

Штрихи над знаками сумм означают, что соответствующие суммирования производятся лишь по тем значениям индексов, четность которых совпадает с четностью максимально возможного значения, указанного в сумме.

4. Структурные элементы. Явный вид шести коэффициентов в /5/ - /10/ выражается через три структурных элемента: "укороченную" функцию Вигнера $d^{\tau}_{\lambda,\nu}(\pi/2)$, коэффициенты Клебша-Гордана $C^{c\gamma}_{a\alpha;\,b\beta}$ и объекты $\mathcal{M}^{c\gamma}_{a\alpha;\,b\beta}$, получающиеся аналитическим продолжением обычных коэффициентов Клебша-Гордана $C^{c\gamma}_{a\alpha;\,b\beta}$ в область четвертьцелых значений некоторых индексов. Согласно [11]

$$d^{\tau}_{\lambda,\nu}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^{\lambda-\nu}}{2^{\tau}} \left\{\frac{(\tau+\lambda)!\,(\tau-\lambda)!}{(\tau+\nu)!\,(\tau-\nu)!}\right\}^{1/2} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \binom{\tau+\nu}{\sigma} \binom{\tau-\nu}{\sigma+\lambda-\nu}, \qquad /11/$$

$$\mathcal{M}^{c\gamma}_{a\alpha,\,b\beta} = \frac{\delta_{\gamma,\alpha+\beta}\,\Delta(a,b,c)}{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(c-b+\alpha+1)\Gamma(c-a-\beta+1)} \cdot \left\{\frac{\Gamma(a+\alpha+1)\Gamma(b-\beta+1)\Gamma(c+\gamma+1)\Gamma(c-\gamma+1)(2c+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)\Gamma(b+\beta+1)}\right\}^{1/2} \cdot {}_3F_2\left\{\begin{matrix}-a-b+c,\ -a+\alpha,\ -b-\beta\\ -a+c-\beta+1,\ -b+c+\alpha+1\end{matrix}\middle|\,1\right\}. \qquad /12/$$

В последней формуле

$$\Delta(a,b,c) = \left\{\frac{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(a-b+c+1)\Gamma(b-a+c+1)}{\Gamma(a+b+c+2)}\right\}^{1/2}.$$

Заметим, что объекты $M^{c\gamma}_{a\alpha,b\beta}$ появляются уже в задаче о межбазисных разложениях в трехмерном изотропном осцилляторе [12]. К ним также приводят некоторые задачи квантовой теории углового момента [13]. Таблицы для этих объектов можно найти в [12].

5. Результаты. Приведем формулы, определяющие явный вид коэффициентов, характеризующих исследуемые нами межбазисные разложения :

$$\langle 2P|C\rangle = e^{i\pi\phi} d^{\tau_1}_{\lambda_1\nu_1}\left(\frac{\pi}{2}\right) d^{\tau_2}_{\lambda_2\nu_2}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad /13/$$

$$\phi = (2t_1+2t_2-n_1-n_3)/2, \quad \lambda_1 = q_1/2, \quad \lambda_2 = q_2/2,$$

$$\tau_1 = (n_1+n_2)/2, \quad \tau_2 = (n_3+n_4)/2,$$

$$\nu_1 = (n_2-n_1)/2, \quad \nu_2 = (n_4-n_3)/2,$$

$$\langle N|C\rangle = e^{i\pi\phi} d^{\tau_1}_{s,\nu_1}\left(\frac{\pi}{2}\right) d^{\tau_2}_{\lambda_2,\nu_2}\left(\frac{\pi}{2}\right) C^{c_1\gamma_1}_{a_1\alpha_1;\,b_1\beta_1}, \qquad /14/$$

$$\phi = (2n_1+n_2+n_3+n_0-j-|k_1|)/2, \quad s = k_1/2,$$

$$c_1 = j/2, \quad \gamma_1 = (|k_1|+|k_2|)/2,$$

$$a_1 = (n_0-|k_1|+|k_2|)/4, \quad \alpha_1 = (n_3+n_4-n_1-n_2+|k_1|+|k_2|)/4,$$

$$b_1 = (n_0+|k_1|-|k_2|)/4, \quad \beta_1 = (n_1+n_2-n_3-n_4+|k_1|+|k_2|)/4,$$

$$/15/$$

$$\langle K|C\rangle = e^{i\pi\phi} d^{\tau_1}_{z,\nu_1}\left(\frac{\pi}{2}\right) M^{c_2\gamma_2}_{a_2\alpha_2;\,b_2\beta_2} M^{c_3\gamma_3}_{a_3\alpha_3;\,b_3\beta_3},$$

$$\phi = (|m_2|-n_3)/2, \quad z = m_2/2; \quad c_2 = j/2, \quad \gamma_2 = m_1/2,$$

$$a_2 = (n_0+m_1+1)/4, \quad \alpha_2 = (n_0-2n_4+m_1+1)/4,$$

$$b_2 = (n_0-m_1-1)/4, \quad \beta_2 = (2n_4-n_0+m_1-1)/4,$$

$$c_3 = (2m_1-1)/4, \quad \gamma_3 = (2|m_2|-1)/4,$$

$$a_3 = (n_1+n_2+n_3+|m_2|)/4, \quad \alpha_3 = (n_1+n_2-n_3+|m_2|)/4,$$

$$b_3 = (n_1+n_2+n_3-|m_2|-1)/4, \quad \beta_3 = (n_3-n_1-n_2+|m_2|-1)/4,$$

$$\langle N|2P\rangle = e^{i\pi\phi}\tilde{\delta}_{q_1 k_1}\delta_{q_2 k_2} C^{c_Y \gamma_Y}_{a_Y \alpha_Y;\, b_Y \beta_Y}, \qquad /16/$$

