

МЕТОД ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ И ПРОБЛЕМА ЭЙКОНАЛА

С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, А. Н. Сивакян,
М. А. Смондырев, А. Н. Тавхелидзе

Исследуется структура «неэйкональных» вкладов в амплитуду рассеяния двух нуклонов, описываемую суммой диаграмм лестничного типа в скалярной модели.

ВВЕДЕНИЕ

Как показывает теоретический анализ экспериментальных данных, эйкональное представление амплитуды рассеяния с гладким эффективным квазипотенциалом правильно передает основные закономерности рассеяния частиц при высоких энергиях на малые углы. В этой связи представляет значительный интерес изучение свойств локального квазипотенциала и обоснование эйконального представления в моделях квантовой теории поля [1, 2].

При исследовании проблемы эйконала в работах дубненской группы было сформулировано приближение прямолинейных путей [1, 3]. В основе этого метода лежит предположение о существенной подавленности больших передач импульса в отдельных актах взаимодействия частиц высоких энергий. Таким образом, большие импульсы, переносимые частицами в процессе столкновения, имеют тенденцию к сохранению («инерция» больших импульсов).

Сорт частиц, переносящих большой импульс, может при этом изменяться в течение процесса взаимодействия в соответствии с эмпирическими закономерностями, наблюдаемыми в инклюзивных процессах. Так, например, при столкновении быстрых нуклонов следует учитывать возможность излучения «жесткого» мезона с передачей ему значительной доли импульса начального нуклона.

Обычно при выводе формулы эйконала методами суммирования ряда теории возмущений в качестве «лидирующих» частиц, переносящих большие импульсы, выбираются начальные частицы. Результаты, соответствующие такому выбору, по существу, эквивалентны результатам, полученным в рамках «приближения $k, k, = 0$ » [4, 5].

Однако существование виртуальных процессов с изменением сорта «лидирующих» частиц должно приводить, вообще говоря, к нарушению ортодоксального эйконального представления. Возможность появления экстрачленов в асимптотике суммы диаграмм теории возмущений, не укладывающихся в обычную формулу эйконала, впервые была отмечена в работе [6].

Настоящая статья посвящена исследованию структуры «неэйкональных» вкладов в амплитуду рассеяния двух нуклонов, описываемых суммой

диаграмм лестничного типа без учета радиационных поправок и эффектов поляризации вакуума в скалярной модели.

В частности, будет показано, что в сумме всех лестничных диаграмм восьмого порядка присутствуют члены, нарушающие ортодоксальную формулу эйконала и исчезающие в пределе $\mu/m \rightarrow 0$, где μ и m — массы мезона и нуклона. Найденные члены соответствуют вкладам в эффективный квазипотенциал, отвечающим обмену нуклон-антинуклонными парами.

1. ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ ГРАФОВ ФЕЙНМАНА И МОДИФИКАЦИЯ ПРОПАГАТОРОВ ВИРТУАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

В качестве объекта исследования выберем амплитуду рассеяния двух скалярных нуклонов в модели $L_{ns} = g : \psi^+ \psi \phi$: в пренебрежении радиационными поправками и замкнутыми нуклонными петлями. Эта амплитуда представляется в виде суммы диаграмм типа представленной на рис. 1,

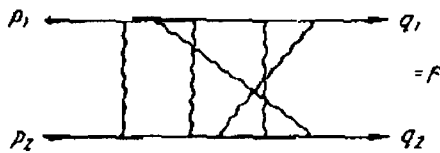


Рис. 1

где p_1 и p_2 — импульсы входящих, а q_1 и q_2 — выходящих частиц. Если число импульсов интегрирования l , а число внутренних линий I (в диаграммах типа изображенной на рис. 1 $I = 3l + 1$), то

$$(1.1) \quad F = \int dk_1 \dots dk_l \prod_{i=1}^l \frac{1}{r_i^2 - m_i^2 + i\epsilon},$$

где r_i — линейные комбинации импульсов интегрирования k_j .

Вводя параметризацию Фейнмана, имеем

$$(1.2) \quad F = (I-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_l \delta\left(1 - \sum_{i=1}^l \alpha_i\right) \int \frac{dk_1 \dots dk_l}{[\Psi(k, \alpha, s, t)]^I},$$

где

$$(1.3) \quad \Psi = \sum_{i=1}^l \alpha_i (r_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) = \sum_{i,j=1}^l a_{ij} k_i k_j + 2 \sum b_i k_i + c,$$

после чего можно провести интегрирование по k_i и получить представление для F в форме Чискольма [7]

$$(1.4) \quad F = (i\pi)^l (I-2l-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_l \delta\left(1 - \sum_{i=1}^l \alpha_i\right) \frac{[C(\alpha)]^{I-2l-1}}{[D(\alpha, s, t)]^{I-2l}}.$$

В формуле (1.4)

$$(1.5) \quad C = \det \|a_{ij}\|, \quad D = \det \left\| \begin{array}{ccc} & & b_1 \\ & a_{ij} & \vdots \\ & & b_l \\ b_1 \dots b_l & & c \end{array} \right\|,$$

причем детерминант Чискольма D представляется в виде

$$(1.6) \quad D(\alpha, s, t) = f(\alpha)s + g(\alpha)t + h(\alpha).$$

Изложим вкратце основные результаты работы [8], которыми мы будем пользоваться при изучении асимптотического поведения выражения (1.4)¹⁾.

