ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 65, № 2
ноябрь, 1985

К ЭЛЛИПТИЧЕСКОМУ БАЗИСУ КРУГОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Мардоян Л. Г. [1], Погосян Г. С. [1], Сисакян А. Н.,
Тер-Антонян В. М. [1]

Получен полный набор коммутирующих между собой операторов, определяющих эллиптический базис квантового кругового осциллятора (КО). Введен эллиптический базис КО и найдены генерирующие его трехчленные рекуррентные соотношения. Вычислены эллиптические поправки к полярному и декартову базисам КО.

1. ВВЕДЕНИЕ

В недавней работе [1] нами были найдены волновые функции кругового осциллятора (КО) в эллиптических координатах (эллиптический базис КО). Представляется интересным получить полный набор коммутирующих между собой операторов, однозначно определяющих эллиптический базис, и, пользуясь этим набором, выразить эллиптический базис КО в виде разложений по его полярному и декартову базисам.

2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ КРУГОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Выберем эллиптические координаты в виде

$$x=\frac{R}{2}\operatorname{ch}\xi\cos\eta,\qquad y=\frac{R}{2}\operatorname{sh}\xi\sin\eta,$$

где параметр R и координаты ξ и η изменяются в пределах $0\leqslant R<\infty$, $0\leqslant\eta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\xi<\infty$. В системе единиц $\hbar=\mu=\omega=1$ и в переменных ξ и η в уравнении Шредингера для КО (E – энергия)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)\Psi+\left[\frac{ER^2}{4}(\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta)-\right.$$
$$\left.-\frac{R^4}{128}(\operatorname{ch}4\xi-\cos 4\eta)\right]\Psi=0$$

переменные разделяются, и после введения константы разделения Q и исключения из получающихся уравнений энергии E приходим к уравнению

$$\hat{Q}\Psi\equiv\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta}\left(\cos 2\eta\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\operatorname{ch}2\xi\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{R^4}{64}\operatorname{ch}2\xi\cos 2\eta\right\}\Psi=Q\Psi.$$

---

[1] Ереванский государственный университет.

Очевидно, оператор $\hat{Q}$ коммутирует с гамильтонианом КО и, следовательно, является интегралом движения. Легко показать, что при $R \to 0$ и $R \to \infty$ справедливы предельные соотношения

$$\lim_{R\to 0} \hat{Q} = -\hat{L}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \lim_{R\to\infty} \frac{2\hat{Q}}{R^2} = -\hat{\mathscr{P}} \equiv$$
$$\equiv -\frac{1}{4}\left(x^2 - y^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).$$

Операторы $\hat{L}$ и $\hat{\mathscr{P}}$ коммутируют с гамильтонианом КО и, как известно [2], имеют в качестве собственных функций решения уравнения Шредингера для КО в полярных и декартовых координатах. Переходя в операторе $\hat{Q}$ к декартовым координатам, после некоторых вычислений можно доказать равенство

$$\hat{Q} = -\hat{L}^2 - \frac{R^2}{2}\hat{\mathscr{P}} + \frac{R^4}{64}.$$

Удобно пользоваться оператором

$$\hat{\Lambda} = \hat{Q} - \frac{R^4}{64} = -\hat{L}^2 - \frac{R^2}{2}\hat{\mathscr{P}}.$$

Назовем его эллиптическим интегралом движения КО. Собственные значения оператора $\hat{\Lambda}$ обозначим через λ. Очевидно, $\lambda = Q - R^4/64$.

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БАЗИС КРУГОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Гамильтониан $\hat{H}$, эллиптический интеграл движения $\hat{\Lambda}$ и операторы $\hat{P}_{xy}$ и $\hat{P}_y$, осуществляющие инверсии координат $(x, y) \to (-x, -y)$, $u(x, y) \to (x, -y)$, образуют полный набор коммутирующих между собой и однозначно фиксирующих эллиптический базис операторов. Табл. 1 разъясняет классификацию как эллиптических, так и полярных и декартовых состояний по собственным значениям операторов $\hat{H}$, $\hat{P}_{xy}$ и $\hat{P}_y$.

Таблица 1

Эллиптический базис	Полярный базис	Декартов базис	ε	P_{xy}	P_y	λ
$\Psi^{(+,+)}_{\varepsilon,\lambda}$	$\Phi^{(+,+)}_{2n,2p}$	$\Pi_{2k,2n-k}$	$2n+1$	$+$	$+$	$\lambda^{(+,+)}$
$\Psi^{(-,+)}_{\varepsilon,\lambda}$	$\Phi^{(-+)}_{2n+1,2p+1}$	$\Pi_{2k+1,2n-2k}$	$(2n+1)+1$	$-$	$+$	$\lambda^{(-,+)}$
$\Psi^{(+,-)}_{\varepsilon,\lambda}$	$\Phi^{(+,-)}_{2n+2,2p+2}$	$\Pi_{2k+1,2n-2k+1}$	$(2n+2)+1$	$+$	$-$	$\lambda^{(+,-)}$
$\Psi^{(-,-)}_{\varepsilon,\lambda}$	$\Phi^{(--)}_{2n+1,2p+1}$	$\Pi_{2k,2n-2k+1}$	$(2n+1)+1$	$-$	$-$	$\lambda^{(-,-)}$

Энергия КО дается выражением $E = N+1$. В таблице 1 уровни энергии с $N=2n+1$, $N=2n+2$, $N=2n+1$ и $N=2n$ занимают разные клетки, причем состояния, соответствующие этим уровням, отличаются в пределах данного типа базиса (эллиптический, полярный, декартов) $\hat{P}_{xy}$- и $\hat{P}_y$-четностями, отмеченными в первых двух столбцах верхними индексами у волновых функций, а в третьем столбце связанными простым образом с индексами декартовых базисов.

