ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 21, № 1
октябрь, 1974

ПЕРЕКРУЧЕННЫЕ ЭЙКОНАЛЬНЫЕ ГРАФЫ И СТРУКТУРА КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, А. Н. Сисакян,
М. А. Смондырев, А. Н. Тавхелидзе

На основе метода прямолинейных путей исследуется асимптотика перекрученных эйкональных графов, нарушающих эйкональное представление с эффективным юкавским потенциалом для суммы диаграмм лестничного типа уже в низших порядках теории возмущений. Полученные результаты используются для восстановления асимптотического квазипотенциала.

Исследования эйконального представления на основе метода прямолинейных путей [1, 2] показали, что эйкональная формула соответствует учету лишь виртуальных процессов, в которых не меняется сорт частицы, несущей большой импульс.

Неэйкональные вклады в амплитуду появляются при изменении сорта лидирующей частицы [3], т. е. при учете процессов с передачей больших импульсов от нуклонов к мезонам и обратно. В связи с этим в работе [3] отмечалось, что при исследовании высокоэнергетической асимптотики амплитуды рассеяния двух нуклонов в скалярной модели необходимо учитывать, кроме лестничных, также и перекрученные графы, получающиеся из лестничных графов перестановкой импульсов двух нуклонов. Возможность переноса больших импульсов мезонами приводит к тому, что вклад таких графов может доминировать над эйкональными в том же порядке теории возмущений.

Это обстоятельство приводит к тому, что локальный квазипотенциал в области высоких энергий будет определяться рядом по константе связи g^2, члены которого дают поправки к юкавскому взаимодействию, соответствующему традиционному эйкональному приближению. Ниже мы подробнее рассмотрим такие диаграммы, а также изучим проблему восстановления по ним асимптотического квазипотенциала.

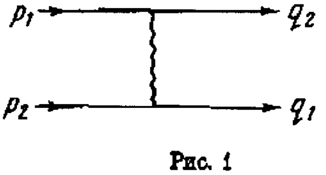


Рис. 1

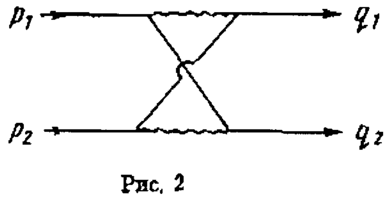


Рис. 2

Во втором порядке теории возмущений имеется лишь один перекрученный граф (рис. 1) с очевидной асимптотикой $1/s$ (напомним, что $s=(p_1+p_2)^2$ и $t=(p_1-q_1)^2$).

В четвертом порядке имеем уже две такие диаграммы. Одна из них (рис. 2) имеет более слабую асимптотику ($1/s^2$), чем соответствующий неперекрученный граф. Другая же, изображенная на рис. 3, обладает асимптотикой $\ln s/s$, что приводит к нарушению эйконального представления для суммы обобщенных лестничных графов уже в четвертом поряд-

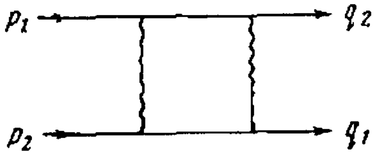


Рис. 3

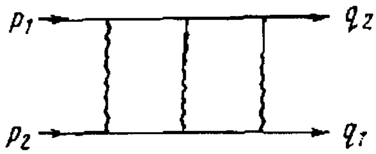


Рис. 4

ке [3]. Напомним, что неэйкональные вклады, на возможность существования которых указывалось в работе [4], появляются лишь начиная с восьмого порядка теории возмущений.