О п р е д е л е н и е. t -путем называется множество линий графа, образующих непрерывную дугу, такое что:

а) если стянуть все эти линии в точку, то граф разбивается на две части, соединенные лишь в одной вершине, причем импульсы p_1 и q_1 присоединяются к одной из этих частей, а p_2 и q_2 — к другой;

б) ни одно из его подмножеств не обладает свойством «а».

Длиной t -пути называется число образующих его линий. t -пути минимальной длины называются \bar{t} -путями.

П р а в и л о. Если граф F таков, что существует M \bar{t} -путей длины ρ , то его асимптотика дается формулой

$$(1.7) \quad F \approx (i\pi^2)^t \frac{(I-2l-1-\rho)! \rho! (\ln s)^{M-1}}{(M-1)! s^\rho} \times \\ \times \int \frac{[C_0(\alpha)]^{t-2l-1}}{(g_0 t + h_0)^{t-2l-\rho} f_0^\rho} \prod_{j=1}^M \delta\left(\sum_{v=1}^{\rho} \alpha_v^{(j)} - 1\right) \times \\ \times \delta\left(\sum_{v \in P} \alpha_v - 1\right) (d\alpha).$$

В формуле (1.7)

$$(1.8) \quad g_0 t + h_0 = D(\alpha, s, t) \Big|_{\alpha_v^{(j)}=0}, \quad C(\alpha) = C(\alpha) \Big|_{\alpha_v^{(j)}=0},$$

$\alpha_v^{(j)}$ — параметры линий, принадлежащих к j -му \bar{t} -пути, α_v ($v \in P$) — оставшиеся параметры, а величина f_0 получается из f (см. (1.6)) следующим образом: произведем замену

$$(1.9a) \quad \alpha_v^{(j)} \rightarrow \lambda_v \alpha_v^{(j)},$$

тогда

$$(1.9b) \quad f \rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M f(\lambda) \quad \text{и} \quad f_0 = f|_{\lambda_j=0}.$$

Выписав необходимые нам формулы, перейдем к дальнейшему изложению.

В случае, когда в графах типа F (см. рис. 1) передача импульса равна нулю, т. е. $p_1 = q_1$ и $p_2 = q_2$, множество линий, в пропагаторы которых входит импульс p_1 , назовем p -путем. Таким образом, в графах имеется два p -пути, каждый из которых образует непрерывную дугу. Заметим, что каждый p -путь согласно определению является t -путем. Однако в отличие от t -путей, являющихся топологическими характеристиками данного графа, расположение p -путей зависит от конкретной расстановки импульсов интегрирования. В рассматриваемых нами графах последние можно рас-

¹⁾ Результаты, подобные [8], были получены также в работах [9].

ставить так, чтобы p -пути совпадали с парой любых \bar{i} -путей, не образующих замкнутую петлю.

Утверждение 1. Пусть задан граф такой, что вклад в его главную асимптотику дает пара \bar{i} -путей, не имеющих общей линии. Тогда асимптотика этого графа не изменится, если расставить импульсы интегрирования так, чтобы p -пути совпали с \bar{i} -путями, а затем произвели следующую модификацию пропагаторов, зависящих от внешних импульсов p :

$$(1.10) \quad \frac{1}{(\sum k_i)^2 + 2p \sum k_i - m_i^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{2p \sum k_i + i\epsilon}$$

т. е. пренебречь массами и произведениями импульсов интегрирования.

Доказательство. Модификация пропагаторов (1.10) приводит к следующим изменениям в детерминантах C и D (см. (1.5)). В детерминанте C за нулюются параметры, соответствующие \bar{i} -путям, т. е. C переходит в C_0 . В детерминанте D изменится величина C , в которой за нулюются те же параметры. Это приводит к тому, что в величине $f(\alpha)$ (см. (1.6)) сохранятся особенности, связанные с \bar{i} -путями, т. е. сохранится прежняя асимптотическая зависимость от s . Величины C_0 , $g_0 t + h_0$ и f_0 , вычисляемые по формулам (1.8) и (1.9), также не изменятся. Принимая во внимание выражение для асимптотики графа (1.7), убеждаемся, таким образом, что модификация пропагаторов (1.10) ничего в нем не меняет.

Утверждение 2. Пусть задан граф такой, что вклад в его главную асимптотику дает пара \bar{i} -путей, имеющих общую линию. Расставим импульсы интегрирования так, чтобы p -пути совпали с \bar{i} -путями. Тогда его асимптотика совпадает с асимптотикой редуцированного графа, получаемого из первоначального стягиванием общей линии в точку, и умноженной на фактор $\pm 1/s$. Знак (+) выбирается тогда, когда внешние импульсы в общей линии имеют одинаковое направление, а знак (-) — в обратном случае. К редуцированному графу применимо утверждение 1.

Доказательство. Пусть общая линия имеет параметр β и ей соответствует пропагатор

$$(1.11) \quad \frac{1}{(\sum k_i)^2 + 2(p_1 \pm p_2)(\sum k_i) - M^2 \pm s + i\epsilon}$$

Нам достаточно доказать, что пропагатор (1.11) можно заменить на $\pm 1/s$. Действительно, величины C_0 и $g_0 t + h_0$ не меняются при этом по тем же соображениям, какие использовались в доказательстве утверждения 1. Величина f будет иметь структуру

$$(1.12) \quad f = \beta C + \left| \begin{array}{c} C \quad \vdots \quad (\alpha^{(1)} + \beta) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \alpha^{(2)} + \beta \quad 0 \end{array} \right|,$$

где $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ — наборы параметров, соответствующих двум \bar{i} -путям. Теперь очевидно, что вместо f можно использовать величину

$$(1.13) \quad f^{(1)} = \beta C(\beta = 0) + \left| \begin{array}{c} C(\beta = 0) \quad \vdots \quad (\alpha^{(1)}) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \alpha^{(2)} \quad 0 \end{array} \right|,$$

что и доказывает наше утверждение, так как $f^{(1)}$ имеет те же особенности, что и f , и приводит к той же функции f_0 .