Полярный и декартов базисы КО выбраны в виде

$$\Phi^{(+,+)}_{2n,\,2p} = R_{2n,\,2p}(r)\,\frac{\cos 2p\varphi}{\sqrt{\pi}},$$

$$\Phi^{(-,+)}_{2n+1,\,2p+1} = R_{2n+1,\,2p+1}(r)\,\frac{\cos(2p+1)\varphi}{\sqrt{\pi}},$$

$$\Phi^{(+,-)}_{2n+2,\,2p+2} = R_{2n+2,\,2p+2}(r)\,\frac{i\sin(2p+2)\varphi}{\sqrt{\pi}},$$

$$\Phi^{(-,-)}_{2n+1,\,2p+1} = R_{2n+1,\,2p+1}(r)\,\frac{i\sin(2p+1)\varphi}{\sqrt{\pi}},$$

$$\Pi_{n_1,\,n_2}=\overline{H}_{n_1}(x)\,\overline{H}_{n_2}(y), \quad n_1=2k, \quad n_2=2k+1.$$

Функции R_{Nm} и $\overline{H}_n$ нормированы на единицу, и их вид хорошо известен [3]. Целые числа p и k изменяются в пределах $0\leqslant p\leqslant n$, $0\leqslant k\leqslant n$.

4. СВЯЗЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО БАЗИСА КРУГОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ПОЛЯРНЫМ И ДЕКАРТОВЫМ

Связь эллиптического базиса с полярным при данной энергии и данных P_{xy}- и P_y-четностях имеет вид разложений

$$\Psi^{(+,+)}_{E,\lambda} = \sum_{p=0}^{n} W^{(+,+)}_{2p}\Phi^{(+,+)}_{2n,\,2p}, \qquad \Psi^{(-,+)}_{E,\lambda} = \sum_{p=0}^{n} W^{(-,+)}_{2p+1}\Phi^{(-,+)}_{2n+1,\,2p+1},$$

$$\Psi^{(+,-)}_{E,\lambda} = \sum_{p=0}^{n} W^{(+,-)}_{2p+2}\Phi^{(+,-)}_{2n+2,\,2p+2}, \qquad \Psi^{(-,-)}_{E,\lambda} = \sum_{p=0}^{n} W^{(-,-)}_{2p+1}\Phi^{(-,-)}_{2n+1,\,2p+1}.$$

С помощью этих разложений задача о собственных значениях и собственных функциях оператора $\hat{\Lambda}$ приводится к следующим системам линейных уравнений:

$$\sum_{p=0}^{n}\left\{\mathcal{P}^{(+,+;\,+,+)}_{2p',\,2p} + \frac{2}{R^2}(\lambda^{(+,+)} + 4p^2)(1+\delta_{p0})\,\delta_{p,p'}\right\}W^{(+,+)}_{2p} = 0,$$

$$\sum_{p=0}^{n}\left\{\mathcal{P}^{(-,+;\,-,+)}_{2p'+1,\,2p+1} + \frac{2}{R^2}(\lambda^{(-,+)} + (2p+1)^2)\,\delta_{p,p'}\right\}W^{(-,+)}_{2p+1} = 0,$$

$$\sum_{p=0}^{n}\left\{\mathcal{P}^{(+,-;\,+,-)}_{2p'+2,\,2p+2} + \frac{2}{R^2}(\lambda^{(+,-)} + (2p+2)^2)\,\delta_{p,p'}\right\}W^{(+,-)}_{2p+2} = 0,$$

$$\sum_{p=0}^{n}\left\{\mathcal{P}^{(-,-;\,-,-)}_{2p'+1,\,2p+1} + \frac{2}{R^2}(\lambda^{(-,-)} + (2p+1)^2)\,\delta_{p,p'}\right\}W^{(-,-)}_{2p+1} = 0.$$

Вычисление матричных элементов оператора $\hat{\mathcal{P}}$ по полярным базисам производится с помощью полученного в [4] разложения полярного базиса КО

$$\Phi_{Nm} = R_{Nm}(r)\,\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}},$$

не имеющего определенных P_{xy}- и P_y-четностей по декартову базису такого же типа:

$$\Phi_{Nm} = \sum_{p=-N}^{N}{}' \, d^{N/2}_{m/2,\,p/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\Pi_{(N+p)/2,\,(N-p)/2}.$$

Знак штриха над суммой означает, что в суммировании участвуют лишь те значения p, которые имеют четность числа N. Функции Вигнера d взяты из монографии [5]. Пользуясь рекуррентным соотношением

$$-Md^J_{M,M'}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{(J+M')(J-M'+1)}d^J_{M,M'-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{(J-M')(J+M'+1)}\,d^J_{M,M'+1}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

