

ДВУМЕРНЫЙ АТОМ ВОДОРОДА.

I. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БАЗИС

Мардоян Л. Г., Погосян Г. С., Сисакян А. Н.,
Тер-Антонян В. М.

Дается анализ двумерного атома водорода в эллиптических координатах. Методом разделения переменных проблема сведена к решению уравнения Айнса в комплексной плоскости при определенных граничных условиях. Показано, что найденные решения переходят при $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ (R — параметр, задающий эллиптические координаты) соответственно в полярный и параболический базисы. Приведен явный вид эллиптического базиса для низших квантовых состояний.

ВВЕДЕНИЕ

Двумерным атомом водорода принято называть электрон-протонную систему с потенциалом взаимодействия $U = -\alpha/\sqrt{x^2+y^2}$. С физической точки зрения такая система является, по всей видимости, идеализацией, отражающей поведение атома водорода в полях, которые вынуждают электрон и протон находиться в одной плоскости. Не исключается также возможность того, что в такой ситуации может привести разделение переменных, проведенное в уравнении Шредингера, описывающем какую-либо реальную задачу. Примером последнего типа является задача об атоме водорода в сильном магнитном поле, которая сводится к задаче об одномерном атоме водорода, рассмотренном в [1].

Двумерный атом водорода является удобным объектом для выяснения многих вопросов, возникающих при исследовании более сложных систем. В первую очередь это касается феномена скрытой симметрии, присущего водородоподобным атомам вообще, но имеющего геометрически наглядную интерпретацию лишь в случае двумерного атома водорода [2]. Из сравнения энергетических спектров и плотностей распределения вероятностей двух- и трехмерного атома водорода легко установить роль фактора размерности для водородоподобных систем и его влияние на физически наблюдаемые закономерности [3].

Двумерный атом водорода, будучи системой, обладающей скрытой симметрией, может быть одновременно исследован в нескольких координатных системах — полярной, параболической и эллиптической. В отсутствие внешних полей эти базисы математически равноценны, хотя очевидно, что при описании спектроскопии двумерного атома водорода физически предпочтительней полярный базис, а при анализе аналога резерфордского рассеяния — параболический. Истинное назначение параболического и эллиптического базисов (не очевидных с точки зрения геометрической

симметрии кулоновского поля) связано с описанием поведения двумерного атома водорода в однородном электрическом поле и в поле другого протона, т. е. с эффектом Штарка и с плоской задачей о двух неподвижных кулоновских центрах. В рамках теории возмущений с вырождением эти базисы приобретают статус правильных невозмущенных волновых функций, по которым следует вычислять необходимые матричные элементы, энергетические поправки и т. д. Перечисленные три базиса исчерпывают все базисы, которые можно получить, находясь в рамках метода разделения переменных [4]. Такая ограниченность числа базисов делает привлекательной задачу об исчерпывающем анализе всех трех базисов и установлении связей между ними.

В настоящей работе решена задача о двумерном атоме водорода в эллиптической системе координат. В математическом плане эта задача имеет много общего с анализом атома водорода в сфероидальных координатах [5–7].

Эллиптические координаты являются наиболее общими ортогональными координатами на плоскости. Они содержат в себе размерный параметр R , при устремлении которого к нулю или бесконечности в пределе получаются полярные, параболические и декартовы координаты (подробности смотри ниже).

Работа построена следующим образом. В разделе 1 в целях полноты изложения приводятся необходимые для дальнейшего сведения об эллиптической системе координат. В разделе 2 производится разделение переменных и показывается, что при определенных условиях проблема сводится к решению уравнения Айнса в комплексной плоскости. В разделе 3 строится эллиптический базис двумерного атома водорода, в четвертом рассматривается ортогональность эллиптических волновых функций, в пятом и шестом обсуждаются пределы $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$, а в седьмом вычисляется эллиптическая нормировочная постоянная. В приложении приводится явный вид полярного параболического и эллиптического базисов для низших квантовых состояний.

1. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Положение произвольной точки (x, y) верхней либо нижней полуплоскости можно описать заданием величин r_1 и r_2 , определяющих ее расстояние от точек $(0, 0)$ и $(R, 0)$ (рис. 1). Такой подход удобен в двухцентровых задачах, когда в точках $(0, 0)$ и $(R, 0)$ находятся источники, создающие поле, в котором исследуется движение частицы с координатами (x, y) .

Эллиптические координаты ξ и η определяются через r_1 и r_2 следующим образом:

$$(1.1) \quad \operatorname{ch} \xi = (r_1 + r_2)/R, \quad \cos \eta = (r_1 - r_2)/R,$$

и изменяются в пределах $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta \leq 2\pi$. Симметричным относительно оси абсцисс точкам соответствуют эллиптические координаты (ξ, η) и $(\xi, 2\pi - \eta)$. Линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ сохраняют постоянными сумму и разность расстояний r_1 и r_2 и потому являются софокусными эллипсами и параболлами с фокусами в точках $(0, 0)$ и $(R, 0)$. Эллиптические коор-

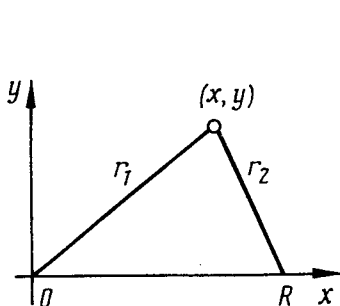


Рис. 1

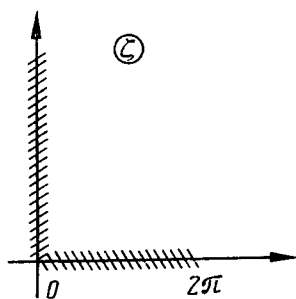


Рис. 2

динаты являются ортогональными. Декартовы координаты выражаются через ξ и η следующим образом:

$$x = \frac{R}{2} (\operatorname{ch} \xi \cos \eta + 1), \quad y = \frac{R}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

Лапласиан и элемент двумерного объема в эллиптических координатах имеют вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{4}{R^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right),$$

$$dV = dx dy = \frac{R^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)}{4} d\xi d\eta.$$

В пределах $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ эллиптические координаты вырождаются в полярные и параболические:

$$(1.2) \quad \operatorname{ch} \xi \rightarrow 2r/R, \quad \cos \eta \rightarrow \cos \varphi \quad (R \rightarrow 0),$$

$$(1.3) \quad \operatorname{ch} \xi \rightarrow 1 + v^2/R, \quad \cos \eta \rightarrow -1 + u^2/R \quad (R \rightarrow \infty).$$

Здесь v^2 и u^2 — параболические координаты, связанные с полярными формулами $v^2 = r(1 - \cos \varphi)$, $u^2 = r(1 + \cos \varphi)$.

Предельные переходы в (1.2) и (1.3) производятся при фиксированном положении точки (x, y) и фиксированном начале координат. Из эллиптической системы координат можно получить также декартову, если перенести начало координат в точку $(R/2, 0)$, а затем удалить левый и правый фокусы к $-\infty$ и $+\infty$, соответственно.

2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В эллиптических координатах двумерный атом водорода описывается уравнением Шредингера

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \left[\frac{\lambda^2 R^2}{4} (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) + R (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \right] \psi = 0,$$

здесь $\lambda = \sqrt{-2E}$ и принята кулонова система единиц, в которой $\hbar = m = \alpha = 1$. Из структуры уравнения (2.1) видно, что переменные в нем разделяются.