2. ЭЙКОНАЛЬНЫЕ И НЕЭЙКОНАЛЬНЫЕ ВКЛАДЫ В АМПЛИТУДУ РАССЕЯНИЯ

Как известно [10], амплитуда рассеяния двух скалярных нуклонов в пренебрежении радиационными поправками и вкладами поляризации вакуума представима в виде

$$(2.1) \quad f(p_1, p_2; q_1, q_2) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4x D(x) e^{-ix(p_1 - q_1)} \int_0^1 d\lambda S_\lambda + (q_1 \leftrightarrow q_2),$$

где

$$(2.2) \quad S_\lambda = \int [\delta v_1]^-_- \int [\delta v_2]^-_- \exp \left\{ ig^2 \lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int d\tau D \left[-x + 2\xi a_{1,2}(\xi) - \right. \right.$$

$$\left. - 2\tau a_z(\tau) - 2 \int_{-\infty}^0 v_1(\eta) d\eta + 2 \int_0^{\infty} v_2(\eta) d\eta \right\},$$

$$a_{1,2}(\xi) = p_{1,2}\theta(\xi) + q_{1,2}\theta(-\xi).$$

В выражениях (2.1) и (2.2) импульсы интегрирования каждой отдельной диаграммы расставлены так, что p -пути совпадают с нуклонными ли-

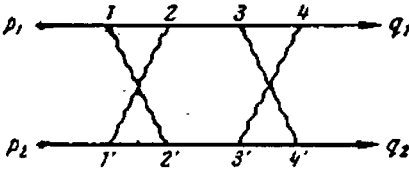


Рис. 2

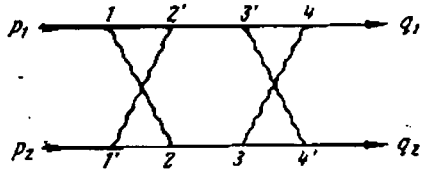


Рис. 3

ниями. Полагая v_1 и v_2 равными нулю, т. е. отбрасывая в нуклонных пропагаторах члены типа k, k_n , в пренебрежении обменными графами мы получим согласно утверждению 1 сумму вкладов в каждую диаграмму t -путей, совпадающих с нуклонными линиями. В результате при $s = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow \infty$ и $t = (p_1 - q_1)^2$ фиксированном будем иметь известное эйкональное представление амплитуды рассеяния

$$(2.3) \quad f \simeq \frac{2s}{(2\pi)^4} \int d^4x_\perp e^{-ix_\perp \Delta_\perp} \left(e^{-\frac{ig^2}{4ns} K_{d(\mu|\kappa_\perp|)} - 1} \right).$$

В связи с этим вклады от t -путей, совпадающих с нуклонными линиями, будем называть впредь эйкональными.

В работе (6) было указано на тот факт, что в диаграммах старших порядков по константе связи g (именно начиная с восьмого) необходимо учитывать также и другие t -пути, дающие, вообще говоря, вклад, не меньший, чем эйкональные. Мы начнем изучение неэйкональных вкладов с диаграммы 8-го порядка, изображенной на рис. 2. В этой диаграмме, которую мы в дальнейшем будем называть диаграммой XX, существует четыре t -пути одинаковой длины три: (1234), (1'2'3'4'), (1'234') и (12'3'4'). Формальный

учет всех четырех путей привел бы нас к асимптотике $\ln^2 s/s^2$: Однако это соответствует обращению в нуль параметров всех линий, входящих в диаграмму, что невозможно из-за фактора $\delta(1-\Sigma\alpha_i)$. Учет каких-либо трех путей приводит к асимптотике $\ln^2 s/s^2$, которая также не будет главной, так как в данном случае коэффициент при ней, пропорциональный C_0 , будет равен нулю вследствие того, что \bar{l} -пути образуют замкнутую петлю.

Таким образом, необходимо вычислить сумму вкладов от следующих пар \bar{l} -путей:

$$(2.4) \quad (1234; 1'2'3'4'), (1234; 1'234'), (12'3'4; 1'2'3'4') \text{ и } (12'3'4; 1'234').$$

Пары $(1234; 12'3'4)$ и $(1'2'3'4'; 1'234')$ вклада не дадут, так как эти \bar{l} -пути опять образуют замкнутую петлю. Все пары \bar{l} -путей (2.4) приводят к одной и той же асимптотической зависимости от s вида $\ln s/s^2$, поэтому далее мы будем интересоваться лишь коэффициентами при ней.