$$\phi = (2t_2+n_0-j)/2, \quad c_Y = j/2, \quad \gamma_Y = (|q_1|+|q_2|)/2,$$

$$a_Y = (t_1+t_2+|q_2|)/2, \qquad \alpha_Y = (t_2-t_1+|q_2|)/2,$$

$$b_Y = (t_1+t_2+|q_1|)/2, \qquad \beta_Y = (t_1-t_2+|q_1|)/2,$$

$$\langle 2P|K\rangle = e^{i\pi\phi}\tilde{\delta}_{q_1 m_2} C^{c_Y \gamma_Y}_{a_Y \gamma_Y;\, b_Y \beta_Y} \cdot \qquad /17/$$

$$\cdot\, C^{m_1 m_2}_{j/2,\, \lambda_1-\lambda_2;\, j/2,\, \lambda_1+\lambda_2},$$

$$\phi = (n_0+2t_2+2m_1+2|q_2|+|m_2|-q_2)/2,$$

$$\langle N|K\rangle = e^{i\pi\phi}\tilde{\delta}_{m_2 k_1} C^{m_1 m_2}_{j/2,\,(k_1-k_2)/2;\, j/2,\,(k_1+k_2)/2}, \qquad /18/$$

$$\phi = (j+m_1+2|k_1|+k_2)/2.$$

6. Комментарии к вычислениям. Опишем методы, использованные нами в вычислениях. При вычислении коэффициентов /14/, /15/ и /18/ мы воспользовались готовыми рецептами, предложенными в работах [14] и [15] и пригодными для изотропного осциллятора произвольной размерности. Формула /13/ выводится с помощью следующей последовательности приемов: подстановка /1/ и /4/ в /5/; переход в левой стороне /5/ к двойным полярным координатам; устремление в обеих частях /5/ ρ_1 и ρ_2 к бесконечности; использование ортогональных функций $\exp(iq_1\beta)$ и $\exp(iq_2\beta)$; сравнение итогового результата с интегральным представлением для функции Вигнера [11]

$$d^{J}_{M,M'}(\beta) = \frac{i^{M-M'}}{2\pi}\left\{\frac{(J+M)!(J-M)!}{(J+M')!(J-M')!}\right\}^{1/2}.$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \left(e^{i\frac{\varphi}{2}} \cos\frac{\beta}{2} + i e^{-i\frac{\varphi}{2}} \sin\frac{\beta}{2}\right)^{J-\mu'} \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos\frac{\beta}{2} + i e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin\frac{\beta}{2}\right)^{J+\mu'} e^{i\mu\varphi} d\varphi .$$

Для получения формулы /16/ необходимо: подставить /2/ и /3/ в /8/; перейти в левой части /8/ к неканоническим координатам; устремить в обеих частях /8/ $U \to \infty$; использовать ортогональность функций $exp(ik_1\beta)$ и $exp(ik_2\gamma)$ и свойство ортогональности полиномов Якоби [16]. После этого задача сведется к вычислению интеграла

$$\mathcal{L} = \int_{-1}^{1} (\sin^2\alpha)^{t_1+|k_1|} (\cos^2\alpha)^{t_2+|k_2|} P_L^{(|k_1|,\,|k_2|)} (\cos 2\alpha) d\cos 2\alpha ,$$

$$L = (j - |k_1| - |k_2|)/2 .$$

Последний шаг состоит в использовании формулы Родрига для полиномов Якоби и следующего интегрального представления для коэффициентов Клебша-Гордана [11]:

$$C^{c\gamma}_{a\alpha;\, b\beta} = \frac{(-1)^{a-c+\beta}}{2^{J+1}} \left\{ \frac{(c+\gamma)!\,(J-2c)!\,(2c+1)}{(a-\alpha)!\,(a+\alpha)!\,(b-\beta)!\,(b+\beta)!\,(c-\gamma)!\,(J-2a)!\,(J-2b)!} \right\}^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{a-\alpha} (1+x)^{b-\beta} \frac{d^{\,c-\gamma}}{dx^{\,c-\gamma}} \left\{ (1-x)^{J-2a} (1+x)^{J-2b} \right\} dx ,$$

$$J = a + b + c .$$

Результат /17/ получается подстановкой /16/ и комплексного сопряжения от /16/ в формулу

$$\langle 2\mathcal{P} | \mathcal{K} \rangle = \sum_{|N\rangle} \langle 2\mathcal{P} | N \rangle \langle N | \mathcal{K} \rangle .$$

7. Некоторые частные случаи. Формулы /II/ - /I8/ позволяют установить таблицу численных значений для обсуждаемых коэффициентов. Такие таблицы приведены ниже. Чтобы составить наглядное представление об исследуемых разложениях имеет смысл выписать несколько конкретных примеров.