можно получить формулы

$$\mathcal{P}^{(+,+;+,+)}_{2p',2p}={}^1/_2\sqrt{(n+p')(n-p'+1)}\,\delta_{p,p'-1}+$$
$$+{}^1/_2\sqrt{(n-p')(n+p'+1)}\,\delta_{p,p'+1}+$$
$$+{}^1/_2\sqrt{n(n+1)}\,(\delta_{p,0}\delta_{p',1}+\delta_{p,1}\delta_{p',0}),$$
$$\mathcal{P}^{(-,+;-,+)}_{2p'+1,2p+1}={}^1/_2\sqrt{(n-p'+1)(n+p'+1)}\,\delta_{p,p'-1}+$$
$$+{}^1/_2\sqrt{(n-p')(n+p'+2)}\,\delta_{p,p'+1}+{}^1/_2(n+1)\,\delta_{p,0}\delta_{p',0},$$
$$\mathcal{P}^{(-,-;-,-)}_{2p'+1,2p+1}={}^1/_2\sqrt{(n-p'+1)(n+p'+1)}\,\delta_{p,p'-1}+$$
$$+{}^1/_2\sqrt{(n-p')(n+p'+2)}\,\delta_{p,p'+1}-{}^1/_2(n+1)\,\delta_{p,0}\delta_{p',0},$$
$$\mathcal{P}^{(+,-;+,-)}_{2p'+2,2p+2}={}^1/_2\sqrt{(n-p'+1)(n+p'+2)}\,\delta_{p,p'-1}+$$
$$+{}^1/_2\sqrt{(n-p')(n+p'+3)}\,\delta_{p,p'+1}.$$

Для большей наглядности приведем явный вид этих матриц:

$$\mathcal{P}^{(+,+;+,+)}_{2p',2p}=$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{n(n+1)} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \sqrt{n(n+1)} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{(n-1)(n+2)} & \dots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{(n-1)(n+2)} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\frac{n}{2}}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\frac{n}{2}} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{P}^{(-,+;-,+)}_{2p'+1,2p+1}=$$
$$=\begin{vmatrix} \frac{n+1}{2} & \frac{\sqrt{n(n+2)}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \frac{\sqrt{n(n+2)}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{(n-1)(n+3)}}{2} & \dots & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{(n-1)(n+3)}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\sqrt{2n+1}}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\sqrt{2n+1}}{2} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathscr{P}^{(-,-;-,-)}_{2p'+1,\,2p+1} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{n+1}{2} & \frac{\sqrt{n(n+2)}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{n(n+2)}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{(n-1)(n+3)}}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{(n-1)(n+3)}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\sqrt{2n+1}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\sqrt{2n+1}}{2} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathscr{P}^{(+,-;+,-)}_{2p'+2,\,2p+2} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{n(n+3)}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{n(n+3)}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{(n-1)(n+4)}}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{(n-1)(n+4)}}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\sqrt{2n+2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\sqrt{2n+2}}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Теперь легко установить трехчленные рекуррентные соотношения

$$\sqrt{(n+p')(n-p'+1)}\,W^{(+,+)}_{2p'-2} + \sqrt{(n-p')(n+p'+1)}\,W^{(+,+)}_{2p'+2} +$$
$$+ \sqrt{n(n+1)}\,(W^{(+,+)}_0\delta_{p',1} + W^{(+,+)}_2\delta_{p',0}) +$$
$$+ \frac{4}{R^2}(\lambda^{(+,+)} + 4p'^2)(1+\delta_{p',0})\,W^{(+,+)}_{2p'} = 0,$$

$$\sqrt{(n-p'+1)(n+p'+1)}\,(1-\delta_{p',0})\,W^{(-,+)}_{2p'-1} +$$
$$+ \sqrt{(n-p')(n+p'+2)}\,W^{(-,+)}_{2p'+3} +$$
$$+ (n+1)\,\delta_{p',0}W^{(-,+)}_1 + \frac{4}{R^2}(\lambda^{(-,+)} + (2p'+1)^2)\,W^{(-,+)}_{2p'+1} = 0,$$

$$\sqrt{(n-p'+1)(n+p'+1)}\,(1-\delta_{p',0})\,W^{(-,-)}_{2p'-1} +$$
$$+ \sqrt{(n-p')(n+p'+2)}\,W^{(-,-)}_{2p'+3} -$$
$$-(n+1)\,\delta_{p',0}W^{(-,-)}_1 + \frac{4}{R^2}(\lambda^{(-,-)} + (2p'+1)^2)\,W^{(-,-)}_{2p'+1} = 0,$$

$$\sqrt{(n-p'+1)(n+p'+2)}\,(1-\delta_{p',0})\,W^{(+,-)}_{2p'} +$$
$$+ \sqrt{(n-p')(n+p'+3)}\,W^{(+,-)}_{2p'+4} +$$

$$+\frac{4}{R^2}(\lambda^{(+,-)}+(2p'+2)^2)W_{2p'+2}^{(+,-)}=0,$$

составляющие основу для построения разложений эллиптического базиса по полярному. Наряду с этими рекуррентными соотношениями выполняются условия

$$2|W_0^{(+,+)}|^2+\sum_{p=1}^{n}|W_{2p}^{(+,+)}|^2=1,$$

$$\sum_{p=0}^{n}|W_{2p+1}^{(-,+)}|^2=\sum_{p=0}^{n}|W_{2p+1}^{(-,-)}|^2=\sum_{p=0}^{n}|W_{2p+2}^{(+,-)}|^2=1,$$

отражающие нормировку участвующих в разложениях базисов (все эллиптические базисы предполагаются нормированными на единицу). После сказанного принцип вычисления коэффициентов W и собственных значений λ очевиден. Некоторые ответы при малых значениях n и p мы приводим в табл. 2—5.