Вклад в диаграмму XX от пары $(1234; 1'2'3'4')$ присутствует в формуле (2.3). В связи с этим мы будем обозначать его

$$(2.5) \quad \frac{\ln s}{s^2} f_{\text{XX}}^{(\text{XX})}(t).$$

Найдем теперь вклад в асимптотику диаграммы XX от \bar{l} -путей $(12'3'4)$ и $(1'234')$. Расставим импульсы интегрирования так, чтобы эти пути совпали с p -путями. Тогда согласно утверждению 1 мы можем в линиях, входящих в \bar{l} -пути, модифицировать пропагаторы по типу (1.10). Сделаем после этого замену импульсов интегрирования

$$(2.6) \quad k_i \rightarrow \frac{m}{\mu} k_i.$$

При этом нуклонные линии заменятся на мезонные

$$(2.7) \quad D_m\left(k \frac{m}{\mu}\right) = \frac{1}{k^2 m^2 / \mu^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{\mu^2}{m^2} D_\mu(k),$$

$$D_m(p_1 - q_1 - k) \rightarrow \frac{\mu^2}{m^2} D_\mu\left[(p_1 - q_1) \frac{\mu}{m} - k\right],$$

т. е. $t \rightarrow t\mu^2/m^2$, а функции распространения, соответствующие \bar{l} -путям, приобретут лишь множители вида μ/m . Благодаря этому мы можем считать все линии, входящие в \bar{l} -пути, модифицированными нуклонными линиями. В результате мы получаем граф того же вида, что и на рис. 2, но в котором p -пути уже направлены вдоль нуклонных линий (рис. 3). Таким образом, искомый вклад будет иметь вид

$$(2.8) \quad \frac{\ln s}{s^2} f_{\text{XX}}^{(1)}(t), \quad f_{\text{XX}}^{(1)}(t) = \frac{\mu^2}{m^2} f_{\text{XX}}^{(\text{XX})}\left(t \frac{\mu^2}{m^2}\right).$$

Если массы частиц удовлетворяют условию

$$(2.9) \quad \mu^2/m^2 \ll 1, \quad t/m^2 \ll 1,$$

то вклад неэikonальных \bar{l} -путей мал по сравнению с вкладом эikonальных.

Нам осталось лишь рассмотреть вклады в асимптотику диаграммы ХХ от пары \bar{l} -путей $(1'2'3'4')$ и $(12'3'4)$. Вторая неисследованная пара (1234) и $(1'234')$ (см. (2.4)), очевидно, дает такой же вклад. Если стянуть \bar{l} -пути $(1'2'3'4')$ и $(12'3'4)$ в точку, то мы получим редуцированный граф вида, представленного на рис. 4. Отсюда следует, что вклад этих \bar{l} -путей в асимптотику диаграммы ХХ не зависит от передачи импульса, т. е. представим в виде

$$(2.10) \quad \frac{\ln s}{s^2} \frac{1}{\mu^2} \varphi \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right).$$

Найдем вид функции $\varphi(\mu^2/m^2)$ при выполнении условия (2.9). Для этого расставим в диаграмме ХХ импульсы интегрирования так, чтобы p -пути

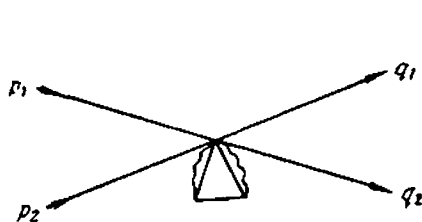


Рис. 4

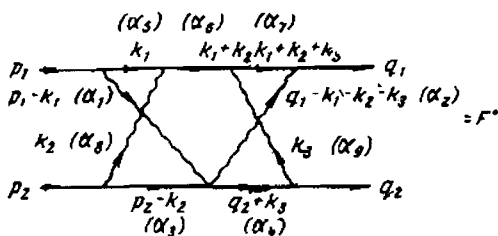


Рис. 5

совпали с \bar{l} -путями $(1'2'3'4')$ и $(12'3'4)$. Тогда, используя утверждение 2, получим, что искомый вклад будет равен асимптотике редуцированного графа (рис. 5), умноженной на $1/s$.

При $s \rightarrow \infty$ асимптотика F' с учетом формулы (1.7), будет иметь вид

$$(2.11) \quad F' \simeq \frac{\ln s}{s^2} \text{const} \int d\alpha_1 \dots d\alpha_6 \delta(1-\alpha_1-\alpha_2) \delta(1-\alpha_1-\alpha_4) \times \\ \times \delta(1-\alpha_3-\alpha_6-\alpha_7-\alpha_8-\alpha_9) \frac{C_0}{(g_0 t + h_0) f_0^2},$$

где

$$(2.12) \quad g_0 = 0, \quad h_0 = -\mu^2 \left[\frac{m^2}{\mu^2} (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_7) + (\alpha_5 + \alpha_8) \right] C_0.$$

Из (2.11) и (2.12) получаем выражение для функции φ , определяемой соотношением (2.10),

$$(2.13) \quad \varphi \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) = \text{const} \int (d\alpha) \Pi \delta(1-\Sigma\alpha) \frac{\delta(1-\alpha_3-\alpha_6-\alpha_7-\alpha_8-\alpha_9)}{f_0^2 \left[\frac{m^2}{\mu^2} (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_7) + \alpha_5 + \alpha_8 \right]}.$$

При больших m^2/μ^2 основной вклад дает область $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_7 = 0$ и мы можем снова применить метод Тиктопулоса [8], сделав замену $\alpha_{3,4,7} \rightarrow \lambda \alpha_{3,4,7}$. При этом

$$(2.14) \quad d\alpha_3 d\alpha_4 d\alpha_7 \rightarrow \lambda^3 \delta(1-\alpha_3-\alpha_6-\alpha_7) d\alpha_3 d\alpha_4 d\alpha_7 d\lambda, \\ \delta(1-\alpha_3-\alpha_6-\alpha_7-\alpha_8-\alpha_9) \rightarrow \delta(1-\alpha_6-\alpha_8), \\ f_0 \rightarrow \lambda \tilde{f}_0,$$

откуда

$$(2.15) \quad \varphi\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) = \text{const} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda \frac{\mu^2}{m^2} + 1}, \quad \text{т. е. } \varphi\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) = \text{const} \frac{\mu^2}{m^2} \ln \frac{\mu^2}{m^2}$$

при выполнении условия (2.9). Заметим, что const в (2.15) включает в себя теперь все интегралы по α_i .