Подстановка

$$(2.2) \quad \psi(\xi, \eta) = X(\xi) Y(\eta)$$

переводит уравнение в частных производных (2.1) в два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$(2.3) \quad \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} + \left[A + R \operatorname{ch} \xi - \frac{\lambda^2 R^2}{4} \operatorname{ch}^2 \xi \right] X(\xi) = 0,$$

$$(2.4) \quad \frac{d^2 Y(\eta)}{d\eta^2} - \left[A + R \cos \eta - \frac{\lambda^2 R^2}{4} \cos^2 \eta \right] Y(\eta) = 0,$$

в которых A — константа разделения в эллиптических координатах. Эти уравнения могут быть записаны в единой форме

$$(2.5) \quad \frac{d^2 Z(\zeta)}{d\zeta^2} - \left[A + R \cos \zeta - \frac{\lambda^2 R^2}{4} \cos^2 \zeta \right] Z(\zeta) = 0,$$

где при $\zeta \in [0, 2\pi]$ имеем уравнение (2.4), а при $\zeta \in [0, i\infty)$ — уравнение (2.3). Иными словами, в комплексной плоскости ζ , как видно из рис. 2, «физическими» являются заштрихованные области на прямых $\operatorname{Im} \zeta = 0$ и $\operatorname{Re} \zeta = 0$.

Функции $X(\xi)$ и $Y(\eta)$ выражаются через $Z(\zeta)$ следующим образом: $X(\xi) = Z(i\xi)$, $Y(\eta) = Z(\eta)$. Из условия однозначности $X(\xi) = X(\xi + 2\pi i)$, $Y(\eta) = Y(\eta + 2\pi)$ заключаем, что физически приемлемыми решениями уравнения (2.5) являются решения, удовлетворяющие условию периодичности

$$(2.6) \quad Z(\zeta) = Z(\zeta + 2\pi)$$

и конечные во всех точках физической области.

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БАЗИС

Уравнение (2.5) относится к классу обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Оно подстановкой

$$(3.1) \quad Z(\zeta) = e^{-\frac{\lambda R}{2} \cos \zeta} W(\zeta)$$

и последующей заменой $\zeta = 2u$ приводится к уравнению Айнса [8]

$$(3.2) \quad \frac{d^2 W}{du^2} + \omega \sin 2u \frac{dW}{du} + (g - p\omega \cos 2u) W = 0,$$

в котором параметры ω , g и p равны $\omega = 2\lambda R$, $g = \lambda^2 R^2 - 4A$, $p = -1 + 2/\lambda$.

Вводя новую переменную $t = \cos u$ преобразуем уравнение (3.2) к алгебраическому виду

$$(3.3) \quad (1-t^2) \frac{d^2 W}{dt^2} - t(2\omega + 1 - 2\omega t^2) \frac{dW}{dt} + (g - p\omega - 2p\omega t^2) W = 0.$$

Обстоятельный анализ уравнений (3.2) и (3.3) был выполнен Арскоттом [8]. Согласно [8] решения уравнения (3.3) можно разбить на следующие четыре типа:

$$(3.4) \quad W_1^{(+)}(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s} (\cos u)^{2s},$$

$$W_1^{(-)}(\zeta) = \sin u \sum_{s=0}^{\infty} b_{2s} (\cos u)^{2s};$$

$$(3.5) \quad W_2^{(-)}(\xi) = \sin u \sum_{s=0}^{\infty} b_{2s+1} (\cos u)^{2s+1},$$

$$W_2^{(+)}(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s+1} (\cos u)^{2s+1}.$$

Такое разбиение диктуется инвариантностью первоначального уравнения (3.2) относительно инверсии $u \rightarrow -u$ и $u \rightarrow u + \pi$. Условию (2.6) удовлетворяют лишь решения (3.4) и (3.5). Подставим эти решения в уравнение (3.3) и найдем рекуррентные соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты a_{2s} и b_{2s+1} :

$$(3.6) \quad (s+1/2)(s+1)a_{2s+2} + \left[\frac{g+p\omega}{4} - s(\omega+s) \right] a_{2s} + \omega \left(s - \frac{p+2}{2} \right) a_{2s-2} = 0,$$

$$(3.7) \quad (s+3/2)(s+1)b_{2s+3} + \left[\frac{g+p\omega}{4} - (\omega+s)s - \left(1+2s + \frac{\omega}{2} \right) \right] b_{2s+1} + \omega \left(s - \frac{p}{2} \right) b_{2s-1} = 0.$$

Исследуем сходимость рядов (3.4) и (3.5), пользуясь методом, предложенным в [5]. Пусть при больших s

$$(3.8) \quad a_{2s+2}/a_{2s} \sim c_0 + c_1/s + \dots$$

Тогда при таких же s

$$(3.9) \quad a_{2s}/a_{2s-2} \sim c_0 + c_1/(s-1) + \dots = c_0 + c_1/s + O(1/s^2).$$

Поделим рекуррентное соотношение (3.6) на a_{2s-2} и воспользуемся (3.8) и (3.9). Ограничиваясь первыми двумя главными членами по s , получим уравнения

$$c_0(c_0-1) = 0, \quad c_0(2c_1+3/2c_0) - (c_1+\omega c_0) + \omega = 0,$$

корни которых суть: а) $c_0=0, c_1=\omega$; б) $c_0=1, c_1=-3/2$.

В случае «а»

$$Z(\xi) \sim e^{\lambda R} e^{\frac{\lambda R}{2} \cos \xi},$$

и при $\xi \rightarrow i\infty$ это решение не будет конечным.

В случае «б»

$$Z(\xi) > \exp \{ 1/2 + 1/2(1-\lambda R) \cos \xi \},$$

и, следовательно, это решение при $\xi \rightarrow i\infty$ не при всех λR стремится к нулю. Аналогичный анализ рекуррентного соотношения (3.7) приводит также к двум случаям: а) $c_0=0, c_1=\omega$; б) $c_0=1, c_1=-1/2$, из которых новым является последний случай. При этом

$$W(\xi) \sim \sum_s \frac{\left(\cos \frac{\xi}{2} \right)^{2s}}{s^{1/2}},$$

т. е. расходится при $\xi=0$ и при $\xi=2\pi$.

Из приведенного анализа следует, что ряды (3.4) и (3.5) будут конечными во всей физической области лишь в том случае, если они обрываются.

Пусть a_{2N} и $a_{2N'+1}$ — последние отличные от нуля коэффициенты в (3.4) и (3.5). Тогда из рекуррентных соотношений (3.6) и (3.7), если взять в них $s=N+1$ и $s=N'+1$, соответственно, следует, что $N=N'$ и спектр энергий имеет вид

$$(3.10) \quad E_N = -\frac{1}{2(N+1/2)^2},$$

где $N=0, 1, \dots$, т. е. совпадает с известным результатом [9].

Запишем рекуррентные соотношения (3.6) и (3.7) так, чтобы условия обрезания рядов (3.4) и (3.5) выполнялись автоматически:

$$(3.11) \quad \alpha_{2s} a_{2s+2} + \beta_{2s} a_{2s} + R \gamma_{2s} a_{2s-2} = 0,$$

$$(3.11a) \quad \alpha_{2s} = (s+1/2)(s+1),$$

$$\beta_{2s} = -s(2\lambda R + s) + \frac{\lambda^2 R^2}{4} + R - \frac{\lambda R}{2} - A(R),$$

$$\gamma_{2s} = 2\lambda(s-N-1);$$

$$(3.12) \quad \alpha_{2s+1} a_{2s+3} + \beta_{2s+1} a_{2s+1} + R \gamma_{2s+1} a_{2s-1} = 0,$$

$$(3.12a) \quad \alpha_{2s+1} = (s+3/2)(s+1),$$

$$\beta_{2s+1} = -s(2\lambda R + s) + \frac{\lambda^2 R^2}{4} + R - \frac{3\lambda R}{2} - 1 - 2s - A(R),$$

$$\gamma_{2s+1} = 2\lambda(s-N).$$

К этим соотношениям следует добавить условия $a_0 = a_1 = 1$, $a_{-1} = a_{-2} = 0$. Каждое из рекуррентных соотношений (3.11) и (3.12) — это система однородных уравнений, совместных лишь при условии равенства нулю соответствующих детерминантов:

$$(3.13) \quad D_{2N}^{(+)}(A) = \begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & & & & & & \\ R\gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & & & & & \\ & R\gamma_4 & \beta_4 & \alpha_4 & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & R\gamma_{2N-2} & \beta_{2N-2} & \alpha_{2N-2} \\ & & & & & & R\gamma_{2N} & \beta_{2N} & \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3.14) \quad D_{2N+1}^{(-)}(A) = \begin{vmatrix} & \beta_1 & \alpha_1 & & & & & & \\ R\gamma_3 & \beta_3 & \alpha_3 & & & & & & \\ & R\gamma_5 & \beta_5 & \alpha_5 & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & R\gamma_{2N-3} & \beta_{2N-3} & \alpha_{2N-3} \\ & & & & & & R\gamma_{2N-1} & \beta_{2N-1} & \end{vmatrix} = 0.$$