В следующем порядке мы имеем шесть перекрученных диаграмм. Диаграмма, изображенная на рис. 4, имеет наиболее слабую асимптотику ($1/s^3$). Следующая пара графов (рис. 5) в пределе $s\to\infty$, t фиксировано,

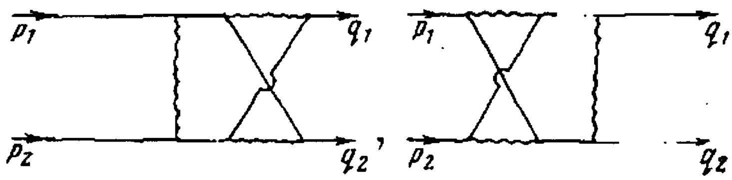


Рис. 5

ведет себя как $\ln s/s^2$, т. е. имеет ту же асимптотику, что и неперекрученные графы в этом же порядке. Диаграммы рис. 6 имеют асимптотическое

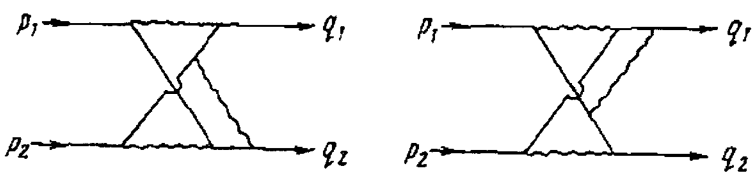


Рис. 6

поведение $1/s$, что уже сильнее, чем это следует из эйкональной формулы. И, наконец, последний граф шестого порядка (рис. 7) ведет себя как $\ln^2 s/s$.

Рассмотрение первых шести порядков позволяет предположить, что и в старших порядках будут доминировать диаграммы вида рис. 8, приводящие к асимптотике $g^{2n} \ln^{n-1} s/s$.

Если, как это обычно делается при выводе эйконального представления, суммировать лишь главные асимптотические члены в каждом порядке теории возмущений, получается следующая асимптотическая формула для суммы F перекрученных графов:

$$F|_{\substack{s\to\infty \\ t-\text{фикс.}}} \simeq -i\frac{g^4}{(2\pi)^4}s^{\alpha(t)}, \tag{1}$$

$$\alpha(t) = -1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-t(4m^2-t)}} \ln \frac{\sqrt{1-4m^2/t}+1}{\sqrt{1-4m^2/t}-1}. \tag{2}$$

При таком способе суммирования коэффициент при $s^{\alpha(t)}$ и выражение для $\alpha(t)$ вычисляются лишь с точностью до g^2. Однако уже из формул (1) и (2) следует, что в рамках скалярной модели сумма лестничных графов

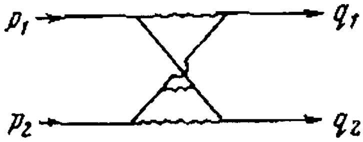


Рис. 7

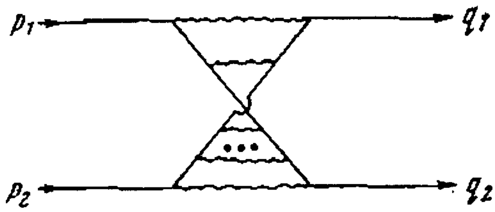


Рис. 8

отнюдь не приводит к эйкональному представлению, соответствующему рассеянию на потенциале Юкавы. Действительно, как уже отмечалось выше, перекрученные графы возникают при учете тождественности рассеивающихся частиц. В рамках квазипотенциальной теории рассеяния тождественность частиц приводит к необходимости учета обменных сил во взаимодействии двух частиц, как это имеет место в квантовой механике.

Стандартный метод построения локального квазипотенциала по теории возмущений, развитый в работах [5, 6], при наличии обменных сил может быть обобщен различными путями. Опишем здесь кратко метод, основанный на введении нормальной и обменной частей взаимодействия посредством выражения

$$V[s;\, p,\, k] = \mathfrak{g}(s;\, p-k) + \mathfrak{h}(s;\, p+k). \tag{3}$$

Квазипотенциальная амплитуда рассеяния представляется при этом суммой двух членов [7]

$$T[s;\, p,\, k] = \mathcal{G}(s;\, p,\, k) + \mathcal{H}(s;\, p,\, k), \tag{4}$$