а. Пример разложения /5/ :

$$|2010;C\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}|0,-2,0,-1;2P\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}|0,-2,0,1;2P\rangle - -\frac{i}{2}|1,0,0,-1;2P\rangle + \frac{i}{2}|1,0,0,1;2P\rangle - -\frac{i}{2\sqrt{2}}|0,2,0,-1;2P\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}|0,2,0,1;2P\rangle .$$

б. Пример разложения /6/:

$$|2010;C\rangle = -\frac{i}{2\sqrt{3}}|3,1,0,-1;N\rangle + \frac{i}{2\sqrt{3}}|3,1,0,1;N\rangle - -\frac{i}{2\sqrt{2}}|3,3,-2,-1;N\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}|3,3,-2,1;N\rangle - -\frac{i}{\sqrt{6}}|3,3,0,-1;N\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|3,3,0,1;N\rangle - -\frac{i}{2\sqrt{2}}|3,3,2,-1;N\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}}|3,3,2,1;N\rangle .$$

в. Пример разложения /7/:

$$|2010;C\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}|3,1,1,0;\mathcal{K}\rangle - \frac{1}{\sqrt{30}}|3,3,1,0;\mathcal{K}\rangle - -\frac{1}{2}|3,3,3,-2;\mathcal{K}\rangle - \sqrt{\frac{3}{10}}|3,3,3,0;\mathcal{K}\rangle - \frac{1}{2}|3,3,3,2;\mathcal{K}\rangle .$$

г. Пример разложения /8/ :

$$|0,-1,1,0,2P\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|3,1,-1,0;N\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|3,3,-1,0;N\rangle .$$

д. Пример разложения /9/ :

$$|3,3,3,0;\mathcal{K}\rangle = -\frac{i}{2\sqrt{5}}|3,3,0,-3;N\rangle + \frac{i}{2\sqrt{5}}|3,3,0,3;N\rangle +$$

$$+\, i\frac{3}{2\sqrt{5}}|3,3,0,-1;N\rangle - i\frac{3}{2\sqrt{5}}|3,3,0,1;N\rangle .$$

е. Пример разложения /10/:

$$|3,3,3,0,\mathcal{K}\rangle = -\frac{i}{2\sqrt{5}}|0,0,0,-3;2\mathcal{P}\rangle + \frac{i}{2\sqrt{5}}|0,0,0,3;2\mathcal{P}\rangle +$$

$$+\, i\sqrt{\frac{3}{10}}|1,0,0,-1;2\mathcal{P}\rangle - i\sqrt{\frac{3}{10}}|1,0,0,1;2\mathcal{P}\rangle -$$

$$-\frac{i}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}|0,0,1,-1;2\mathcal{P}\rangle + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}|0,0,1,1;2\mathcal{P}\rangle .$$

Эти разложения легко проверить и прямым образом, используя явный вид базисов /1/ - /4/.

8. Заключение. В настоящей статье мы рассмотрели лишь четыре типа координат. Ими, конечно, далеко не исчерпываются типы координат, в которых 4-мерный изотропный осциллятор может быть исследован методом разделения переменных. Однако важно то, что для всех базисов, выражающихся через специальные функции, коэффициенты межбазисных разложений строятся из тех же "структурных элементов" $d^{J}_{M,M'}(\pi/2)$, $C^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta}$ и $M^{c\gamma}_{a\alpha;b\beta}$, которые определяют разложения /5/ - /10/ и многие другие разложения [17-19].

Мы благодарны С.И.Виницкому, обратившему наше внимание на работу [1]. Мы также признательны Г.С.Саакяну и Л.И.Пономареву за интересные обсуждения.

Таблица I

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle 2\mathcal{P} \| C \rangle$	t_1	a_1	t_2	a_2
0	0	0	0	I	0	0	0	0
I	0	0	0	$\mp i/\sqrt{2}$	0	±I	0	0
0	I	0	0	$I/\sqrt{2}$	0	±I	0	0
0	0	I	0	$\mp i/\sqrt{2}$	0	0	0	±I
0	0	0	I	$I/\sqrt{2}$	0	0	0	±I
2	0	0	0	-I/2	0	±2	0	0
				$-I/\sqrt{2}$	I	0	0	0
0	2	0	0	I/2	0	±2	0	0
				$-I/\sqrt{2}$	I	0	0	0
I	I	0	0	$\mp i/\sqrt{2}$	0	±2	0	0
				0	I	0	0	0
0	0	2	0	-I/2	0	0	0	±2
				$-I/\sqrt{2}$	0	0	I	0
0	0	0	2	I/2	0	0	0	±2
				$-I/\sqrt{2}$	0	0	I	0
0	0	I	I	$\mp i/\sqrt{2}$	0	0	0	±2
				0	0	0	I	0
I	0	I	0	±I/2	0	±I	0	-I
				∓I/2	0	±I	0	I
I	0	0	I	$\mp i/2$	0	±I	0	-I
				$\mp i/2$	0	±I	0	I
0	I	I	0	$\mp i/2$	0	±I	0	-I
				$-\ i/2$	0	±I	0	I
0	I	0	I	I/2	0	±I	0	-I
				I/2	0	±I	0	I

Таблица 2

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle 2P \mid C\rangle$	t_1	q_1	t_2	q_2
3	0	0	0	$\pm i/2\sqrt{2}$	0	± 3	0	0
				$\pm i\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	I	$\pm$I	0	0
0	3	0	0	$I/2\sqrt{2}$	0	± 3	0	0
				$-\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	I	$\pm$I	0	0
2	I	0	0	$-\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	0	± 3	0	0
				$-I/2\sqrt{2}$	I	$\pm$I	0	0
I	2	0	0	$\mp i\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	0	± 3	0	0
				$\pm i/2\sqrt{2}$	I	$\pm$I	0	0
2	0	I	0	$\pm i/2\sqrt{2}$	0	-2	0	$\pm$I
				$\pm i/2$	I	0	0	$\pm$I
				$\pm i/2\sqrt{2}$	0	2	0	$\pm$I
2	0	0	I	$-I/2\sqrt{2}$	0	-2	0	$\pm$I
				$-I/2$	I	0	0	$\pm$I
				$-I/2\sqrt{2}$	0	2	0	$\pm$I
0	2	I	0	$\mp i/2\sqrt{2}$	0	-2	0	$\pm$I
				$\pm i/2$	I	0	0	$\pm$I
				$\mp i/2\sqrt{2}$	0	2	0	$\pm$I
0	2	0	I	$I/2\sqrt{2}$	0	-2	0	$\pm$I
				$-I/2$	I	0	0	$\pm$I
				$I/2\sqrt{2}$	0	2	0	$\pm$I
I	I	I	0	$\pm I/2$	0	-2	0	$\pm$I
				0	I	0	0	$\pm$I
				$\mp I/2$	0	2	0	$\pm$I
I	I	0	I	$i/2$	0	-2	0	$\pm$I
				0	I	0	0	$\pm$I
				$-i/2$	0	2	0	$\pm$I