Корни уравнений (3.13) и (3.14) дают собственные значения $A(\frac{\pm}{N})(R)$ константы разделения. Относительно детерминантов такого типа известно [5], что они имеют вещественные и различные корни. Это значит, что собственные значения эллиптической константы разделения вещественны

и могут быть пронумерованы целыми индексами q и q' , а именно $A_N^{(+)}(R) \rightarrow A_{Nq}^{(+)}(R)$; $A_N^{(-)}(R) \rightarrow A_{Nq'}^{(-)}(R)$, причем $0 \leq q \leq N$, $1 \leq q' \leq N$. Кратность вырождения N -го энергетического уровня равна, как и должно быть, $2N+1$.

Полиномиальные решения уравнения (3.2) принято обозначать через $C_N^q(u, R)$ и $S_N^q(u, R)$, а функции (3.1) — через $hc_N^q(u, R)$ и $hs_N^q(u, R)$. На языке этих обозначений физически допустимые решения уравнения (3.2) имеют вид

$$C_N^q(u, R) = \sum_{s=0}^N a_{2s}^{N,q}(R) \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^s,$$

$$S_N^{q'}(u, R) = \sum_{s=0}^{N-1} a_{2s+1}^{N,q'}(R) \frac{\sin \xi}{2} \left(\frac{1 + \cos \xi}{2} \right)^s,$$

а соответствующие им решения уравнения (2.5) суть

$$(3.15) \quad hc_N^q(u, R) = e^{-\frac{\lambda R}{2} \cos \xi} C_N^q(u, R),$$

$$(3.16) \quad hs_N^{q'}(u, R) = e^{-\frac{\lambda R}{2} \cos \xi} S_N^{q'}(u, R).$$

В работе [8] показано, что при соответствующей нумерации индексы q и q' дают число нулей полиномов $C_N^q(u, R)$ и $S_N^{q'}(u, R)$.

При $\xi = i\xi$ решения (3.15) и (3.16) дают радиальные, а при $\xi = \eta$ — угловые волновые функции. В качестве радиальных волновых функций удобно иметь дело не с $hc_N^q(u, R)$ и $hs_N^{q'}(u, R)$, а с решениями $hc_N^{q_1}\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right)$ и $hs_N^{q_2}\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right)$, которые, как показано в [8], отличаются от предыдущих лишь фазовым множителем. Коэффициенты $a_{2s}(-R)$ и $a_{2s+1}(-R)$ вычисляются из рекуррентных соотношений, отличающихся от (3.11) и (3.12) заменой $R \rightarrow -R$.

Волновые функции (2.2) разбиваются на два класса, каждому из которых соответствует свое число нулей q_1 , q_2 и q_1' , q_2' ($q_1 + q_2 = q_1' + q_2' = N$), причем

$$(3.17) \quad A_{Nq_1}^{(+)}(R) = A_{Nq_2}^{(+)}(-R),$$

$$(3.18) \quad A_{Nq_1'}^{(-)}(R) = A_{Nq_2'}^{(-)}(-R).$$

Итак, число q_1 при данном N определяет число q_2 , $q_1' \rightarrow q_2'$, а эллиптические базисы суть

$$(3.19) \quad \Psi_{Nq_1q_2}^{(+)}(\xi, \eta; R) = C_{Nq_1q_2}^{(+)}(R) hc_N^{q_1}\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) hc_N^{q_2}\left(\frac{\eta}{2}; R\right),$$

$$(3.20) \quad \Psi_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(\xi, \eta; R) = C_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(R) hs_N^{q_1'}\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) \times \\ \times hs_N^{q_2'}\left(\frac{\eta}{2}; R\right).$$

В приложении приведены эти базисы для низших квантовых чисел.

4. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Выберем нормировочные константы $C_{Nq_1q_2}^{(\pm)}(R)$ так, чтобы выполнялось условие

$$(4.1) \quad \frac{R^2}{4} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \psi_{Nq_1q_2}^{(\pm)*}(\xi, \eta; R) \psi_{Nq_1q_2}^{(\pm)}(\xi, \eta; R) (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) d\xi d\eta = 1.$$

Из условия периодичности (2.6) и нечетности функций (3.16) по η следует, что базисы (3.19) и (3.20) взаимно ортогональны при всех N, q_1, q_2 и q_1', q_2' . Это, в свою очередь, означает, что каждый из этих базисов сам по себе не является полным.

Элементы каждого из базисов (3.19) и (3.20), будучи собственными функциями гамильтониана, являются ортогональными по N , т. е. при $N \neq N'$

$$(4.2) \quad \int \psi_{Nq_1q_2}^{(\pm)}(\xi, \eta; R) \psi_{N'q_1'q_2'}^{(\pm)*}(\xi, \eta; R) dV = 0.$$

Имеются еще два добавочных условия ортогональности, являющихся следствием вырожденности энергетического спектра по квантовым числам q . Действительно, из уравнений (2.3) и (2.4) при $q_1 \neq q_2$ и $q_1' \neq q_2'$ с помощью хорошо известного в задаче Штурма — Лиувилля приема [10] получим

$$\int_0^\infty h c_N^{q_1} \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right) h c_N^{q_2*} \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right) d\xi = 0,$$

$$\int_0^\infty h s_N^{*q_1'} \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right) h s_N^{q_2'} \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right) d\xi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} h c_N^{*q_1} \left(\frac{\eta}{2}; R \right) h c_N^{q_2} \left(\frac{\eta}{2}; R \right) d\eta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} h s_N^{*q_1'} \left(\frac{\eta}{2}; R \right) h s_N^{q_2'} \left(\frac{\eta}{2}; R \right) d\eta = 0.$$

Пользуясь этими формулами, легко показать, что при $q=q'$

$$(4.3) \quad \int \psi_{Nq_1q_2}^{*(\pm)}(\xi, \eta; R) \psi_{Nq_1'q_2'}^{(\pm)}(\xi, \eta; R) dV = 0.$$

Наконец подчеркнем, что у нас функции C_N^q и S_N^q отличаются от общепринятых полиномов Айнса [8] нормировкой (4.1) и требованием, чтобы при $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ эллиптический базис переходил в полярный и параболический, соответственно.

5. ПРЕДЕЛ $R \rightarrow 0$

Покажем, что при $R \rightarrow 0$ эллиптический базис переходит в полярный. Рассмотрим сначала рекуррентное соотношение (3.11). При $R \rightarrow 0$ в (3.13) можно выбросить элементы $R\gamma_{2s}$, после чего детерминант переходит в произведение диагональных элементов. Обозначив номер равного нулю диагонального элемента через m , получим $\beta_{2m} = 0$, т. е. $A_{Nq_1}^{(+)}(0) = A_{Nq_2}^{(+)}(0) = -m^2$.