Разумеется, описанный метод применим и для нахождения эллиптических базисов по декартовым. Мы отметим здесь лишь окончательные результаты. Если разложения выбрать в виде

$$\Psi_{E\lambda}^{(+,+)}=\sum_{k=0}^{n}U_{2k}^{(+,+)}\Pi_{2k,\,2n-2k},\qquad \Psi_{E\lambda}^{(-,+)}=\sum_{k=0}^{n}U_{2k+1}^{(-,+)}\Pi_{2k+1,\,2n-2k},$$

$$\Psi_{E\lambda}^{(+,-)}=\sum_{k=0}^{n}U_{2k+1}^{(+,-)}\Pi_{2k+1,\,2n-2k+1},\qquad \Psi_{E\lambda}^{(-,-)}=\sum_{k=0}^{n}U_{2k}^{(-,-)}\Pi_{2k,\,2n-2k+1},$$

то рекуррентные соотношения на коэффициенты U имеют вид

$$2\sqrt{(k+1)(2k+1)(n-k)(2n-2k-1)}\,U_{2k+2}^{(+,+)}+$$
$$+2\sqrt{k(2k-1)(n-k+1)(2n-2k+1)}\,U_{2k-2}^{(+,+)}+$$
$$+\left(\lambda^{(+,+)}+8k(n-k)+2n+\frac{R^2}{2}(2k-n)\right)U_{2k}^{(+,+)}=0,$$

$$2\sqrt{(k+1)(2k+3)(n-k)(2n-2k-1)}\,U_{2k+3}^{(-,+)}+$$
$$+2\sqrt{k(2k+1)(n-k+1)(2n-2k+1)}\,U_{2k-1}^{(-,+)}+$$
$$+\left(\lambda^{(-,+)}+4(n-k)(2k+1)+2n+1+\frac{R^2}{4}(4k-2n+1)\right)\times$$
$$\times U_{2k+1}^{(-,+)}=0,$$

$$2\sqrt{(k+1)(2k+3)(n-k)(2n-2k+1)}\,U_{2k+3}^{(+,-)}+$$
$$+2\sqrt{k(2k+1)(n-k+1)(2n-2k+3)}\,U_{2k-1}^{(+,-)}+$$
$$+\left(\lambda^{(+,-)}+2(2k+1)(2n-2k+1)+2n+2+\frac{R^2}{2}(2k-n)\right)\times$$
$$\times U_{2k+1}^{(+,-)}=0,$$

$$2\sqrt{(k+1)(2k+1)(2n-2k+1)(n-k)}\,U_{2k+2}^{(-,-)}+$$
$$+2\sqrt{k(2k-1)(2n-2k+3)(n-k+1)}\,U_{2k-2}^{(-,-)}+$$
$$+\left(\lambda^{(-,-)}+4k(2n-2k+1)+2n+1+\frac{R^2}{4}(4k-2n-1)\right)\times$$

$$\times U_{2k}^{(-,-)} = 0,$$

а сами коэффициенты удовлетворяют условиям нормировки

$$\sum_{k=0}^{n} |U_{2k}^{(+,+)}|^2 = \sum_{k=0}^{n} |U_{2k+1}^{(-,+)}|^2 = \sum_{k=0}^{n} |U_{2k+1}^{(+,-)}|^2 = \sum_{k=0}^{n} |U_{2k}^{(-,-)}|^2 = 1$$

и при малых n и k даются табл. 6—9.

Таблица 2

n	p	$W_{2p}^{(+,+)}(R^2)$	$\lambda^{(+,+)}$
0	0	1	$\lambda^{(+,+)} = 0$
1	0	$\left(\frac{\lambda^{(+,+)}+4}{3\lambda^{(+,+)}+4}\right)^{1/2}$	$\lambda^{(+,+)}(\lambda^{(+,+)}+4) = \frac{R^4}{4}$
1	1	$-\frac{2\sqrt{2}}{R^2}\lambda^{(+,+)}\left(\frac{\lambda^{(+,+)}+4}{3\lambda^{(+,+)}+4}\right)^{1/2}$	
2	0	$\left\{1+\frac{8}{3}\left(\frac{\lambda^{(+,+)}}{R^2}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{\lambda^{(+,+)}}{\lambda^{(+,+)}+16}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$\lambda^{(+,+)}(\lambda^{(+,+)}+4)(\lambda^{(+,+)}+16) = R^4(\lambda^{(+,+)}+12)$
2	1	$-\frac{4}{\sqrt{6}}\frac{\lambda^{(+,+)}}{R^2}\left\{1+\frac{8}{3}\left(\frac{\lambda^{(+,+)}}{R^2}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{\lambda^{(+,+)}}{\lambda^{(+,+)}+16}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	2	$\frac{2}{\sqrt{6}}\frac{\lambda^{(+,+)}}{\lambda^{(+,+)}+16}\left\{1+\frac{8}{3}\left(\frac{\lambda^{(+,+)}}{R^2}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{\lambda^{(+,+)}}{\lambda^{(+,+)}+16}\right)\right\}^{-1/2}$	

Таблица 3

n	p	$W_{2p+1}^{(-,+)}(R^2)$	$\lambda^{(-,+)}$
0	0	1	$\lambda^{(-,+)} = -1-\frac{R^2}{4}$
1	0	$\left(\frac{\lambda^{(-,+)}+9}{2\lambda^{(-,+)}+10+R^2/2}\right)^{1/2}$	$(\lambda^{(-,+)}+1)(\lambda^{(-,+)}+9) = -\frac{R^2}{2}(\lambda^{(-,+)}+9)+\frac{3R^4}{16}$
1	1	$-\frac{4}{\sqrt{3}R^2}(\lambda^{(-,+)}+1+R^2/2)\times\left(\frac{\lambda^{(-,+)}+9}{2\lambda^{(-,+)}+10+R^2/2}\right)^{1/2}$	