удовлетворяющих системе линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{g} \\ \mathfrak{h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{g} & \mathfrak{h} \\ \mathfrak{h} & \mathfrak{g} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где символ $\times$ означает интегрирование

$$\int \frac{dq}{\sqrt{m^2+q^2}} \frac{1}{m^2+q^2-E^2}.$$

При рассеянии двух тождественных частиц имеем

$$\begin{gathered} \mathfrak{h}(s;\, p+k) = \hat{P}\mathfrak{g}(s;\, p-k) = \mathfrak{g}(s;\, p+k), \\ \mathcal{H}(s;\, p,\, k) = \hat{P}\mathcal{G}(s;\, p,\, k) = \mathcal{G}(s;\, p,\, -k) = \mathcal{G}(s;\, -p,\, k), \end{gathered} \tag{6}$$

где $\hat{P}$ — оператор перестановки координат двух частиц. При этом функция $\mathcal{G}$ удовлетворяет обычному уравнению Логунова — Тавхелидзе [1]

$$\mathcal{G} = \mathfrak{g} + \mathfrak{g} \times \mathcal{G}. \tag{7}$$

[1] Уравнение (7) следует из системы (6), если учесть, что в случае тождественных частиц интегрирование по промежуточным двухчастичным состояниям содержит статистический множитель $1/2!$, причем $\mathfrak{g}\times\mathcal{G} = \mathfrak{h}\times\mathcal{H}$ и $\mathfrak{g}\times\mathcal{H} = \mathfrak{h}\times\mathcal{G} = \hat{P}(\mathfrak{g}\times\mathcal{G})$.

Уравнение (7) может быть использовано для построения локального квазипотенциала g по заданному ряду теории возмущений, определяющему амплитуду $\mathcal{G}$. Именно,

$$g_2=[\mathcal{G}_2],$$
$$(8)\qquad g_4=[\mathcal{G}_4]-[g_2\times g_2],$$
$$g_6=[\mathcal{G}_6]-[g_2\times g_4]-[g_4\times g_2]-[g_2\times g_2\times g_2]$$

и т. д. Символ [...] обозначает процедуру «локального» продолжения за массовую поверхность $E^2=p^2+m^2=k^2+m^2$ произвольной функции $A(E;\ p,\ k)=A(s,\ t,\ u,\ \delta)$, где $s=4E^2$, $t=-(p-k)^2$, $u=-(p+k)^2$, $\delta=p^2-k^2$. В этих обозначениях

$$(9)\qquad [A(s,t,u,\delta)]=A(s,t,4m^2-s-t,0).$$

Построенный таким образом квазипотенциал позволяет, в свою очередь, восстановить исходную амплитуду рассеяния на массовой поверхности.

Подчеркнем, однако, что теория возмущений определяет амплитуду T в целом, а не $\mathcal{G}$- и $\mathcal{H}$-части в отдельности, т. е.

$$(10)\qquad T_{2n}(s,t)=[\mathcal{G}_{2n}(E;\ p,k)+\mathcal{H}_{2n}(E;\ p,k)].$$

Определив величины

$$(11)\qquad F_{2n}(s,t)=[\mathcal{G}_{2n}(E;\ p,k)],$$
$$B_{2n}(s,u)=[\mathcal{H}_{2n}(E;\ p,k)],$$

связанные в случае рассеяния тождественных частиц соотношением симметрии

$$(12)\qquad F_{2n}(s,t)\leftrightarrow B_{2n}(s,u)\quad \text{при}\quad t\leftrightarrow u,$$

имеем

$$(13)\qquad T_{2n}(s,t)=F_{2n}(s,t)+B_{2n}(s,u).$$

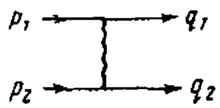
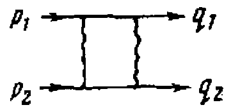
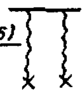
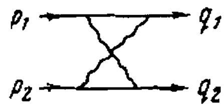
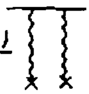
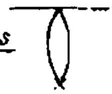
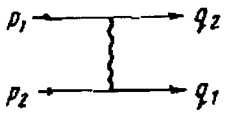
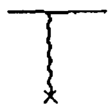
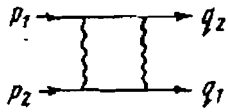
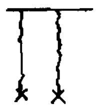
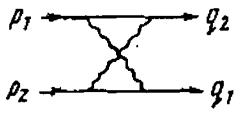
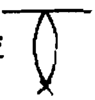
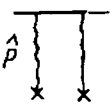
Разбиение (13), вообще говоря, неоднозначно. В качестве дополнительных условий, фиксирующих это разбиение, могут быть использованы свойства аналитичности. В частности, можно предположить, что величины $F_{2n}(s,\ t)$ и $B_{2n}(s,\ u)$ являются аналитическими функциями передачи импульса с особенностями при $t>0$ и $u>0$, соответственно, и удовлетворяют дисперсионным соотношениям без вычитаний.