Таблица 3

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle 23 \vert C\rangle$	t_1	q_1	t_2	q_2
0	0	3	0	$\pm i/2\sqrt{2}$	0	0	0	±3
				$\pm i\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	0	0	I	±I
0	0	0	3	$\mathrm{I}/2\sqrt{2}$	0	0	0	±3
				$\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	0	0	I	±I
0	0	2	I	$-\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	0	0	0	±3
				$-\mathrm{I}/2\sqrt{2}$	0	0	I	±I
0	0	I	2	$\mp\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	0	0	0	±3
				$\pm i/2\sqrt{2}$	0	0	I	±I
I	0	2	0	$-i/2\sqrt{2}$	0	−I	0	±2
				$\pm i/2$	0	±I	I	0
				$i/2\sqrt{2}$	0	I	0	±2
I	0	0	2	$i/2\sqrt{2}$	0	−I	0	±2
				$\pm i/2$	0	±I	I	0
				$-i/2\sqrt{2}$	0	I	0	±2
0	I	2	0	$-\mathrm{I}/2\sqrt{2}$	0	−I	0	±2
				$-\mathrm{I}/2$	0	±I	I	0
				$-\mathrm{I}/2\sqrt{2}$	0	I	0	±2
0	I	0	2	$\mathrm{I}/2\sqrt{2}$	0	−I	0	±2
				$-\mathrm{I}/2$	0	±I	I	0
				$\mathrm{I}/2\sqrt{2}$	0	I	0	±2
I	0	I	I	$\pm\mathrm{I}/2$	0	−I	0	±2
				0	0	±I	I	0
				$\mp\mathrm{I}/2$	0	I	0	±2
0	I	I	I	$\mp i/2$	0	−I	0	±2
				0	0	±I	I	0
				$\mp i/2$	0	I	0	±2

Таблица 4

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle N\|C\rangle$	n_0	j	K_1	K_2
0	0	0	0	I	0	0	0	0
I	0	0	0	∓i/ 2	I	I	±I	0
0	I	0	0	I/ 2	I	I	±I	0
0	0	I	0	∓i/ 2	I	I	0	±I
0	0	0	I	I/ 2	I	I	0	±I
I	0	I	0	±I/2	2	2	−I	±I
				∓I/2	2	2	I	±I
I	0	0	I	i/2	2	2	−I	±I
				−i/2	2	2	I	±I
0	I	I	0	∓i/2	2	2	−I	±I
				∓i/2	2	2	I	±I
0	I	0	I	I/2	2	2	−I	±I
				I/2	2	2	I	±I

Таблица 5

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle N\|C\rangle$	n_0	j	K_1	K_2
2	0	0	0	−I/2	2	0	0	0
				−I/2	2	2	±2	0
				−I/2	2	2	0	0
0	2	0	0	−I/2	2	0	0	0
				I/2	2	2	±2	0
				−I/2	2	2	0	0
0	0	2	0	−I/2	2	0	0	0
				−I/2	2	2	0	2
				I/2	2	2	0	0
0	0	0	2	−I/2	2	0	0	0
				I/2	2	2	0	2
				I/2	2	2	0	0
I	I	0	0	0	2	0	0	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	2	2	±2	0
				0	2	0	0	0
0	0	I	I	0	2	0	0	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	2	2	0	±2
				0	2	2	0	0

Таблица 6

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle N \mid C \rangle$	n_0	j	k_1	k_2
3	0	0	0	$\pm i/2$	3	I	$\pm$I	0
				$\mp i/2\sqrt{2}$	3	3	$\pm$I	0
				$\pm i/2\sqrt{2}$	3	3	$\pm$3	0
0	3	0	0	-I/2	3	I	$\pm$I	0
				$\mp$I/2$\sqrt{2}$	3	3	$\pm$I	0
				$\mp$I/2$\sqrt{2}$	3	3	$\pm$3	0
2	I	0	0	-I/2$\sqrt{3}$	3	I	$\pm$I	0
				-I/2$\sqrt{6}$	3	3	$\pm$I	0
				$-3/2\sqrt{2}$	3	3	$\pm$3	0
I	2	0	0	$\pm i/2\sqrt{3}$	3	I	$\pm$I	0
				$\pm i/2\sqrt{6}$	3	3	$\pm$I	0
				$\mp i\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	3	3	$\pm$3	0
0	0	3	0	$\pm i/2$	3	I	0	$\pm$I
				$\mp i/2\sqrt{2}$	3	3	0	$\pm$I
				$\pm i/2\sqrt{2}$	3	3	0	$\pm$3
0	0	0	3	-I/2	3	I	0	$\pm$I
				I/2$\sqrt{2}$	3	3	0	$\pm$I
				I/2$\sqrt{2}$	3	3	0	$\pm$3
0	0	2	I	-I/2$\sqrt{3}$	3	I	0	$\pm$I
				I/2$\sqrt{6}$	3	3	0	$\pm$I
				$-\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	3	3	0	$\pm$3
0	0	I	2	$\pm i/2\sqrt{3}$	3	I	0	$\pm$I
				$\mp i/2\sqrt{6}$	3	3	0	$\pm$I
				$\mp\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	3	3	0	$\pm$3