Таблица 3 (продолжение)

n	p	$W_{2p+1}^{(-,+)}(R^2)$	$\lambda^{(-,+)}$
2	0	$\left\{1+\frac{2}{R^4}\left(\lambda^{(-,+)}+1+3R^2/4\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(-,+)}+1+3R^2/4}{\lambda^{(-,+)}+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(-,+)}+1)(\lambda^{(-,+)}+9)(\lambda^{(-,+)}+25)=-\frac{3R^2}{4}(\lambda^{(-,+)}+9)\times(\lambda^{(-,+)}+25)+\frac{R^4}{16}(13\lambda^{(-,+)}+205)+\frac{15R^6}{64}$
2	1	$-\frac{\sqrt{2}}{R^2}\left(\lambda^{(-,+)}+1+3R^2/4\right)\left\{1+\frac{2}{R^4}\left(\lambda^{(-,+)}+1+3R^2/4\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(-,+)}+1+3R^2/4}{\lambda^{(-,+)}+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	2	$\frac{\sqrt{10}}{4}\frac{\lambda^{(-,+)}+1+3R^2/4}{\lambda^{(-,+)}+25}\left\{1+\frac{2}{R^4}\left(\lambda^{(-,+)}+1+3R^2/4\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(-,+)}+1+3R^2/4}{\lambda^{(-,+)}+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 4

n	p	$W_{2p+1}^{(-,-)}(R^2)$	$\lambda^{(-,-)}$
0	0	1	$\lambda^{(-,-)}=-1+\frac{R^2}{4}$
1	0	$\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+9}{2\lambda^{(-,-)}+10-R^2/2}\right)^{1/2}$	$(\lambda^{(-,-)}+1)(\lambda^{(-,-)}+9)=\frac{R^2}{2}(\lambda^{(-,-)}+9)+\frac{3R^4}{16}$
1	1	$-\frac{4}{\sqrt{3}R}\left(\lambda^{(-,-)}+1-R^2/2\right)\times\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+9}{2\lambda^{(-,-)}+10-R^2/2}\right)^{1/2}$	
2	0	$\left\{1+\frac{2}{R^4}\left(\lambda^{(-,-)}+1-3R^2/4\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+1-3R^2/4}{\lambda^{(-,-)}+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(-,-)}+1)(\lambda^{(-,-)}+9)\times(\lambda^{(-,-)}+25)=\frac{3R^2}{4}(\lambda^{(-,-)}+9)(\lambda^{(-,-)}+25)+\frac{R^4}{16}(13\lambda^{(-,-)}+205)-\frac{15R^6}{64}$
2	1	$-\frac{\sqrt{2}}{R^2}\left(\lambda^{(-,-)}+1-3R^2/4\right)\times\left\{1+\frac{2}{R^4}\left(\lambda^{(-,-)}+1-3R^2/4\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+1-3R^2/4}{\lambda^{(-,-)}+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	2	$\frac{\sqrt{10}}{4}\frac{\lambda^{(-,-)}+1-3R^2/4}{\lambda^{(-,-)}+25}\times\left\{1+\frac{2}{R^4}\left(\lambda^{(-,-)}+1-3R^2/4\right)^2+\frac{5}{8}\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+1-3R^2/4}{\lambda^{(-,-)}+25}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 5

n	p	$W_{2p+2}^{(+,-)}(R^2)$	$\lambda^{(+,-)}$
0	0	1	$\lambda^{(+,-)} = -4$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+16}{\lambda^{(+,-)}+10}\right)^{1/2}$	$(\lambda^{(+,-)}+4)(\lambda^{(+,-)}+16) = \frac{R^4}{4}$
1	1	$-\frac{\sqrt{2}}{R^2}(\lambda^{(+,-)}+4)\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+16}{\lambda^{(+,-)}+10}\right)^{1/2}$	
2	0	$\left\{1+\frac{8}{5R^4}(\lambda^{(+,-)}+4)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+4}{\lambda^{(+,-)}+36}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(+,-)}+4)(\lambda^{(+,-)}+16)\times$ $\times(\lambda^{(+,-)}+36) =$ $= R^4(\lambda^{(+,-)}+24)$
2	1	$-\frac{4}{\sqrt{10}R^2}(\lambda^{(+,-)}+4)\left\{1+\frac{8}{5R^4}(\lambda^{(+,-)}+4)^2+\right.$ $\left.+\frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+4}{\lambda^{(+,-)}+36}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	2	$\sqrt{\frac{3}{5}\frac{\lambda^{(+,-)}+4}{\lambda^{(+,-)}+36}}\left\{1+\frac{8}{5R^4}(\lambda^{(+,-)}+4)^2+\right.$ $\left.+\frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+4}{\lambda^{(+,-)}+36}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 6