Отсюда следует, что в пределе $R \rightarrow 0$ квантовые числа q_1 и q_2 стремятся соответственно к значениям m и $N-m$, а

$$\beta_{2s}(\pm R) \rightarrow \bar{\beta}_{2s} = -s^2 + m^2.$$

Выписывая теперь рекуррентные соотношения (3.11) последовательно для $s=0, 1, \dots, m-1$ и помня, что $a_{-2}=0$, легко убедиться, что при $R \rightarrow 0$ (3.11) переходит в

$$(5.1) \quad \alpha_{2s} a_{2s+2}(\pm R) + \bar{\beta}_{2s} a_{2s}(\pm R) = 0,$$

если $0 \leq s \leq m-1$.

Аналогично отправляясь «сверху», т. е. из условия $a_{2N+2}=0$, приходим к выводу, что при $R \rightarrow 0$ и $m+1 \leq s \leq N$ (3.11) заменяется на

$$(5.2) \quad \bar{\beta}_{2s} a_{2s}(\pm R) \pm R \gamma_{2s} a_{2s-2}(\pm R) = 0.$$

При $s=m$, разлагая $A(R)$ в ряд Тейлора, получим

$$\bar{\beta}_{2m} \xrightarrow{R \rightarrow 0} \varepsilon_{2m} R + O(R^2),$$

где

$$\varepsilon_{2m} = \frac{N-2m}{N+1/2} - \left(\frac{dA_{N,m}^{(+)}}{dR} \right)_{R=0},$$

и потому (3.11) принимает при $s=m$ вид

$$(5.3) \quad \alpha_{2m} a_{2m+2} + R \varepsilon_{2m} a_{2m} + R \gamma_{2m} a_{2m-2} = 0.$$

Согласно (5.1) и (5.2)

$$a_{2m+2} = -\frac{R \gamma_{2m+2}}{\bar{\beta}_{2m+2}} a_{2m}, \quad a_{2m-2} = -\frac{\alpha_{2m-2}}{\bar{\beta}_{2m-2}} a_{2m},$$

и подставляя это в (5.3), имеем

$$(dA_{N,m}^{(+)}/dR)_{R=0} = 0.$$

Полученная формула является тем ограничением, при котором условия обрезания при $s=-1$ и $s=N+1$ согласованы.

Аналогичный анализ рекуррентных соотношений (3.12) приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} \alpha_{2s+1} a_{2s+3}(\pm R) + \bar{\beta}_{2s+1} a_{2s+1}(\pm R) &= 0, & 0 \leq s \leq m-2, \\ \bar{\beta}_{2s+1} a_{2s+1}(\pm R) \pm R \gamma_{2s+1} a_{2s-1}(\pm R) &= 0, & m \leq s \leq N-1, \end{aligned}$$

в которых $\bar{\beta}_{2s+1} = -(s+1)^2 + m^2$, и к условию

$$\left(\frac{dA_{N,m-1}^{(-)}}{dR} \right)_{R=0} = 0.$$

Теперь, обращаясь к двучленным рекуррентным соотношениям (5.1) и (5.2), получим

$$(5.4) \quad a_{2s}(\pm R) \xrightarrow{R \rightarrow 0} (-1)^s \frac{\bar{\beta}_0 \bar{\beta}_2 \dots \bar{\beta}_{2s-2}}{\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2s-2}} = \frac{(m)_s (-m)_s}{(1/2)_s s!}$$

при $1 \leq s \leq m$ и

$$(5.5) \quad a_{2s+2m}(\pm R) \xrightarrow{R} (-1)^m (\pm 2\lambda R)^s \frac{(-N+m)_s a_{2m}(\pm R)}{(2m+1)_s s!}$$

при $1 \leq s \leq N-m$, здесь $(n)_s = \Gamma(n+s)/\Gamma(n)$.

Согласно (1.2)

$$C_N^q \left(\frac{\eta}{2}; R \right) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \sum_{s=0}^N a_{2s}(R) \left(\frac{1+\cos \varphi}{2} \right)^s,$$

$$C_N^q \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \sum_{s=0}^N \frac{a_{2s}(-R)}{R^s} (-r)^s.$$

Подставляя сюда (5.4) и (5.5), замечаем, что многочлены приобретают вид

$$C_N^q \left(\frac{\eta}{2}; R \right) \xrightarrow{R \rightarrow 0} F \left(m, -m; \frac{1}{2}; \frac{1+\cos \varphi}{2} \right) = (-1)^m \cos m\varphi,$$

$$C_N^q \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right) \xrightarrow{R \rightarrow 0} (-1)^m a_{2m}(-R) \left(\frac{r}{R} \right)^m \times \\ \times F(-N+m; 2m+1; 2\lambda r).$$

Описанная схема рассуждений применима и к функциям

$S_N^q \left(\frac{\eta}{2}; R \right)$ и $S_N^q \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right)$. Приведем результат

$$S_N^q \left(\frac{\eta}{2}; R \right) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{2} F \left(1-m, 1+m; \frac{3}{2}; \frac{1+\cos \varphi}{2} \right) = \\ = (-1)^{m-1} \frac{\sin m\varphi}{2m},$$

$$S_N^q \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right) \xrightarrow{R \rightarrow 0} a_{2m-1}(-R) i \left(-\frac{r}{R} \right)^m \times \\ \times F(-N+m; 2m+1; 2\lambda r).$$

Легко убедиться, что

$$a_{2m}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow 0} (-1)^m 2^{2m-1}, \quad a_{2m-1}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow 0} (-1)^{m-1} \frac{4^{m-1}}{m},$$

и получить

$$\psi_{Nq_1q_2}^{(+)}(\xi, \eta; R) \xrightarrow{R \rightarrow 0} C_{Nq_1q_2}^{(+)}(R) 2^{m-1} e^{-\lambda r} \left(\frac{2r}{R} \right)^m \times \\ \times F(-N+m; 2m+1; 2\lambda r) \cos m\varphi, \\ \psi_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(\xi, \eta; R) \xrightarrow{R} i C_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(R) \frac{(-1)^m}{2m^2} 2^{m-2} \times \\ \times e^{-\lambda r} \left(\frac{2r}{R} \right)^m F(-N+m; 2m+1; 2\lambda r) \sin m\varphi.$$

Нами ниже будет показано, что

$$(5.6) \quad |C_{Nq_1q_2}^{(+)}(R)| \xrightarrow{R \rightarrow 0} \left(\frac{8\lambda^3}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\lambda R}{2} \right)^m \sqrt{\frac{(N+m)!}{(N-m)!}} \frac{1}{(2m)!}$$

$$(5.7) \quad |C_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(R)| \xrightarrow{R \rightarrow 0} \left(\frac{8\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda R}{2}\right)^m \frac{4m^2}{(2m)!} \sqrt{\frac{(N+m)!}{(N-m)!}}.$$

Пользуясь этими предельными выражениями, имеем

$$\psi_{Nq_1q_2}^{(\pm)}(\xi, \eta; R) \xrightarrow{R} \sqrt{2} \psi_{Nm}^{(\pm)}(r, \varphi),$$

где справа знакам (+) и (-) соответствуют полярные волновые функции с определенной четностью относительно инверсии $\varphi \rightarrow -\varphi$.