Таблица 7

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle N \| C \rangle$	n_0	j	K_1	K_2
2	0	I	0	$\pm i/2\sqrt{3}$	3	I	0	±I
				$\pm i/2\sqrt{2}$	3	3	-2	±I
				$\pm i/\sqrt{6}$	3	3	0	±I
				$\pm i/2\sqrt{2}$	3	3	2	±I
2	0	0	I	$-I/2\sqrt{3}$	3	I	0	±I
				$-I/2\sqrt{2}$	3	3	-2	±I
				$-I/\sqrt{6}$	3	3	0	±I
				$-I/2\sqrt{2}$	3	3	2	±I
0	2	I	0	$\pm i/2\sqrt{3}$	3	I	0	±I
				$\pm i/2\sqrt{2}$	3	3	-2	±I
				$\pm i/\sqrt{6}$	3	3	0	±I
				$\pm i/2\sqrt{2}$	3	3	2	±I
0	2	0	I	$-I/2\sqrt{3}$	3	I	0	±I
				$I/2\sqrt{2}$	3	3	-2	±I
				$-I/\sqrt{6}$	3	3	0	±I
				$I/2\sqrt{2}$	3	3	2	±I
I	I	I	0	0	3	I	0	±I
				±I/2	3	3	-2	±I
				0	3	3	0	±I
				±I/2	3	3	2	±I
I	I	0	I	0	3	I	0	±I
				$i/2$	3	3	-2	±I
				0	3	3	0	±I
				$-i/2$	3	3	2	±I

Таблица 8

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle N\|C\rangle$	n_0	j	k_1	k_2
I	0	2	0	$\pm i/2\sqrt{3}$	3	I	±I	0
				$\pm i/2\sqrt{2}$	3	3	±I	-2
				$\mp i/\sqrt{6}$	3	3	±I	0
				$\pm i/2\sqrt{2}$	3	3	±2	0
I	0	0	2	$\pm i/2\sqrt{3}$	3	I	±I	0
				$\mp i/2\sqrt{2}$	3	3	±I	-2
				$\mp i/\sqrt{6}$	3	3	±I	0
				$\mp i/2\sqrt{2}$	3	3	±I	2
0	I	2	0	$-I/2\sqrt{3}$	3	I	±I	0
				$-I/2\sqrt{2}$	3	3	±I	-2
				$1/\sqrt{6}$	3	3	±I	0
				$-I/2\sqrt{2}$	3	3	±I	2
0	I	0	2	$-I/2\sqrt{2}$	3	I	±I	0
				$I/2\sqrt{2}$	3	3	±I	-2
				$I/\sqrt{6}$	3	3	±I	0
				$I/2\sqrt{2}$	3	3	±I	2
I	0	I	I	0	3	I	±I	0
				$\pm I/2$	3	3	±I	-2
				0	3	3	±I	0
				$\mp I/2$	3	3	±I	2
0	I	I	I	0	3	I	±I	0
				$i/2$	3	3	±I	-2
				0	3	3	±I	0
				$-i/2$	3	3	±I	2

Таблица 9.

n_1	n_2	n_3	n_ν	$\langle \mathcal{K} \vert C \rangle$	n_0	j	m_1	m_2
0	0	0	0	I	0	0	0	0
I	0	0	0	$\mp i/\sqrt{2}$	I	I	I	$\pm$I
0	I	0	0	I/2	I	I	I	$\pm$I
0	0	I	0	I	I	I	I	0
0	0	0	I	I	I	I	0	0
0	0	I	I	I	2	2	I	0
0	I	I	0	$\mathrm{I}/\sqrt{2}$	2	2	2	$\pm$I
0	I	0	I	$\mathrm{I}/\sqrt{2}$	2	2	I	$\pm$I
I	0	I	0	$\mp i/\sqrt{2}$	2	2	2	$\pm$I
I	0	0	I	$\mp i/\sqrt{2}$	2	2	I	$\pm$I
0	0	0	2	-I/2	2	0	0	0
				$\sqrt{3}/2$	2	2	0	0
0	0	2	0	-I/2	2	0	0	0
				$-\mathrm{I}/2\sqrt{3}$	2	2	0	0
				$\sqrt{2/3}$	2	2	2	0
I	I	0	0	0	2	0	0	0
				0	2	2	0	0
				0	2	2	2	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	2	2	2	$\pm$2
0	2	0	0	-I/2	2	0	0	0
				$-\mathrm{I}/2\sqrt{3}$	2	2	0	0
				$-\mathrm{I}/\sqrt{6}$	2	2	2	0
				I/2	2	2	2	$\pm$2
2	0	0	0	-I/2	2	0	0	0
				$-\mathrm{I}/2\sqrt{3}$	2	2	0	0
				$-\mathrm{I}/\sqrt{6}$	2	2	2	0
				-I/2	2	2	2	$\pm$2