n	k	$U_{2k}^{(+,+)}(R^2)$	$\lambda^{(+,+)}$
0	0	1	$\lambda^{(+,+)} = 0$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\lambda^{(+,+)}+2+R^2/2}{\lambda^{(+,+)}+2}\right)^{1/2}$	$\lambda^{(+,+)}(\lambda^{(+,+)}+4) = \frac{R^4}{4}$
1	1	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\lambda^{(+,+)}+2-\frac{R^2}{2}\right)\left(\frac{\lambda^{(+,+)}+2+R^2/2}{\lambda^{(+,+)}+2}\right)^{1/2}$	
2	0	$\left\{1+\frac{1}{24}(\lambda^{(+,+)}+4-R^2)^2+\left(\frac{\lambda^{(+,+)}+4-R^2}{\lambda^{(+,+)}+4+R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$\lambda^{(+,+)}(\lambda^{(+,+)}+4)(\lambda^{(+,+)}+16) =$ $= R^4(\lambda^{(+,+)}+12)$
2	1	$-\frac{1}{2\sqrt{6}}(\lambda^{(+,+)}+4-R^2)\left\{1+\frac{1}{24}(\lambda^{(+,+)}+\right.$ $\left.+4-R^2)^2+\left(\frac{\lambda^{(+,+)}+4-R^2}{\lambda^{(+,+)}+4+R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	2	$\frac{\lambda^{(+,+)}+4-R^2}{\lambda^{(+,+)}+4+R^2}\left\{1+\frac{1}{24}(\lambda^{(+,+)}+4-R^2)^2+\right.$ $\left.+\left(\frac{\lambda^{(+,+)}+4-R^2}{\lambda^{(+,+)}+4+R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица 7

n	k	$U^{(-,+)}_{2k+1}(R^2)$	$\lambda^{(-,+)}$
0	0	1	$\lambda^{(-,+)} = -1 - \frac{R^2}{4}$
1	0	$\left(\frac{\lambda^{(-,+)}+3+3R^2/4}{2\lambda^{(-,+)}+10+R^2/2}\right)^{1/2}$	$(\lambda^{(-,+)}+1)(\lambda^{(-,+)}+9) = -\frac{R^2}{2}(\lambda^{(-,+)}+9) + \frac{3R^4}{16}$
1	1	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda^{(-,+)}+7-R^2/4)\times \left(\frac{\lambda^{(-,+)}+3+3R^2/4}{2\lambda^{(-,+)}+10+R^2/2}\right)^{1/2}$	
2	0	$\left\{1+\frac{1}{72}(\lambda^{(-,+)}+13-3R^2/4)^2 + \frac{5}{9}\left(\frac{\lambda^{(-,+)}+13-3R^2/4}{\lambda^{(-,+)}+5+5R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(-,+)}+1)(\lambda^{(-,+)}+9)\times(\lambda^{(-,+)}+25) = -\frac{3R^2}{4}(\lambda^{(-,+)}+9)\times(\lambda^{(-,+)}+25) + \frac{R^4}{16}(13\lambda^{(-,+)}+205) + \frac{15R^6}{64}$
2	1	$-\frac{\lambda^{(-,+)}+13-3R^2/4}{6\sqrt{2}}\left\{1+\frac{1}{72}(\lambda^{(-,+)}+13-3R^2/4)^2 + \frac{5}{9}\left(\frac{\lambda^{(-,+)}+13-3R^2/4}{\lambda^{(-,+)}+5+5R^2/4}\right)^2\right\}^{1/2}$	
2	2	$\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{\lambda^{(-,+)}+13-3R^2/4}{\lambda^{(-,+)}+5+5R^2/4}\left\{1+\frac{1}{72}(\lambda^{(-,+)}+13-3R^2/4)^2 + \frac{5}{9}\left(\frac{\lambda^{(-,+)}+13-3R^2/4}{\lambda^{(-,+)}+5+5R^2/4}\right)^2\right\}^{1/2}$	

Таблица 8

n	k	$U^{(+,-)}_{2k+1}(R^2)$	$\lambda^{(+,-)}$
0	0	1	$\lambda^{(+,-)} = -4$
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+10+R^2/2}{\lambda^{(+,-)}+10}\right)^{1/2}$	$(\lambda^{(+,-)}+4)(\lambda^{(+,-)}+16) = \frac{R^4}{4}$
1	1	$-\frac{1}{6\sqrt{2}}(\lambda^{(+,-)}+10-R^2/2)\times\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+10+R^2/2}{\lambda^{(+,-)}+10}\right)^{-1/2}$	

Таблица 8 (продолжение)

n	k	$U^{(+,-)}_{2k+1}(R^2)$	$\lambda^{(+,-)}$
2	0	$\left\{1+\frac{1}{120}(\lambda^{(+,-)}+16-R^2)^2+\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+16-R^2}{\lambda^{(+,-)}+16+R}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(+,-)}+4)(\lambda^{(+,-)}+16)\times(\lambda^{(+,-)}+36)=R^4(\lambda^{(+,-)}+24)$
2	1	$-\frac{\lambda^{(+,-)}+16-R^2}{2\sqrt{30}}\left\{1+\frac{1}{120}(\lambda^{(+,-)}+16-R^2)^2+\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+16-R^2}{\lambda^{(+,-)}+16+R}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	2	$\frac{\lambda^{(+,-)}+16-R^2}{\lambda^{(+,-)}+16+R^2}\left\{1+\frac{1}{120}(\lambda^{(+,-)}+16-R^2)^2+\left(\frac{\lambda^{(+,-)}+16-R^2}{\lambda^{(+,-)}+16+R^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