Учитывая, что $f_{\text{нук}}(t=0) = \text{const}/\mu^2$, и принимая во внимание формулы (2.5), (2.8), (2.10) и (2.15), получаем асимптотическое выражение для диаграммы ХХ

$$(2.16) \quad f^{(\text{ХХ})}(t) \simeq \frac{\ln s}{s^3} (f_{\text{нук}}^{(\text{ХХ})}(t) + f_{\text{нук}}^{(\text{ХХ})}(t)),$$

где

$$f_{\text{нук}}^{(\text{ХХ})}(t) = \frac{\mu^2}{m^2} f_{\text{нук}}^{(\text{ХХ})}\left(t \frac{\mu^2}{m^2}\right) + \text{const} f_{\text{нук}}^{(\text{ХХ})}(t=0) \frac{\mu^2}{m^2} \ln \frac{\mu^2}{m^2}$$

при $s \rightarrow \infty$ фиксированном t и $\mu^2/m^2 \ll 1$.

3. АСИМПТОТИКА АМПЛИТУДЫ НУКЛОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ. ВОСЬМОЙ ПОРЯДОК

В предыдущем разделе мы рассмотрели одну из диаграмм восьмого порядка. Обратимся теперь к оставшимся диаграммам, исключая из их числа обменные графы, соответствующие в формуле (2.1) члену $(q_1 \leftrightarrow q_2)$. В них имеются три типа неэйкональных \bar{t} -путей, дающих вклад в главную асимптотику.

К первому типу мы относим неэйкональные \bar{t} -пути, не имеющие общих линий. Кроме диаграммы ХХ, имеется лишь одна диаграмма с такими \bar{t} -путями (рис. 6) и две диаграммы, кросс-симметричные им. Вклад в асимптотику диаграммы, изображенной на рис. 6, может быть записан в форме, аналогичной (2.8),

$$(3.1) \quad f_{\text{нук}}^{(\bar{t})}(t) = \frac{\ln s}{s^3} \frac{\mu^2}{m^2} \text{cross} f_{\text{нук}}^{(\bar{t})}\left(t \frac{\mu^2}{m^2}\right).$$

Если сложить эйкональные вклады диаграмм ХХ и изображенной на рис. 6 с кросс-симметричными им, то $\ln s$ сократятся, и мы получим вклад

$$(3.2) \quad \frac{1}{s^3} f_{\text{нук}}(t).$$

Тогда согласно формулам (2.8) и (3.1) вклад неэйкональных \bar{t} -путей в эту же сумму имеет вид

$$(3.3) \quad f_{\text{нук}}(t) = \frac{1}{s^3} \frac{\mu^2}{m^2} f_{\text{нук}}\left(t \frac{\mu^2}{m^2}\right).$$

Других неэйкональных вкладов, зависящих от передачи импульса, в восьмом порядке не имеется.

Ко второму типу мы отнесем неэйкональные \bar{t} -пути, имеющие одну общую нуклонную линию. Вклад таких \bar{t} -путей не зависит от передачи импульса и был рассмотрен в предыдущем разделе для диаграммы ХХ (см. (2.10) – (2.16)). Однако подобные вклады в сумме всех диаграмм, содержащих такие \bar{t} -пути, сокращаются.

Рассмотрим, например, диаграмму рис. 7, в которой пути (1'2'3'4') и (13'4'4) принадлежат ко второму типу. Их вклад можно учесть, воспользовавшись утверждением 2. Именно, асимптотика этой диаграммы графически представима в виде рис. 8.

Асимптотика графа, получающегося зеркальным отображением вершин 1 и 2 относительно 4, соответствует графу рис. 9.

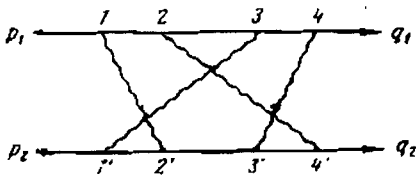


Рис. 6

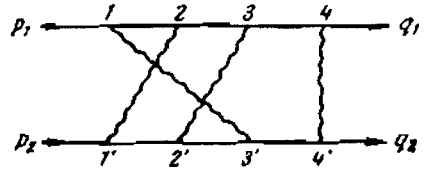


Рис. 7

Рассмотрим теперь кросс-симметричные графы. Согласно утверждению 2 общие линии надо заменять на множитель $-1/s$. Тогда получаем граф рис. 10. Первый член графа рис. 10 соответствует неэйконалиному вкладу в диаграмму, кросс-симметричную изображенной на рис. 7. Складывая графы рис. 8—10, убеждаемся, что вклад неэйконалиных \bar{i} -путей второго типа в их сумме сокращается. Очевидно, что и для других диаграмм подобного вида рассуждения, изложенные выше, являются справедливыми.

К третьему типу мы отнесем неэйконалиные \bar{i} -пути, имеющие общую мезонную линию. Вклад таких \bar{i} -путей так же не зависит от передачи импульса. В восьмом порядке имеется несколько диаграмм, обладающих \bar{i} -путями третьего типа. Мы рассмотрим для примера лишь одну из них (см. рис. 11), имея в виду, что все результаты также относятся ко всем подобным диаграммам.