Таблица I0

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle \mathcal{K} \vert C \rangle$	n_0	j	m_1	m_2
3	0	0	0	$\pm i/2$	3	I	I	$\pm$I
				$\pm i/2\sqrt{5}$	3	3	I	$\pm$I
				$\pm i\sqrt{3}/2\sqrt{I0}$	3	3	3	$\pm$I
				$\pm i/2\sqrt{2}$	3	3	3	$\pm$3
0	3	0	0	$-I/2$	3	I	I	$\pm$I
				$-I/2\sqrt{5}$	3	3	I	$\pm$I
				$-\sqrt{3}/2\sqrt{I0}$	3	3	3	$\pm$I
				$I/2\sqrt{2}$	3	3	3	$\pm$3
2	I	0	0	$-I/2\sqrt{3}$	3	I	I	$\pm$I
				$-I/2\sqrt{I5}$	3	3	I	$\pm$I
				$-I/2\sqrt{I0}$	3	3	3	$\pm$I
				$-\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	3	3	3	$\pm$3
I	2	0	0	$\pm i/2\sqrt{3}$	3	I	I	$\pm$I
				$\pm i/2\sqrt{I5}$	3	3	I	$\pm$I
				$\pm i/2\sqrt{I0}$	3	3	3	$\pm$I
				$\mp i\sqrt{3}/2\sqrt{2}$	3	3	3	$\pm$3
0	0	3	0	$-I/\sqrt{2}$	3	I	I	0
				$-I/\sqrt{I0}$	3	3	I	0
				$2/5$	3	3	3	0
0	0	0	3	$-I/\sqrt{2}$	3	I	0	0
				$I/\sqrt{2}$	3	3	0	0

Таблица II

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle \mathcal{K} \mid c \rangle$	n_0	j	m_1	m_2
0	0	I	2	$-I/\sqrt{6}$	3	I	I	0
				$\sqrt{5/6}$	3	3	I	0
0	0	2	I	$-I/\sqrt{6}$	3	I	0	0
				$-I/\sqrt{6}$	3	3	0	0
				$\sqrt{2/3}$	3	3	2	0
2	0	I	0	$-I/\sqrt{6}$	3	I	I	0
				$-I/\sqrt{30}$	3	3	I	0
				$-\sqrt{3/I0}$	3	3	3	0
				$-I/2$	3	3	3	± 2
2	0	0	I	$-I/\sqrt{6}$	3	I	0	0
				$-I/\sqrt{6}$	3	3	0	0
				$-I/\sqrt{6}$	3	3	2	0
				$-I/2$	3	3	2	± 2
0	2	I	0	$-I/\sqrt{6}$	3	I	I	0
				$-I/\sqrt{30}$	3	3	I	0
				$-\sqrt{3/I0}$	3	3	3	0
				$I/2$	3	3	3	± 2
0	2	0	I	$-I/\sqrt{6}$	3	I	0	0
				$-I/\sqrt{6}$	3	3	0	0
				$-I/\sqrt{6}$	3	3	2	0
				$I/2$	3	3	2	± 2

Таблица I2

n_1	n_2	n_3	n_4	$\langle \mathcal{K} \vert C \rangle$	n_0	j	m_1	m_2
I	0	I	I	$\mp i/\sqrt{2}$	3	3	2	$\pm$I
0	I	I	I	$I/\sqrt{2}$	3	3	2	$\pm$I
I	0	0	2	$\pm i/2\sqrt{3}$	3	I	I	$\pm$I
				$\mp i\sqrt{5}/2\sqrt{3}$	3	3	I	$\pm$I
0	I	0	2	$-I/2\sqrt{3}$	3	I	I	$\pm$I
				$\sqrt{5}/2\sqrt{3}$	3	3	I	$\pm$I
I	0	2	0	$\pm i/2\sqrt{3}$	3	I	I	$\pm$I
0	I	2	0	$\pm i/2\sqrt{I5}$	3	3	I	$\pm$I
				$\mp i\sqrt{2/5}$	3	3	3	$\pm$I
0	I	2	0	$-I/2\sqrt{3}$	3	I	I	$\pm$I
				$-I/2\sqrt{I5}$	3	3	I	$\pm$I
				$\sqrt{2/5}$	3	3	3	$\pm$I
I	I	I	0	0	3	I	I	0
				0	3	3	I	0
				0	3	3	3	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	3	3	3	$\pm$2
I	I	0	I	0	3	I	0	0
				0	3	3	0	0
				0	3	3	2	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	3	3	2	$\pm$2

Таблица I3

t_1	q_1	t_2	q_2	$\langle N \vert 2\mathcal{P} \rangle$	n_0	j	k_1	k_2
0	0	0	0	I	0	0	0	0
0	±I	0	0	I	I	I	±I	0
0	0	0	±I	I	I	I	0	±I
0	±2	0	0	I	2	2	±2	0
0	-I	0	±I	I	2	2	-I	±I
0	0	0	±2	I	2	2	0	±2
I	0	0	0	$I/\sqrt{2}$	2	0	0	0
				$I/\sqrt{2}$	2	2	0	0
0	0	I	0	$I/\sqrt{2}$	2	0	0	0
				$-I/\sqrt{2}$	2	2	0	0
0	I	0	±I	I	2	2	I	±I
0	±3	0	0	I	3	3	±3	0
0	-2	0	±I	I	3	3	-2	±I
0	-I	0	±2	I	3	3	-I	±2
I	±I	0	0	$\sqrt{2/3}$	3	I	±I	0
				$I/\sqrt{3}$	3	3	±I	0
0	±I	I	0	$I/\sqrt{3}$	3	I	±I	0
				$-\sqrt{2/3}$	3	3	±I	0
0	0	0	±3	I	3	3	0	±3
I	0	0	±I	$I/\sqrt{3}$	3	I	0	±I
				$\sqrt{2/3}$	3	3	0	±I
0	0	I	±I	$\sqrt{2/3}$	3	I	0	±I
				$-I/\sqrt{3}$	3	3	0	±I
0	I	0	±2	I	3	3	I	±2
0	2	0	±I	I	3	3	2	±I