Таблица

n	k	$U^{(-,-)}_{2k}(R^2)$	$\lambda^{(-,-)}$
0	0	1	$\lambda^{(-,-)}=-1+\frac{R^2}{4}$
1	0	$\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+7+R^2/4}{2\lambda^{(-,-)}+10-R^2/4}\right)^{1/2}$	$(\lambda^{(-,-)}+1)(\lambda^{(-,-)}+9)=\frac{R^2}{2}(\lambda^{(-,-)}+9)+\frac{3R^4}{16}$
1	1	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda^{(-,-)}+3-3R^2/4)\times\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+7+R^2/4}{2\lambda^{(-,-)}+10-R^2/4}\right)^{1/2}$	
2	0	$\left\{1+\frac{1}{40}(\lambda^{(-,-)}+5-5R^2/4)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+5-5R^2/4}{\lambda^{(-,-)}+13+3R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	$(\lambda^{(-,-)}+1)(\lambda^{(-,-)}+9)\times(\lambda^{(-,-)}+25)=\frac{3R^2}{4}(\lambda^{(-,-)}+9)(\lambda^{(-,-)}+25)+\frac{R^4}{16}(13\lambda^{(-,-)}+205)-\frac{15R^6}{64}$
2	1	$-\frac{1}{2\sqrt{10}}(\lambda^{(-,-)}+5-5R^2/4)\left\{1+\frac{1}{40}(\lambda^{(-,-)}+5-5R^2/4)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+5-5R^2/4}{\lambda^{(-,-)}+13+3R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	
2	2	$\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\lambda^{(-,-)}+5-5R^2/4}{\lambda^{(-,-)}+13+3R^2/4}\left\{1+\frac{1}{40}(\lambda^{(-,-)}+5-5R^2/4)^2+\frac{3}{5}\left(\frac{\lambda^{(-,-)}+5-5R^2/4}{\lambda^{(-,-)}+13+3R^2/4}\right)^2\right\}^{-1/2}$	

5. МЕТОД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Исследование полученных выше трехчленных рекуррентных соотношений сопряжено с решением алгебраических уравнений высокого порядка и, разумеется, не может быть проведено в общем случае аналитически. Тем не менее при $R \ll 1$ и $R \gg 1$ свойства эллиптического интеграла движения в основном определяются слагаемым $\hat{\mathscr{P}}$ либо $\hat{L}^2$, и есть возможность использовать теорию возмущений. При $R \ll 1$ в качестве возмущения выступает второе слагаемое в операторе $\hat{\Lambda}$. Пронумеруем собственные значения величины λ индексом q, изменяющимся в пределах $0 \leqslant q \leqslant n$, и разобьем их на четыре группы: $\lambda_{2q}^{(+,+)}, \lambda_{2q+1}^{(-,+)}, \lambda_{2q+2}^{(+,-)}$ и $\lambda_{2q+1}^{(-,-)}$. Тогда, пользуясь стандартными формулами [6] теории возмущений и полученными в предыдущем разделе выражениями для матричных элементов оператора $\mathscr{P}$, получаем

$$\lambda_{2q}^{(+,+)} = -2q^2 - \frac{R^4}{32}\,\frac{n^2+q^2+n}{4q^2-1} + \frac{R^4}{64}\,n(n+1)\,\delta_{q,0} - \frac{R^4}{64}\,n(n+1)\,\delta_{q,1},$$

$$\lambda_{2q+1}^{(-,+)} = -(2q+1)^2 - \frac{R^2}{4}(n+1)\,\delta_{q,0} + \frac{R^4}{128}\left(\frac{(n-q)(n+q+2)}{q+1} - \frac{(n-q+1)(n+q+1)}{q}(1-\delta_{q,0})\right),$$

$$\lambda_{2q+1}^{(-,-)} = -(2q+1)^2 + \frac{R^2}{4}(n+1)\,\delta_{q,0} + \frac{R^4}{128}\left(\frac{(n-q)(n+q+2)}{q+1} - \frac{(n-q+1)(n+q+1)}{q}(1-\delta_{q,0})\right),$$

$$\lambda_{2q+2}^{(+,-)} = -(2q+2)^2 - \frac{R^4}{32}\,\frac{n^2+q^2+2q-3n+3}{(2q+1)(2q+3)},$$

$$\Psi_{E,\lambda}^{(+,+)} = \Phi_{2n,\,2q}^{(+,+)} + \frac{R^2}{16}\left(\frac{\sqrt{(n+q+1)(n-q)}}{2q+1}\,\Phi_{2n,\,2q+2}^{(+,+)} - \frac{\sqrt{(n-q+1)(n+q)}}{2q-1}\,\Phi_{2n,\,2q-2}^{(+,+)} + \sqrt{n(n+1)}\,\delta_{q,0}\Phi_{2n,\,2}^{(+,+)} - \sqrt{n(n+1)}\,\delta_{q,1}\Phi_{2n,\,0}^{(+,+)}\right),$$

$$\Psi_{E,\lambda}^{(-,+)} = \Psi_{E,\lambda}^{(-,-)} = \Phi_{2n+1,\,2q+1}^{\left(\begin{smallmatrix}-,+\\-,-\end{smallmatrix}\right)} + \frac{R^2}{16}\left(\frac{\sqrt{(n-q)(n+q+2)}}{q+1}\,\Phi_{2n+1,\,2q+3}^{\left(\begin{smallmatrix}-,+\\-,-\end{smallmatrix}\right)} - \frac{\sqrt{(n-q+1)(n+q+1)}}{q}(1-\delta_{q,0})\,\Phi_{2n+1,\,2q-1}^{\left(\begin{smallmatrix}-,+\\-,-\end{smallmatrix}\right)}\right),$$

$$\Psi_{E,\lambda}^{(+,-)} = \Phi_{2n+2,\,2q+2}^{(+,-)} + \frac{R^2}{16}\left(\frac{\sqrt{(n-q)(n+q+3)}}{2q+3}\,\Phi_{2n+2,\,2q+4}^{(+,-)} - \frac{\sqrt{(n-q+1)(n+q+2)}}{2q+3}\,\Phi_{2n+2,\,2q+4}^{(+,-)}\right).$$

В приведенных формулах фактор $(1-\delta_{q,0})/q$ по определению считается равным нулю при $q=0$.