6. ПРЕДЕЛ $R \rightarrow \infty$

Исследуем теперь параболический предел. При $R \rightarrow \infty$ в (3.13) можно пренебречь конечными членами и свести детерминант к произведению диагональных членов. Обозначая через n_1 номер равного нулю диагонального элемента, имеем $\beta_{n_1} = 0$, и потому

$$(6.1) \quad A_{Nq_1}^{(+)}(R) \xrightarrow{R} A_{Nn_1}^{(+)} = \frac{R}{N+1/2} (N-n_1) + \frac{R^2}{(2N+1)^2},$$

здесь $n_1 = 0, 2, \dots$. Рассуждая аналогично по отношению к рекуррентному соотношению для $a_{2s}(-R)$, получим

$$(6.2) \quad A_{Nq_2}^{(+)}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\frac{R}{N+1/2} (N-n_2) + \frac{R^2}{(2N+1)^2}$$

с $n_2 = 0, 2, \dots$. Из условия (3.17) следует, что

$$(6.3) \quad (n_1 + n_2)/2 = N,$$

т. е. n_1 и n_2 суть параболические квантовые числа.

Из (6.1) и (6.2) и (3.11a) видно, что при $n_1 \neq 2s$ и $n_2 \neq 2s$

$$\beta_{2s}(R) \xrightarrow{R} R\beta_{2s}^{(1)}, \quad \beta_{2s}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} R\beta_{2s}^{(2)},$$

где величины $\beta_{2s}^{(1)}$ и $\beta_{2s}^{(2)}$ не зависят от R и имеют вид

$$(6.4) \quad \beta_{2s}^{(1)} = (n_1 - 2s)/(N + 1/2),$$

$$(6.5) \quad \beta_{2s}^{(2)} = (2s - n_2)/(N + 1/2).$$

Эти формулы вместе с условием обрезания $a_{-2} = 0$ показывают, что в пределе $R \rightarrow \infty$ трехчленные рекуррентные соотношения (3.11) переходят в следующие двучленные:

$$(6.6) \quad \alpha_{2s} a_{2s+2}(R) + R\beta_{2s}^{(1)} a_{2s}(R) = 0, \quad 0 \leq s \leq n_1/2 - 1,$$

$$(6.7) \quad \alpha_{2s} a_{2s+2}(-R) + R\beta_{2s}^{(2)} a_{2s}(-R) = 0, \quad 0 \leq s \leq n_2/2 - 1.$$

Аналогично используя условия обрезания $a_{2N+2} = 0$, имеем

$$(6.8) \quad \beta_{2s}^{(1)} a_{2s}(R) + \gamma_{2s} a_{2s-2}(R) = 0, \quad n_1/2 \leq s \leq N,$$

$$(6.9) \quad \beta_{2s}^{(2)} a_{2s}(-R) - \gamma_{2s} a_{2s-2}(-R) = 0, \quad n_2/2 \leq s \leq N.$$

Рассмотрим теперь случай $n_1 = 2s$, $n_2 = 2s$. Тогда вместо (6.1) и (6.2)

следует писать

$$A_{Nq_1}^{(+)}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} A_0^{(+)} + \frac{R}{N+1/2}(N-n_1) + \frac{R^2}{(2N+1)^2}$$

$$A_{Nq_2}^{(+)}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} A_0^{(+)} - \frac{R}{N+1/2}(N-n_2) + \frac{R^2}{(2N+1)^2},$$

откуда $\beta_{n_1} = -n_1^2/4 - A_0^{(+)}$, $\beta_{n_2} = -n_2^2/4 - A_0^{(+)}$. Постоянная $A_0^{(+)}$ может быть получена из (3.11) при $s=n_1/2$, если в него подставить выражения

$$a_{n_1-2} = -\frac{1}{R} \frac{\alpha_{n_1-2}}{\beta_{n_1-2}^{(1)}} a_{n_1}, \quad a_{n_1+2} = -\frac{\gamma_{n_1+2}}{\beta_{n_1+2}^{(1)}} a_{n_1},$$

являющиеся следствием соотношений (6.6) и (6.8). Результат таков: $A_0^{(+)} = n_1^2/2 - N(n_1+1/2)$.

Аналогичным образом исследуется предел $R \rightarrow \infty$ в рекуррентных соотношениях (3.12). Имеем

$$(6.10) \quad A_{Nq_1}^{(-)}(R) \rightarrow \frac{R}{N+1/2}(N-n_1') + \frac{R^2}{(2N+1)^2},$$

$$(6.11) \quad A_{Nq_2}^{(-)}(-R) \rightarrow -\frac{R}{N+1/2}(N-n_2') + \frac{R^2}{(2N+1)^2}$$

с $n_1' = 1, 3, \dots, n_2' = 1, 3, \dots$. Согласно (3.18) $(n_1' + n_2')/2 = N$. Из (6.10), (6.11) и (3.12a) следует, что при $n_1' \neq 2s+1, n_2' \neq 2s+1$

$$\beta_{2s+1}^{(1)}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} R\beta_{2s+1}^{(1)}, \quad \beta_{2s+1}^{(2)}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} R\beta_{2s+1}^{(2)},$$

где

$$(6.12) \quad \beta_{2s+1}^{(1)} = \frac{n_1' - 2s - 1}{N + 1/2}, \quad \beta_{2s+1}^{(2)} = \frac{n_2' - 2s - 1}{N + 1/2}.$$

Эти формулы вместе с условием обрезания $a_{-1} = 0$ дают

$$(6.13) \quad \alpha_{2s+1} a_{2s+3}(R) + R\beta_{2s+1}^{(1)} a_{2s+1}(R) = 0, \quad 0 \leq s \leq (n_1' - 3)/2,$$

$$(6.14) \quad \alpha_{2s+1} a_{2s+3}(-R) + R\beta_{2s+1}^{(2)} a_{2s+1}(-R) = 0, \quad 0 \leq s \leq (n_2' - 3)/2,$$

и с условием обрезания $a_{2N+1} = 0$:

$$(6.15) \quad \beta_{2s+1}^{(1)} a_{2s+1}(R) + \gamma_{2s+1} a_{2s-1}(R) = 0, \quad (n_1+1)/2 \leq s \leq N-1,$$

$$(6.16) \quad \beta_{2s+1}^{(2)} a_{2s+1}(-R) - \gamma_{2s+1} a_{2s-1}(-R) = 0, \quad (n_2'+1)/2 \leq s \leq N-1.$$

Рассмотрим случай, когда $n_1' = 2s+1, n_2' = 2s+1$. При $R \rightarrow \infty$ имеем

$$A_{Nq_1}^{(-)}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} A_0^{(-)} + \frac{R}{N+1/2}(N-n_1') + \frac{R^2}{(2N+1)^2},$$

$$A_{Nq_2}^{(-)}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} A_0^{(-)} - \frac{R}{N+1/2}(N-n_2') + \frac{R^2}{(2N+1)^2}$$

откуда

$$\beta_{n_1'} = -\frac{(n_1'-1)^2}{4} - n_1' - A_0^{(-)}, \quad \beta_{n_2'} = -\frac{(n_2'-1)^2}{4} - n_2' - A_0^{(-)}.$$

Постоянная $A_0^{(s)}$ определяется из (3.12) при $s=n_1'$ и равна $A_0^{(s)} = (n_1')^2/2 - N(n_1' + 1/2)$.