В настоящей работе, имея в виду задачу восстановления локального квазипотенциала по теории возмущений в области асимптотически высоких энергий, мы сформулируем следующее условие:

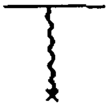
$F_{2n}(s,\ t)$ *определяется главным асимптотическим членом амплитуды* T_{2n} *в области* $s\to\infty$, t *фиксировано (рассеяние вперед)*;

$B_{2n}(s,\ u)$ *определяется главным асимптотическим членом амплитуды* T_{2n} *в области* $s\to\infty$, u *фиксировано (рассеяние назад)*.

Таблица, приведенная ниже, дает пример, демонстрирующий метод построения локального квазипотенциала, исходя из совокупности перекрученных и обычных эйкональных графов на основе сформулированного условия.

<table>
<tr><th>Графы</th><th>F-вклады</th><th>B-вклады</th></tr>
<tr><td>Нормальные:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>g^2 </td><td>$O(1/s)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$-g^4\frac{\ln(-s)}{s}$ </td><td>$O(1/s^2)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$g^4\frac{\ln(s)}{s}$ </td><td>$g^4\frac{\ln s}{s}$ </td></tr>
<tr><td>С перекруткой:</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>$O(1/s)$</td><td>$\hat{p}$ </td></tr>
<tr><td>
</td><td>$O(1/s^2)$</td><td>$-g^4\frac{\ln(-s)}{s}\hat{p}$ </td></tr>
<tr><td>
</td><td>$g^4\frac{\ln s}{s}$ </td><td>$g^4\frac{\ln s}{s}\hat{p}$ </td></tr>
</table>

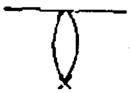
В ней использованы следующие обозначения:

 $\sim\dfrac{1}{\Delta_\perp^2+\mu^2}$

и соответствует на языке квазипотенциальных графов однократному рассеянию на юкавском потенциале в области высоких энергий и фиксированных передач импульса;

 $\sim\displaystyle\int\frac{d^2k_\perp}{(k_\perp^2+\mu^2)[(\Delta_\perp+k_\perp)^2\mu^2]}$

двумерная свертка, соответствующая двукратному рассеянию на юкавском потенциале;

 $\sim \int \frac{d^2k_\perp}{(k_\perp^2+m^2)\,[(\Delta_\perp+k_\perp)^2+m^2]}$,

что соответствует вкладу в рассеяние от обмена нуклон-антинуклонной парой.

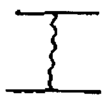
Действие оператора $\hat{P}$ сводится, очевидно, к подстановке

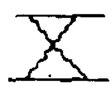
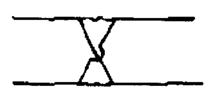
(14) $\hat{P}\Delta_\perp = \hat{P}(p-k)_\perp \to (p+k)_\perp$.

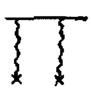
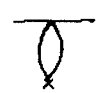
Суммируя вклады обычных эйкональных графов и графов с перекруткой, найдем для амплитуды рассеяния выражение

(15) $T = (1+\hat{P})\Big[\,g^2$  $+\ g^4\frac{i\pi}{s}$  $+\ g^4\frac{\ln s}{s}$  $+\dots\Big]$.

Теперь можно, воспользовавшись описанной выше процедурой, восстановить локальный квазипотенциал по теории возмущений:

(16) $g_2 =$  $\xrightarrow[t-\text{фикс.}]{s\to\infty}$ ,

(17) $g_4 =$  $+$  $+$  $+$  $-$

$-\frac{g^4}{s}i\pi$  $\xrightarrow[t-\text{фикс.}]{s\to\infty}$ $g^4\frac{\ln s}{s}$ 

и т. д.