При $R \gg 1$, разделив обе части уравнения на собственные функции и собственные значения оператора $\hat{\Lambda}$ на $R^2/2$ и считая член $2\hat{L}^2/R^2$ возмущением, получаем

$$\lambda_{2q}^{(+,+)} = -\frac{R^2}{2}(q-n) - 2q(2n-q) - 2n,$$

$$\lambda_{2q+1}^{(-,+)} = \lambda_{2q+1}^{(-,-)} = -\frac{R^2}{4}(2q-2n-1) - [2q(2n+1-q)+2n+1],$$

$$\lambda_{2q+2}^{(+,-)} = -\frac{R^2}{2}(q-n-1) - 2[q(2n+2-q)+n+1],$$

$$\Psi_{E\lambda}^{(+,+)} = \Pi_{2q,\,2n-2q} +$$
$$+\frac{2}{R^2}\left(\sqrt{q(2q-1)(n-q+1)(2n-2q+1)}\,\Pi_{2q-2,\,2n-2q+2} -\right.$$
$$\left. -\sqrt{(q+1)(2q+1)(n-q)(2n-2q-1)}\,\Pi_{2q+2,\,2n-2q-2}\right),$$

$$\Psi_{E,\lambda}^{(-,+)} = \Pi_{2q+1,\,2n-2q} +$$
$$+\frac{2}{R^2}\left(\sqrt{q(2q+1)(n-q+1)(2n-2q+1)}\,\Pi_{2q-1,\,2n-2q+2} -\right.$$
$$\left. -\sqrt{(q+1)(2q+3)(n-q)(2n-2q-1)}\,\Pi_{2q+3,\,2n-2q-2}\right),$$

$$\Psi_{E,\lambda}^{(-,-)} = \Pi_{2q,\,2n-2q+1} +$$
$$+\frac{2}{R^2}\left(\sqrt{q(2q-1)(2n-2q+3)(n-q+1)}\,\Pi_{2q-2,\,2n-2q+3} -\right.$$
$$\left. -\sqrt{(q+1)(2q+1)(2n-2q+1)(n-q)}\,\Pi_{2q+2,\,2n-2q-1}\right),$$

$$\Psi_{E,\lambda}^{(+,-)} = \Pi_{2q+1,\,2n-2q+1} +$$
$$+\frac{2}{R^2}\left(\sqrt{q(2q+1)(n-q+1)(2n-2q+3)}\,\Pi_{2q-1,\,2n-2q+3} -\right.$$
$$\left. -\sqrt{(q+1)(2q+3)(n-q)(2n-2q+1)}\,\Pi_{2q+3,\,2n-2q-1}\right).$$

При выводе этих выражений нами были учтены предельные соотношения [1]

$$\lim_{R\to\infty}\frac{2\lambda_{2q}^{(+,+)}}{R^2} = -2(q-n), \quad \lim_{R\to\infty}\frac{2\lambda_{2q+2}^{(+,-)}}{R^2} = -2(q-n-1),$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{2\lambda_{2q+1}^{(-,+)}}{R^2} = \lim_{R\to\infty}\frac{2\lambda_{2q+1}^{(-,-)}}{R^2} = -(2q-2n-1).$$

Аналогичным образом могут быть вычислены и более высокие порядки в ряде теории возмущений.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный выше метод вычисления собственных значений и общих собственных функций эллиптического интеграла движения и гамильтониана КО применим к более широкому классу операторов. В частности, можно без всяких трудностей записать рекуррентные соотношения, определяющие разложение собственных функций

$$\hat{D} = g(R^2)\hat{L}^2 + f(R^2)\hat{\mathscr{P}}$$

($g(R^2)$ и $f(R^2)$ — заданные функции от R^2) и его собственные значения. Эти собственные функции будут, очевидно, также собственными функциями гамильтониана КО, но уже, как правило, выходящими за пределы класса решений, которые можно получить в рамках метода разделения переменных. Исключение составляют лишь случаи: а) $g=0$; б) $f=0$; в) $f=g\frac{R^2}{2}$, которым соответствует возможность разделения переменных в уравнении Шредингера для КО в декартовых, полярных и эллиптических координатах.

Мы признательны Г. С. Саакяну, Я. А. Смородинскому, Л. И. Пономареву и С. И. Виницкому за интересные обсуждения.

Литература

[1] *Мардоян Л. Г., Погосян Г. С., Сисакян А. Н., Тер-Антонян В. М.* Эллиптический базис кругового осциллятора. Препринт ОИЯИ Р2-84-211, Дубна: ОИЯИ, 1984.
[2] *Englefield M. J.* Group Theory and the Coulomb Problem. New-York, London, Sydney, Toronto: Wiley-Interscience, 1972.
[3] *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике, т. 1. М.: Мир, 1974.
[4] *Погосян Г. С., Тер-Антонян В. М.*— ТМФ, 1979, *40*, № 1, 140—143.
[5] *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
[6] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
8.VIII.1984 г.

TO THE ELLIPTIC BASE OF CIRCULAR OSCILLATOR

Mardoyan L. G., Pogosyan G. S., Sissakyan A. N., Ter-Antonyan V. M.

The complete set of mutually commuting operators which determine the elliptic base of a quantum circular oscillator (CO) is found. The elliptic base of CO is introduced and three-term recurrent relationships which generate it are derived. Elliptic corrections to the polar and Decart bases of CO are calculated.