Приступим теперь к исследованию предела $R \rightarrow \infty$ в волновых функциях. Функции $C_N^q\left(\frac{\eta}{2}; R\right)$ и $C_N^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right)$ при $R \rightarrow \infty$ согласно (1.3) ведут себя следующим образом:

$$C_N^q\left(\frac{\eta}{2}; R\right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^N \frac{a_{2s}(R)}{R^s} \left(\frac{u^2}{2}\right)^s,$$

$$C_N^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^N \frac{a_{2s}(-R)}{R^s} \left(-\frac{v^2}{2}\right)^s.$$

Из двучленных рекуррентных соотношений (6.6)–(6.9) следует, что

$$(6.17a) \quad a_{2s}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (-R)^s \frac{\beta_0^{(1)} \beta_2^{(1)} \dots \beta_{2s-2}^{(1)}}{\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2s-2}}, \quad 1 \leq s \leq \frac{n_1}{2},$$

$$(6.17б) \quad a_{2s}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (-R)^s \frac{\beta_0^{(2)} \beta_2^{(2)} \dots \beta_{2s-2}^{(2)}}{\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2s-2}}, \quad 1 \leq s \leq \frac{n_2}{2},$$

$$(6.17в) \quad a_{2s}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (-1)^{s-n_1/2} \frac{\gamma_{n_1+2} \gamma_{n_1+4} \dots \gamma_{2s}}{\beta_{n_1+2}^{(1)} \beta_{n_1+4}^{(1)} \dots \beta_{2s}^{(1)}}, \quad \frac{n_1}{2} + 1 \leq s \leq N,$$

$$(6.17г) \quad a_{2s}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n_2+2} \gamma_{n_2+4} \dots \gamma_{2s}}{\beta_{n_2+2}^{(2)} \beta_{n_2+4}^{(2)} \dots \beta_{2s}^{(2)}}, \quad \frac{n_2}{2} + 1 \leq s \leq N,$$

и потому функции $C_N^q\left(\frac{\eta}{2}; R\right)$ и $C_N^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right)$ при $R \rightarrow \infty$ переходят в полиномы степени $n_1/2$ и $n_2/2$. Согласно (6.17а), (6.17б), (3.11а) и (6.4), (6.5)

$$a_{2s}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{(-n_1/2)_s (2\lambda R)^s}{(1/2)_s s!}, \quad 1 \leq s \leq \frac{n_1}{2},$$

$$a_{2s}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{(-n_2/2)_s (-2\lambda R)^s}{(1/2)_s s!}, \quad 1 \leq s \leq \frac{n_2}{2},$$

и, следовательно,

$$C_N^q\left(\frac{\eta}{2}; R\right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} F\left(-\frac{n_1}{2}; \frac{1}{2}; \lambda u^2\right),$$

$$C_N^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} F\left(-\frac{n_2}{2}; \frac{1}{2}; \lambda v^2\right).$$

Функции $S_N^q\left(\frac{\eta}{2}; R\right)$ и $S_N^q\left(i\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R\right)$ при $R \rightarrow \infty$ суть

$$S_N^q\left(\frac{\eta}{2}; R\right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{u}{\sqrt{2R}} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{a_{2s+1}(R)}{R^s} \left(\frac{u^2}{2}\right)^s,$$

$$S_N^q \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\frac{iv}{\sqrt{2R}} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{a_{2s+1}(-R)}{R^s} \left(-\frac{v^2}{2} \right)^s.$$

Из двучленных рекуррентных соотношений (6.13)–(6.16) следует

$$a_{2s+1}(R) \xrightarrow{R} \frac{\beta_1^{(1)} \beta_3^{(1)} \dots \beta_{2s-1}^{(1)}}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2s-1}} (-R)^s, \quad 1 \leq s \leq \frac{n_1' - 1}{2},$$

$$a_{2s+1}(-R) \xrightarrow{R} (-R)^s \frac{\beta_1^{(2)} \beta_3^{(2)} \dots \beta_{2s-1}^{(2)}}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2s-1}}, \quad 1 \leq s \leq \frac{n_2' - 1}{2},$$

$$a_{2s+1}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (-1)^{s - \frac{n_1' - 1}{2}} \frac{\gamma_{n_1' + 1} \gamma_{n_1' + 3} \dots \gamma_{2s+1}}{\beta_{n_1' + 1}^{(1)} \beta_{n_1' + 3}^{(1)} \dots \beta_{2s+1}^{(1)}} a_{n_1'}, \quad \frac{n_1' + 1}{2} \leq s \leq N - 1,$$

$$a_{2s+1}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n_2' + 1} \gamma_{n_2' + 3} \dots \gamma_{2s+1}}{\beta_{n_2' + 1}^{(2)} \beta_{n_2' + 3}^{(2)} \dots \beta_{2s+1}^{(2)}} a_{n_2'}, \quad \frac{n_2' + 1}{2} \leq s \leq N - 1,$$

и поэтому функции $S_N^{q'} \left(\frac{\eta}{2}; R \right)$ и $S_N^{q'} \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right)$ переходят в полиномы степени $(n_1' - 1)/2$ и $(n_2' - 1)/2$. Согласно этим формулам и (6.12) и (3.12а) имеем

$$a_{2s+1}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{(- (n_1' - 1)/2)_s (2\lambda R)^s}{(3/2)_s s!}, \quad 1 \leq s \leq \frac{n_1' - 1}{2},$$

$$a_{2s+1}(-R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{(- (n_2' - 1)/2)_s (-2\lambda R)^s}{(3/2)_s s!}, \quad 1 \leq s \leq \frac{n_2' - 1}{2},$$

и, следовательно,

$$S_N^{q'} \left(\frac{\eta}{2}; R \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{u}{\sqrt{2R}} F \left(-\frac{n_1' - 1}{2}; \frac{3}{2}; \lambda u^2 \right),$$

$$S_N^{q'} \left(i \frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{2}; -R \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\frac{iv}{\sqrt{2R}} F \left(-\frac{n_2' - 1}{2}; \frac{3}{2}; \lambda v^2 \right).$$

Если теперь учесть, что

$$H_{2m}(x) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} F \left(-m; \frac{1}{2}; x^2 \right),$$

$$H_{2m+1}(x) = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} 2xF \left(-m; \frac{3}{2}; x^2 \right),$$

то легко показать, что

$$\Psi_{Nq_1q_2}^{(+)}(\xi, \eta; R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (-1)^{(n_1+n_2)/2} C_{Nq_1q_2}^{(+)}(R) \frac{\left(\frac{n_1}{2} \right)! \left(\frac{n_2}{2} \right)!}{(n_1)! (n_2)!} \times \\ \times e^{\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)} H_{n_1}(\sqrt{\lambda} u) H_{n_2}(\sqrt{\lambda} v),$$

$$\Psi_{Nq_1q_2}^{(-)}(\xi, \eta; R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -i(-1)^{(n_1+n_2)/2} C_{Nq_1q_2}^{(-)}(R) \frac{\left(\frac{n_1' - 1}{2} \right)! \left(\frac{n_2' - 1}{2} \right)!}{(n_1')! (n_2')!} \times \\ \times e^{\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)} H_{n_1'}(\sqrt{\lambda} u) H_{n_2'}(\sqrt{\lambda} v),$$

где n_1 и n_2 четны, n_1' и n_2' нечетны.

Ниже будет показано, что

$$(6.18) \quad |C_{Nq_1q_2}^{(+)}(R)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\lambda^3}{\pi}} \frac{\sqrt{(n_1)! (n_2)!}}{2^N \left(\frac{n_1}{2}\right)! \left(\frac{n_2}{2}\right)!},$$

$$(6.19) \quad |C_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(R)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\lambda^3}{\pi}} \frac{8\lambda R}{2^N} \frac{\sqrt{(n_1')! (n_2')!}}{\left(\frac{n_1'-1}{2}\right)! \left(\frac{n_2'-1}{2}\right)!}.$$

Пользуясь этим, имеем

$$\psi_{Nq_1q_2}^{(+)}(\xi, \eta; R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \psi_{n_1n_2}^{(+)}(u, v), \quad \psi_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(\xi, \eta; R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \psi_{n_1'n_2'}^{(-)}(u, v),$$

где n_1 и n_2 четны, n_1' и n_2' нечетны.

7. НОРМИРОВОЧНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

Обсудим теперь проблему нахождения эллиптических нормировочных констант $C_{Nq_1q_2}^{(+)}(R)$ и $C_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(R)$. Из условий нормировки (4.1) и явного вида функций $\psi_{Nq_1q_2}^{(+)}(\xi, \eta; R)$, $\psi_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(\xi, \eta; R)$ следует, что

$$\begin{aligned} & 2R^2 |C_{Nq_1q_2}^{(+)}(R)|^2 \sum_{s,s',t,t'=0}^N (-1)^{t+t'} a_{2s}(R) a_{2s'}(R) a_{2t}(-R) \times \\ & \times a_{2t'}(-R) \{I_{s,s'}^{1/2} J_{t,t'}^{-1/2} + I_{s,s'}^{-1/2} J_{t,t'}^{1/2}\} = 1, \\ & 2R^2 |C_{Nq_1'q_2'}^{(-)}(R)|^2 \sum_{s,s',t,t'=0}^{N-1} (-1)^{t+t'} a_{2s+1}(R) a_{2s'+1}(R) a_{2t+1}(R) \times \\ & \times a_{2t'+1}(-R) \{I_{s,s'}^{1/2} J_{t,t'}^{-1/2} + I_{s,s'}^{-1/2} J_{t,t'}^{1/2}\} = 1, \end{aligned}$$

где $I_{s,s'}^{\pm 1/2}$ и $J_{t,t'}^{\pm 1/2}$ выражаются через вырожденные гипергеометрические функции [11]:

$$I_{s,s'}^{\pm 1/2} = \frac{\Gamma(1 \pm 1/2) \Gamma(s+s'+1 \pm 1/2)}{\Gamma(s+s'+2 \pm 1)} F(s+s'+1 \pm 1/2; s+s'+2 \pm 1; -2\lambda R),$$

$$J_{t,t'}^{\pm 1/2} = \Gamma(t+t'+1 \pm 1/2) \psi(t+t'+1 \pm 1/2; t+t'+2 \pm 1; 2\lambda R),$$

$$I_{s,s'}^{\pm 1/2} = \frac{\Gamma(2 \pm 1/2) \Gamma(s+s'+2 \pm 1/2)}{\Gamma(s+s'+4 \pm 1)} F(s+s'+2 \pm 1/2; s+s'+4 \pm 1; -2\lambda R),$$

$$J_{t,t'}^{\pm 1/2} = \Gamma(t+t'+2 \pm 1/2) \psi(t+t'+2 \pm 1/2; 4 \pm 1 + t+t'; 2\lambda R).$$

Используя асимптотики

$$\psi(a; n+1; x) \rightarrow \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{x}\right)^n, \quad F(a; c; x) \xrightarrow{0} 1,$$

$$\psi(a; c; x) \rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^a, \quad F(a; c; x) \rightarrow \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-x)^{-a},$$

Таблица 1

N	m	$\psi_{Nm}^{(+)}(r, \varphi)$
0	0	$\sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-2r}$
1	0	$\sqrt{\frac{8}{27\pi}} e^{-(2/3)r} \left(1 - \frac{4}{3}r\right)$
1	1	$\frac{8}{9} \frac{e^{-(2/3)r}}{\sqrt{3\pi}} r \cos \varphi$
2	0	$\sqrt{\frac{8}{125\pi}} e^{-(2/5)r} \left(1 - \frac{8}{5}r + \frac{8}{25}r^2\right)$
2	1	$\frac{8}{25} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} e^{-(2/5)r} r \left(1 - \frac{4}{15}r\right) \cos \varphi$
2	2	$\frac{16}{125} \frac{e^{-(2/5)r}}{\sqrt{15\pi}} r^2 \cos 2\varphi$

Таблица 2

N	m	$\psi_{Nm}^{(-)}(r, \varphi)$
1	1	$i \frac{8}{9} \frac{e^{-(2/3)r}}{\sqrt{3\pi}} r \sin \varphi$
2	1	$i \frac{8}{25} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} e^{-(2/5)r} r \left(1 - \frac{4}{15}r\right) \sin \varphi$
2	2	$i \frac{16}{125} \frac{e^{-(2/5)r}}{\sqrt{15\pi}} r^2 \sin \varphi$

Таблица 3

N	n_1	$\psi_{n_1 n_2}^{(+)}(u, v)$
0	0	$\sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-(u^2+v^2)}$
1	2	$\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{-(1/3)(u^2+v^2)} \left(\frac{4}{3}u^2 - 1\right)$
1	0	$\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\pi}} e^{-(1/3)(u^2+v^2)} \left(\frac{4}{3}v^2 - 1\right)$
2	4	$\frac{1}{5\sqrt{15\pi}} e^{-(1/5)(u^2+v^2)} \left(\frac{16}{25}u^4 - \frac{24}{5}u^2 + 3\right)$
2	2	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} e^{-(1/5)(u^2+v^2)} \left(\frac{4}{5}u^2 - 1\right) \left(\frac{4}{5}v^2 - 1\right)$
2	0	$\frac{1}{5\sqrt{15\pi}} e^{-(1/5)(u^2+v^2)} \left(\frac{16}{25}v^4 - \frac{24}{5}v^2 + 3\right)$

N	n_1	$\psi_{n_1 n_2}^{(-)}(u, v)$
1	1	$\frac{8}{9} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} uv e^{-(1/2)(u^2+v^2)}$
2	3	$\frac{8}{25\sqrt{15\pi}} e^{-(1/2)(u^2+v^2)} uv \left(\frac{4}{5}u^2 - 3\right)$
2	1	$\frac{8}{25\sqrt{15\pi}} e^{-(1/2)(u^2+v^2)} uv \left(\frac{4}{5}v^2 - 3\right)$
3	5	$\frac{4}{49} \frac{1}{\sqrt{105\pi}} e^{-(1/2)(u^2+v^2)} uv \left(\frac{16}{49}u^4 - \frac{40}{7}v^2 + 15\right)$
3	3	$\frac{4}{147} \sqrt{\frac{2}{7\pi}} e^{-(1/2)(u^2+v^2)} uv \left(\frac{4}{7}v^2 - 3\right) \left(\frac{4}{7}v^2 - 3\right)$
3	1	$\frac{4}{49} \frac{1}{\sqrt{105\pi}} e^{-(1/2)(u^2+v^2)} uv \left(\frac{16}{49}v^4 - \frac{40}{7}u^2 + 15\right)$

Таблица 5

N	$\psi_{Nq}^{(+)}(\xi, \eta; R)$	$A^{(+)'}$
0	$\sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-R(\text{ch}\xi + \cos\eta)}$	$A^{(+)' = 0}$
1	$\left\{ \frac{8(A^{(+)' + 1)}{27\pi(2A^{(+)' + 1)}} \right\}^{1/2} e^{-(R/3)(\text{ch}\xi + \cos\eta)} \left\{ 1 - (A^{(+)' + 2R/3})(\text{ch}\xi - 1) \right\} \times \left\{ 1 + (A^{(+)' - 2R/3})(1 + \cos\eta) \right\}$	$A^{(+)'(A^{(+)' + 1)} = \frac{4}{9}R^2$
2	$\frac{4}{5\sqrt{10\pi}} \left\{ 1 + \frac{25}{12} \left(\frac{A^{(+)'}}{R}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{A^{(+)'}}{A^{(+)' + 4}\right)^2 \right\}^{-1/2} \times e^{-(R/5)(\text{ch}\xi + \cos\eta)} \left\{ 1 - \left(A^{(+)' + \frac{4R}{5}}\right)(\text{ch}\xi - 1) + \frac{A^{(+)'}}{6} \left(A^{(+)' + 1 + \frac{4R}{5}}(\text{ch}\xi - 1)^2 \right) \left\{ 1 + \left(A^{(+)' - \frac{4R}{5}}\right)(1 + \cos\eta) + \frac{A^{(+)'}}{6} \left(A^{(+)' + 1 - \frac{4R}{5}}\right)(1 + \cos\eta)^2 \right\}$	$A^{(+)'(A^{(+)' + 1)} \times (A^{(+)' + 4)} = \frac{16R^2}{25}(A^{(+)' + 3)$