В диаграмме, изображенной на рис. 11, пути (1'434') и (12'1'4) являются неэйконалиными \bar{i} -путями, принадлежащими к третьему типу. Их вклад можно записать в форме, аналогичной (2.10),

$$(3.4) \quad \frac{\ln s}{s^2} \frac{1}{\mu^2} \Phi \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right).$$

Как и в предыдущем разделе, мы будем искать вид функции Φ при выполнении условия (2.9). Расставим импульсы интегрирования так, чтобы p -пути совпали с \bar{i} -путями (1'434') и (12'1'4) (см. рис. 11). Согласно утверждению 2 искомым вклад будет равен асимптотике редуцированного графа (см. рис. 12), умноженной на $1/s$.

Используя формулу (1.7), при $s \rightarrow \infty$ получаем асимптотику

$$(3.5) \quad F^n \approx \frac{\ln s}{s^2} \text{const} \int d\alpha_1 \dots d\alpha_n \delta(1-\alpha_1-\alpha_2) \delta(1-\alpha_3-\alpha_4) \times \\ \times \delta(1-\alpha_5-\alpha_6-\alpha_7-\alpha_8-\alpha_9) \frac{C_0}{(g_0 t + h_0) f_0^2},$$

где

$$(3.6) \quad g_0 = 0, \quad h_0 = -\mu^2 C_0 \left[\frac{m^2}{\mu^2} (\alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8) + \alpha_9 \right].$$

Из (3.5) и (3.6) получаем выражение для функции $\Phi(\mu^2/m^2)$, определяемой соотношением (3.4),

$$(3.7) \quad \Phi\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) = \\ = \text{const} \int \{d\alpha\} \Pi \delta(1 - \Sigma\alpha) \frac{\delta(1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9)}{f_0^2 \left[\frac{m^2}{\mu^2} (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_8) + \alpha_9 \right]}$$

При больших m^2/μ^2 вклад дает область $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_7 + \alpha_8 = 0$. Делая замену $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8 \rightarrow \lambda \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_8$, будем иметь

$$(3.8) \quad d\alpha_3 \dots d\alpha_8 \rightarrow \lambda^3 \delta(1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_7 - \alpha_8) d\alpha_3 \dots d\alpha_8 d\lambda, \\ \delta(1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9) \rightarrow \delta(1 - \alpha_9), \\ \tilde{f}_0 \rightarrow \lambda \tilde{f}_0,$$

откуда следует

$$(3.9) \quad \Phi\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) = \text{const} \int_0^1 d\lambda \frac{\lambda}{\lambda \frac{m^2}{\mu^2} + 1}, \quad \text{т. е. } \Phi\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) = \text{const} \frac{\mu^2}{m^2}$$

при выполнении условия (2.9).

Результаты второго и третьего разделов можно свести в одну формулу, в которой учтено сокращение $\ln s$ при сложении с кросс-симметричными

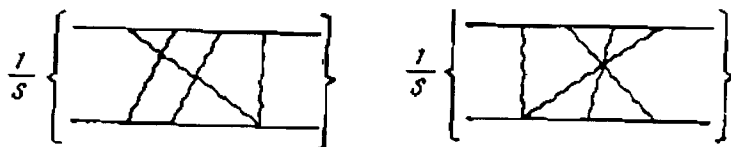


Рис. 8

Рис. 9

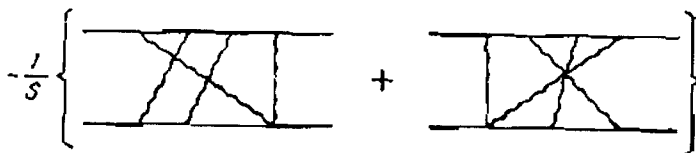


Рис. 10

диаграммами. Именно при больших s асимптотическое выражение амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния в восьмом порядке по g имеет вид

$$(3.10) \quad f^{(8)} \simeq \frac{g^8}{s^5} \left\{ \frac{1}{8 \cdot 4! (2\pi)^6} \int d^2 x_{\perp} e^{-ix_{\perp} \Delta_{\perp}} K_0^4(\mu |x_{\perp}|) + f_{\text{нейн}}^{(8)}(t) \right\},$$

где

$$f_{\text{нейн}}^{(8)}(t) = \frac{\mu^2}{m^2} f_{\text{внк}} \left(t \frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{\text{const}}{\mu^2} \Phi \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right).$$

В формуле (3.10) $f_{\text{внк}}(t)$ обозначает коэффициент при главной асимптотике суммы диаграмм, изображенных на рис. 2 и 6, и кросс-симметричных им, причем учитывающей лишь вклады эйконольных \bar{l} -путей. Функция

$\Phi(\mu^2/m^2)$ при $\mu^2/m^2 \ll 1$ ведет себя как μ^2/m^2 . Первый член в фигурной скобке представляет собой сумму эйкональных вкладов всех графов восьмого порядка (ср. (2.3)).