Таблица I4

n_0	j	m_1	m_2	$\langle N \mid \mathcal{K} \rangle$	n_0	j	k_1	k_2
0	0	0	0	I	0	0	0	0
I	I	0	0	$I/\sqrt{2}$	I	I	0	±I
I	I	I	±I	I	I	I	±I	0
2	0	0	0	I	2	0	0	0
I	I	I	0	$\mp i/\sqrt{2}$	I	I	0	±I
2	2	I	-I	$I/\sqrt{2}$	2	2	-I	±I
2	2	I	I	I/ 2	2	2	I	±I
2	2	2	±2	I	2	2	±2	0
2	2	2	-I	$\mp i/\sqrt{2}$	2	2	-I	±I
2	2	2	I	$\mp i/\sqrt{2}$	2	2	I	±I
3	I	0	0	$I/\sqrt{2}$	3	I	0	±I
3	I	I	±I	I	3	I	±I	0
2	2	0	0	$I/\sqrt{3}$	2	2	0	0
				$I/\sqrt{3}$	2	2	0	±2
2	2	I	0	0	2	2	0	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	2	2	0	±2
2	2	2	0	$\sqrt{2/3}$	2	2	0	0
				$-I/\sqrt{6}$	2	2	0	±2
3	3	0	0	I/2	3	3	0	±I
				I/2	3	3	0	±3
3	3	I	-I	$\sqrt{2/5}$	3	3	-I	0
				$\sqrt{3/I0}$	3	3	-I	±2

Таблица I5

n_0	j	m_1	m_2	$\langle N \mid \mathcal{K} \rangle$	n_0	j	k_1	k_2
3	I	I	0	$\mp i/\sqrt{2}$	3	I	0	$\pm$I
3	3	2	-2	$I/\sqrt{2}$	3	3	-2	$\pm$I
3	3	2	2	$I/\sqrt{2}$	3	3	2	$\pm$I
3	3	3	$\pm$3	I	3	3	$\pm$3	0
3	3	3	-2	$\mp i/\sqrt{2}$	3	3	-2	$\pm$I
3	3	3	2	$\pm i/\sqrt{2}$	3	3	2	$\pm$I
3	3	I	0	$\mp i/2\sqrt{5}$	3	3	0	$\pm$I
				$\mp i3/2\sqrt{5}$	3	3	0	$\pm$3
3	3	I	I	$\sqrt{2/5}$	3	3	I	0
				$\sqrt{3/I0}$	3	3	I	$\pm$2
3	3	2	-I	0	3	3	-I	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	3	3	-I	$\pm$2
3	3	2	0	I/2	3	3	0	I
				-I/2	3	3	0	$\pm$3
3	3	2	I	0	3	3	I	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	3	3	I	$\pm$2
3	3	3	-I	$\sqrt{3/5}$	3	3	-I	0
				$-I/\sqrt{5}$	3	3	-I	$\pm$2
3	3	3	0	$\mp i3/2\sqrt{5}$	3	3	0	$\pm$I
				$\pm i/2\sqrt{5}$	3	3	0	$\pm$3
3	3	3	I	$\sqrt{3/5}$	3	3	I	0
				$-I/\sqrt{5}$	3	3	I	$\pm$2

Таблица I6

n_0	j	m_1	m_2	$\langle 2\mathcal{J} \vert \mathcal{K} \rangle$	t_1	q_1	t_2	q_2
0	0	0	0	I	0	0	0	0
I	I	0	0	$I/\sqrt{2}$	0	0	0	±I
I	I	I	±I	I	0	±I	0	0
I	I	I	0	$\mp i/\sqrt{2}$	0	0	0	±I
2	2	I	-I	$I/\sqrt{2}$	0	-I	0	±I
2	2	I	I	$I/\sqrt{2}$	0	I	0	±I
2	2	2	±2	I	0	±2	0	0
2	2	2	-I	$\mp i/\sqrt{2}$	0	-I	0	±I
2	2	2	I	$\mp i/\sqrt{2}$	0	I	0	±I
2	0	0	0	$I/\sqrt{2}$	I	0	0	0
				$I/\sqrt{2}$	0	0	I	0
2	2	0	0	$I/\sqrt{3}$	0	0	0	±2
				$I/\sqrt{6}$	I	0	0	0
				$-I/\sqrt{6}$	0	0	I	0
2	2	I	0	$\mp i/\sqrt{2}$	0	0	0	±2
				0	I	0	0	0
				0	0	0	I	0
2	2	2	0	$-I/\sqrt{6}$	0	0	0	±2
				$I/\sqrt{3}$	I	0	0	0
				$-I/\sqrt{3}$	0	0	I	0