после довольно утомительных вычислений можно получить формулы (5.6), (5.7) и (6.18), (6.19), если считать, что фазы в нормировочных постоянных $C_{Nq_1 q_2}^{(\pm)}$ ведут себя как $\Phi_0^{(\pm)} \rightarrow \pi m$ и $\Phi_\infty^{(-)} \rightarrow \frac{\pi}{2}(n_1 + n_2 - 1)$,

если n_1 и n_2 нечетны, и $\Phi_\infty^{(+)} \rightarrow \frac{\pi}{2}(n_1 + n_2)$, если n_1 и n_2 четны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полный анализ двумерного атома водорода в эллиптических координатах должен включать в себя еще следующие вопросы: а) сохраняющиеся величины, определяющие эллиптический базис; б) разложение эллиптические

N	$\Psi_{Nq}^{(-)}(\xi, \eta; R)$	$A^{(-)'}$
1	$-i \frac{4}{9} R \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \operatorname{ch} \xi \sin \eta e^{-(R/3)(\operatorname{ch} \xi + \cos \eta)}$	$A^{(-)' = -1}$
2	$-i \frac{24}{25} \frac{R}{\sqrt{30\pi}} \left(\frac{A^{(-)' + 4}}{2A^{(-)' + 5} + 5} \right)^{1/2} \operatorname{ch} \xi \sin \eta e^{-(R/5)(\operatorname{ch} \xi + \cos \eta)} \times$ $\times \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(A^{(-)' + 1 + \frac{2R}{5}} \right) (\operatorname{ch} \eta - 1) \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(A^{(-)' + 1 - \frac{2R}{5}} \right) (1 + \cos \eta) \right\}$	$(A^{(-)' + 1})(A^{(-)' + 4}) = \frac{4}{25} R^2$
3	$-i \frac{8R}{49} \sqrt{\frac{3}{7\pi}} \left\{ 1 - \frac{49}{10} \left(\frac{A^{(-)' + 1}}{R} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{A^{(-)' + 1}}{A^{(-)' + 9} + 9} \right)^2 \right\}^{-1/2} e^{-(R/7)(\operatorname{ch} \xi + \cos \eta)} \operatorname{sh} \xi \sin \eta \times$ $\times \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(A^{(-)' + 1 + \frac{4R}{7}} \right) (\operatorname{ch} \xi - 1) + \frac{A^{(-)' + 1}}{30} \left(A^{(-)' + 4 + \frac{4R}{7}} \right) (\operatorname{ch} \xi - 1) \right\} \times$ $\times \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(A^{(-)' + 1 - \frac{4R}{7}} \right) (1 + \cos \eta) + \frac{A^{(-)' + 1}}{30} \left(A^{(-)' + 4 - \frac{4R}{7}} \right) (1 + \cos \eta) \right\}^2$	$(A^{(-)' + 1})(A^{(-)' + 4})(A^{(-)' + 9}) = \frac{16}{49} R^2 (A^{(-)' + 6})$

ского базиса по полярному и параболическому; в) рекуррентные соотношения, определяющие коэффициенты межбазисных разложений; г) расширение результатов на область непрерывного спектра. Эти вопросы мы намерены рассмотреть в последующих работах.

В заключение выражаем искреннюю признательность Г. С. Саакяну, Я. А. Смородинскому, Л. И. Пономареву, А. В. Матвеевко и С. И. Виницкому за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Волновые функции двумерного атома водорода в полярной и параболической системах координат были вычислены в работах [9, 12] и имеют вид

$$\psi_{Nm}^{(+)}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R_{Nm}(r) \cos m\varphi,$$

$$\psi_{Nm}^{(-)}(r, \varphi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} R_{Nm}(r) \sin m\varphi,$$

$$R_{Nm}(r) = C_{Nm} \frac{(2\lambda r)^m}{(2m)!} e^{-\lambda r} F(-N+m; 2m+1; 2\lambda r),$$

$$\psi_{n_1 n_2}^{(+)}(u, v) = C_{n_1 n_2} e^{-\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)} H_{n_1}(\sqrt{\lambda}u) H_{n_2}(\sqrt{\lambda}v), \quad n_1, n_2 \text{ четны,}$$

$$\psi_{n_1 n_2}^{(-)}(u, v) = C_{n_1 n_2} e^{-\frac{\lambda}{2}(u^2+v^2)} H_{n_1}(\sqrt{\lambda}u) H_{n_2}(\sqrt{\lambda}v), \quad n_1, n_2 \text{ нечетны.}$$

Волновые функции подчинены условию нормировки

$$\int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \psi_{Nm}^{(\pm)*}(r, \varphi) \psi_{Nm}^{(\pm)}(r, \varphi) = 1/2,$$

$$\int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} dv (u^2 + v^2) \psi_{n_1 n_2}^{(\pm)*}(u, v) \psi_{n_1 n_2}^{(\pm)}(u, v) = 1,$$

которые соблюдаются, если

$$C_{Nm} = (2\lambda^3)^{1/2} \sqrt{\frac{(N+m)!}{(N-m)!}}, \quad C_{n_1 n_2} = \left(\frac{\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\gamma^{2n_1+n_2} (n_1)! (n_2)!}.$$

Отметим, что параболическая система координат выбрана в виде $x = (u^2 - v^2)/2$, $0 \leq u < \infty$, $y = uv$, $-\infty < v < \infty$.

В табл. 1, 2 и 3, 4 приведен явный вид полярного и параболического базисов, а в табл. 5, 6 — эллиптического базиса для низших квантовых состояний, причем $A^{(\pm)'} = A^{(\pm)} - R^2 / (2N+1)^2$.

Литература

- [1] London R. — Amer. J. Phys., 1959, 27, 649—655.
- [2] Shibuya T., Wufman C. E. — Amer. J. Phys., 1965, 33, 570—574.
- [3] Fock V. A. — Z. Phys., 1935, 98, 145—154.
- [4] Eisenhart J. P. — Phys. Rev., 1948, 74, 87—89.
- [5] Coulson C. A., Robinson P. D. — Proc. Phys. Soc., 1958, 71, 815—827.
- [6] Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
- [7] Mardoyan L. G., Pogosyan G. S., Sissakyan A. N., Ter-Antonyan V. M. — J. Phys. A., 1983, 16, 711—728.
- [8] Arscott F. M. — Proc. Roy. Soc. Edinburg, 1967, A67, 265—275.
- [9] Zaslav B., Zandler M. E. — Amer. J. Phys., 1967, 35, 1118—1119.
- [10] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы математической физики. М.: ИЛ, 1958.
- [11] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973.
- [12] Cisneros A., McIntosh N. V. — J. Math. Phys., 1968, 10, 277—286.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
28.VII.1983 г.

TWO-DIMENSIONAL HYDROGEN ATOM.

I. ELLIPTIC BASE

Mardoyan L. G., Pogosyan G. S., Sissakyan A. N.,
Ter-Antonyan V. M.

Analysis of a two-dimensional hydrogen atom in elliptic coordinates is made out. By the method of separation of variables the problem is reduced to the solution of the Ince equations in the complex plane under certain boundary conditions. It is shown that in the limits $R \rightarrow 0$ and $R \rightarrow \infty$ (R being the parameter which determines the elliptic coordinates) the solutions obtained change into the polar and parabolic bases, respectively. An explicit form of the elliptic basis is given for the lowest quantum states.