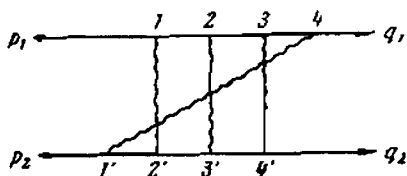


Рис. 11

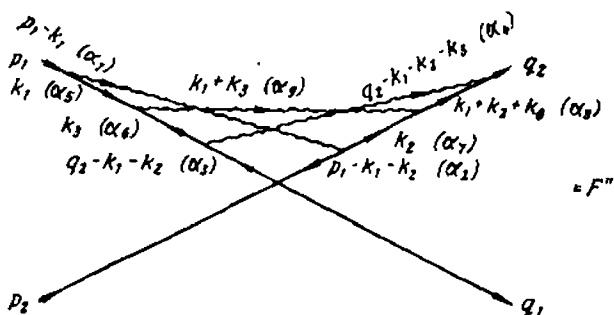


Рис. 12

При условии малости отношения мезонной и нуклонных масс в поправочных к эйкональному членах можно пренебречь зависимостью от передачи импульса t , если $t/m^2 \ll 1$,

$$(3.11) \quad f_{\text{эик}}\left(t \frac{\mu^2}{m^2}\right) \simeq f_{\text{эик}}(0) = \text{const}/\mu^2,$$

и формула (3.10) принимает вид

$$(3.12) \quad f^{(8)} \Big|_{\substack{s \rightarrow \infty \\ t \text{ фикс} \\ \mu^2/m^2 \ll 1}} \simeq \frac{g^8}{s^3} \left\{ \frac{1}{8 \cdot 4! (2\pi)^6} \int d^2x_{\perp} e^{-ix_{\perp} \Delta_{\perp}} K_0^4(\mu |x_{\perp}|) + \frac{\text{const}}{\mu^3} \frac{\mu^2}{m^3} \right\}$$

В заключение этого раздела подчеркнем, что все изложенное опиралось на последование вкладов от различных \bar{i} -путей, связанных с нулями функции $f(\alpha)$ (см. (1.4)–(1.7)).

4. АСИМПТОТИКА АМПЛИТУДЫ НУКЛОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ. ВЫСШИЕ ПОРЯДКИ

В разделе 3 мы рассмотрели высокоэнергетическое поведение амплитуды рассеяния в восьмом порядке по константе связи g . В этом порядке, как мы видели, существуют диаграммы, дающие неэйкональные вклады в асимптотику того же порядка по s , что и эйкональные. Однако в старших порядках, как было указано в работе [6], существуют диаграммы, неэйкональные вклады которых имеют более сильную асимптотику, чем эйкональные. Характерным примером таких диаграмм с неэйкональными путями первого типа (см. раздел 3) является диаграмма, изображенная на рис. 13.

В этой диаграмме, так же как в диаграмме ХХ, имеются два \bar{i} -пути длины три: $(12'3'4)$ и $(1'234')$. Для исследования ее асимптотики применим

ту же методикой, что и во втором разделе, т. е. направим p -пути вдоль \bar{l} -путей и произведем замену импульсов (2.6). Если мы имеем дело с диаграммой порядка $2l+2$ по g ($l+1$ — число мезонных линий), то асимптотика графа, изображенного на рис. 13, совпадает с асимптотикой графа на рис. 14, умноженной на фактор $(\mu^2/m^2)^{l-2}$.

При этом в диаграмме, изображенной на рис. 14, надо иметь в виду замену $t \rightarrow t\mu^2/m^2$ (ср. (2.7)). Пунктирные линии рассматриваемого редуциро-

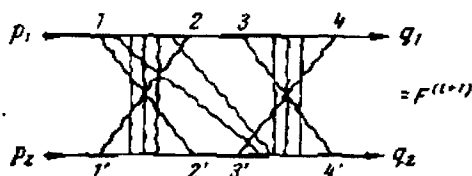


Рис. 13

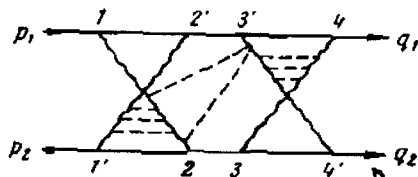


Рис. 14

ванного графа обозначают виртуальные частицы с массой μ^2/m . Своим происхождением эти линии обязаны мезонным линиям (см. рис. 13), не принадлежащим к \bar{l} -путям,

$$(4.1) \quad D_u(k) \rightarrow D_u\left(k \frac{m}{\mu}\right) = \frac{1}{k^2 \frac{m^2}{\mu^2} - \mu^2 + i\epsilon} = \frac{\mu^2}{m^2} D_{u/m}(k).$$

Если выполняется условие (2.9), то при вычислении асимптотики диаграммы, изображенной на рис. 14, можно положить $t=0$. Тогда, используя формулу (1.7), для главного асимптотического члена указанной диаграммы $(2l+2)$ -го порядка по константе связи g получим следующее выражение:

$$(4.2) \quad F^{(l+1)} \approx \frac{\ln s}{s^3} \frac{\text{const}}{\mu^{2(l-2)}} \int \{d\alpha\} \{d\beta\} \{d\gamma\} \Pi \delta(1 - \Sigma\gamma) \times \\ \times \delta(1 - \Sigma\alpha - \Sigma\beta) \frac{C_0}{f_0^3 \left[\frac{m^2}{\mu^2} \Sigma\alpha_i + \Sigma\beta_i \right]^{l-2}}, \quad l \geq 3.$$

В формуле (4.2) параметры α_i соответствуют волнистым мезонным линиям, β_i — пунктирным и γ_i — нуклонным линиям. Оказывается, что особенность $\Sigma\alpha_i=0$ не вносит существенного вклада в интеграл (4.2) при $m^2/\mu^2 \gg 1^2$. Но тогда

$$(4.3) \quad F^{(l+1)} \approx \frac{\ln s}{s^3} \frac{\text{const}}{(m^2)^{l-2}}, \quad l \geq 3.$$

В рассматриваемом $(2l+2)$ -м порядке по g существуют диаграммы с неэйконональными \bar{l} -путями третьего типа, имеющие вид, показанный на рис. 15. В диаграмме, изображенной на рис. 15, имеется два \bar{l} -пути длины три: $(12'1'3)$ и $(1'323')$, приводящие к асимптотическому поведению $\ln s/s^3$. Метод, примененный в разделе 3 для исследования подобной диаграммы в восьмом порядке, приводит здесь к формуле, аналогичной (4.3).