Таблица I7

n_0	j	m_1	m_2	$\langle \mathcal{Q}\mathcal{P} \| \mathcal{K} \rangle$	t_1	q_1	t_2	q_2
3	3	2	-2	$I/\sqrt{2}$	0	-2	0	±I
3	I	0	0	$I/\sqrt{6}$	I	0	0	±I
				$I/\sqrt{3}$	0	0	I	±I
3	I	I	-I	$\sqrt{2/3}$	I	-I	0	±0
				$I/\sqrt{3}$	0	-I	I	0
3	I	I	0	$\mp i/\sqrt{6}$	I	0	0	±I
				$\mp i/\sqrt{3}$	0	0	I	±I
3	I	I	I	$\sqrt{2/3}$	I	I	0	0
				$I/\sqrt{3}$	0	I	I	0
3	3	0	0	$I/\sqrt{6}$	I	0	0	±I
				$-I/2\sqrt{3}$	0	0	I	±I
				$I/2$	0	0	0	±3
3	3	I	-I	$\sqrt{3/I0}$	0	-I	0	±2
				$\sqrt{2/I5}$	I	-I	0	0
				$-2/\sqrt{I5}$	0	-I	I	0
3	3	I	0	$\mp i/\sqrt{30}$	I	0	0	±I
				$\pm i/2\sqrt{I5}$	0	0	I	±I
				$\mp i/2$	0	0	0	±3
3	3	I	I	$\sqrt{3/I0}$	0	I	0	±2
				$\sqrt{2/I5}$	I	I	0	0
				$-2/\sqrt{I5}$	0	I	I	0

Таблица I8

n_0	j	m_1	m_2	$\langle 2\mathcal{P} \mid \mathcal{K} \rangle$	t_1	g_1	t_2	q_2
3	3	2	2	$1/\sqrt{2}$	0	2	0	±I
3	3	3	±3	I	0	±3	0	0
3	3	3	-2	$\mp i/\sqrt{2}$	0	-2	0	±I
3	3	3	2	$\mp i/\sqrt{2}$	0	2	0	±I
3	3	2	-I	0	I	-I	0	0
				0	0	-I	I	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	0	-I	0	±2
3	3	2	0	$I/\sqrt{6}$	I	0	0	±I
				$-I/2\sqrt{3}$	0	0	I	±I
				$-I/2$	0	0	0	±3
3	3	2	I	0	I	I	0	0
				0	0	I	I	0
				$\mp i/\sqrt{2}$	0	I	0	±2
3	3	3	-I	$I/\sqrt{5}$	I	-I	0	0
				$-\sqrt{2/5}$	0	-I	I	0
				$-I/\sqrt{5}$	0	-I	0	±2
3	3	3	0	$\mp i\sqrt{3/I0}$	I	0	0	±I
				$\pm i\sqrt{3}/2\sqrt{5}$	0	0	I	±I
				$\pm i/2\sqrt{5}$	0	0	0	±3
3	3	3	I	$I/\sqrt{5}$	I	I	0	0
				$-\sqrt{2/5}$	0	I	I	0
				$-I/\sqrt{5}$	0	I	0	±2

Литература

1. M.Kibler, T.Negadi. Creatica Chemica Acta CCACCA 57 (6), 1509-1523, 1984.
2. M.Kibler, T.Negadi. Lett.Nuovo Cimento, 39, 319-323, 1984.
3. M.Kibler, T.Negadi. J.Phys.A. 16, 4265-4268, 1983.
4. M.Kibler, T.Negadi. Lett. Nuovo Cimento, 37, 225-228, 1983.
5. M.Kibler, T.Negadi, A.Ronveaux. LYCEN/8464.
6. M.Kibler, A.Ronveaux, T.Negadi. LYCEN/8545.
7. A.Chen. Phys.Rev. A, 22, 333-335, 1980.
8. A.Chen. J.Math. Phys. 23, 412-416, 1982.
9. A.Chen, M.Kibler. Phys.Rev. A, 31, No. 6, 1985.
10. P.Kustaanheimo, E.Stiefel. J.Reine angew. Math. 218, 204, 1965.
11. Д.А.Варшалович, А.Н.Москалев, В.К.Херсонский. Квантовая теория углового момента."Наука", Ленинград, 1975.
12. Г.С.Погосян, В.М.Тер-Антонян. Сообщения ОИЯИ Р2-11962, Дубна, 1978.
13. Я.А.Смородинский, Л.А.Шелепин, УФН, 106, 3-45, 1972.
14. М.С.Кильдюшов. ЯФ, 15, 197-208, 1972.
15. Г.С.Погосян, Я.А.Смородинский, В.М.Тер-Антонян. Сообщения ОИЯИ, Р2-82-118, Дубна, 1982.
16. Г.Сеге. Ортогональные многочлены. Физматгиз, Москва, 1962.
17. L.G.Mardoyan, G.S.Pogpsyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. J.Phys. A 16, 711-728, 1983.
18. L.G.Mardoyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. J.Phys.A 18, 455-466, 1985.
19. L.G.Mardoyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan. Nuovo Cimento , 86A, 324-336, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июля 1986 года.

Мардоян Л.Г. и др. P2-86-436
Некоторые межбазисные разложения в четырехмерном
изотропном осцилляторе

Получены точные формулы, определяющие явный вид коэффициентов, связывающих друг с другом декартов, двойной полярный и два гиперсферических базиса четырехмерного изотропного осциллятора. Составлены таблицы для этих коэффициентов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Mardoyan L.G. et al. P2-86-436
Some Interbasis Expansions in a Four-Dimensional
Isotropic Oscillator

Exact formulae are obtained for the explicit form of coefficients connecting the Cartesian, double polar and two hyperspherical bases of a four-dimensional isotropic ocsillator. Tables for the coefficients are compiled.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986

24 коп.

Редактор Е.К.Аксенова. Макет Р.Д.Фоминой.

Подписано в печать 05.08.86.
Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 1,94.
Тираж 490. Заказ 38034.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.