Как уже выше отмечалось, g_2 представляет собой обычный потенциал Юкавы, фигурирующий в фазе эйконального представления. Соотношение же (17) определяет поправку неюкавского типа, обязанную своим происхождением диаграмме на рис. 3. В импульсном пространстве эта поправка к квазипотенциалу задана формулой

(18) $$g_4(q^2) = \frac{\ln s}{s}\frac{g^4}{2(2\pi)^7}\int\frac{d^2k_\perp}{(k_\perp^2+m^2)\,[(\Delta_\perp+k_\perp)^2+m^2]},$$

в которой после интегрирования необходимо произвести замену $\Delta_\perp^2 = -t \to q^2$. Вводя α-представление, получим из (18)

(19) $$g_4(q^2) = \frac{g^4}{4(2\pi)^6}\frac{\ln s}{s}\int_0^1\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)q^2+m^2}.$$

Представление (19) позволяет вычислить искомый квазипотенциал в координатном представлении:

$$
(20) \qquad \mathcal{g}_4(r) = \frac{g^4}{4(2\pi)^6}\frac{\ln s}{s}\int_0^1 d\alpha \int dq \frac{e^{iqr}}{\alpha(1-\alpha)q^2+m^2} = \frac{g^4}{2(2\pi)^4}\frac{\ln s}{s}\frac{K_0(2mr)}{r}
$$

Мы видим, что $\mathcal{g}_4$ асимптотически меньше, чем основной член (потенциал Юкавы) *квазипотенциала, не зависящий от* s. Однако уже в четвертом порядке $\mathcal{g}_4$ дает больший вклад в амплитуду рассеяния, чем вторая итерация юкавского потенциала, что и приводит к нарушению эйкональной формулы. На малых расстояниях этот потенциал ведет себя как $\ln r/r$, т. е. он более сингулярен, чем юкавский. На связь нейэкональных членов с ростом сингулярности поправок к квазипотенциалу указывалось в работах [8, 9].

В заключение отметим, что изложенный метод нетрудно применить к вычислению асимптотического квазипотенциала в старших порядках теории возмущений.

Авторы выражают глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову за интерес к работе и ценные замечания. Мы также благодарны Б. М. Барбашову, В. С. Владимирову, А. В. Ефремову, А. А. Логунову, Д. В. Ширкову за плодотворные обсуждения.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
25 февраля 1974 г.

Литература

[1] A. N. Tavkhelidze. High Energy Physics., p. 367, Kiev, 1972.
[2] B. M. Barbashov, S. P. Kuleshov, V. A. Matveev, V. N. Pervushin, A. N. Sissakian, A. N. Tavkhelidze. Phys.Lett., 33B, 484, 1970.
[3] S. P. Kuleshov, V. A. Matveev, A. N. Sissakian, M. A. Smondyrev, A. N. Tavkhelidze. Preprint E2-7041, JINR, 1973.
[4] G. Tiktopoulos, S. Treiman. Phys. Rev., 3D, 1037, 1971.
[5] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 89, 380, 1963.
[6] A. N. Tavkhelidze. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1963.
[7] В. Р. Гарсеванишвили, С. В. Голоскоков, В. А. Матвеев, Л. А. Слепченко. ЯФ, 10, 627, 1969.
[8] С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, А. Н. Сисакян, М. А. Смондырев. Препринт Р2-6445, ОИЯИ, 1972.
[9] С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, А. Н. Сисакян, М. А. Смондырев. В кн.: «Физика высоких энергий», Изд. ОИЯИ, Р2-6867, стр. 183, Дубна, 1972.

TWISTED EIKONAL GRAPHS AND STRUCTURE OF THE QUASIPOTENTIAL

S. P. Kuleshov, V. A. Matveev, A. N. Sissakian,
M. A. Smondyrev, A. N. Tavkhelidze

On the basis of the straight-line paths method the asymptotics of the twisted eikonal graphs is investigated. These graphs violate the eikonal representation with the effective Yukawa potential for the sum of the ladder graphs already in the lower orders of perturbation theory. The results obtained are used for reconstructing the asymptotical quasipotential.