²⁾ В этом нетрудно убедиться, вычисляя степень λ , появляющейся в числителе при замене $\alpha \rightarrow \lambda\alpha$ (ср. (3.8), (3.9)).

Неэйкональные \bar{l} -пути второго типа, вклады от которых в восьмом порядке в сумме сократились, в старших порядках приводят к более слабому асимптотическому поведению.

Все диаграммы данного порядка $(2l+2)$ по g либо относятся к типу описанных в этом разделе и тогда дают вклад в асимптотику в соответствии с формулой (4.3), либо имеют \bar{l} -пути большей длины, чем три, что приводит к более слабому асимптотическому поведению при $s \rightarrow \infty$. Если

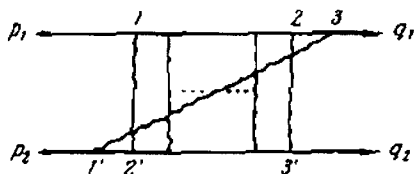


Рис. 15

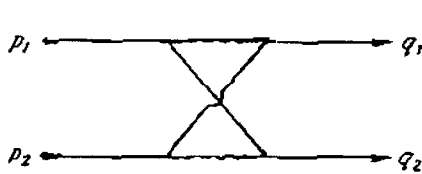


Рис. 16

учесть сокращение $1/s$ при сложении графов с кросс-симметричными им диаграммами, мы приходим к следующему выражению для асимптотики амплитуды рассеяния $f^{(2l+2)}$ в $(2l+2)$ -м порядке по константе связи g :

$$(4.4) \quad f_{\text{эikon}}^{(2l+2)} \Big|_{\substack{s \rightarrow \infty \\ \mu^2/m^2 \ll 1}} \simeq \frac{1}{s^2} \frac{\text{const}}{(m^2)^{l-2}}, \quad l \geq 3.$$

Заметим, что эйкональная формула (2.3) при $t=0$ в том же порядке по g приводит к следующему выражению:

$$(4.5) \quad f_{\text{эikon}}^{(2l+2)}(t=0) = \frac{\text{const}}{s^l \mu^2}.$$

Таким образом, в пренебрежении обменными графами отношение неэйкональной и эйкональной амплитуд в данном порядке по константе связи равно

$$(4.6) \quad \frac{f_{\text{неэikon}}^{(2l+2)}}{f_{\text{эikon}}^{(2l+2)}} \Big|_{\substack{s \rightarrow \infty \\ \mu^2/m^2 \ll 1}} \simeq \text{const} \frac{\mu^2}{m^2} \left(\frac{s}{m^2} \right)^{l-2}, \quad l \geq 3.$$

Из (4.6) видно, что в области

$$(4.7) \quad s \rightarrow \infty, \mu^2/m^2 \ll 1, s \sim m^2, t=0$$

эйкональная амплитуда много больше неэйкональной, т. е. формула (2.3) правильно воспроизводит главные асимптотические члены в каждом порядке по g^2 . Если же мы находимся в области, определяемой соотношениями (4.7) и считаем $s \gg m^2$, то, как это следует из (4.6), вклады неэйкональных \bar{l} -путей доминируют над эйкональными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, изучение класса лестничных диаграмм в скалярной модели показывает, что эйкональная формула соответствует учету в асимптотике \bar{l} -путей, совпадающих с нуклонными линиями. «Лидирующая» частица, переносящая большой импульс, является в этом случае нуклоном и

не изменяет свой сорт в виртуальных процессах. Неэikonальные вклады в амплитуду обусловлены процессами с изменением сорта «лидирующей» частицы, т. е. с передачей импульса от нуклонов к мезонам и наоборот. При этом возникает важный вопрос о роли «перекрученных» графов, соответствующих исходным лестничным графам с заменой конечных импульсов $q_1 \leftrightarrow q_2$ (ср. рис. 1 и формулу (2.1)). Возможность переноса большого импульса мезоном приводит к тому, что вклад в асимптотику амплитуды рассеяния может доминировать над эikonальным в том же порядке по константе связи. Например, в четвертом порядке «перекрученный» граф (см. рис. 16) имеет асимптотику $\ln s/s$.

Отметим, что если ортодоксальная эikonальная формула соответствует рассеянию на юкавском квазипотенциале, обусловленном одномезонным обменом, то учет графа на рис. 16 приводит к появлению поправки к квазипотенциалу неюкавского типа. Найденная поправка соответствует обмену нуклон-антинуклонной парой и имеет эффективный радиус $\sim \hbar/2m$, а на малых расстояниях ведет себя как $\ln r/r$.

Указанный здесь пример демонстрирует важность задачи изучения последовательных поправок к эффективному квазипотенциалу при высоких энергиях и свидетельствует в пользу квазипотенциальной интерпретации эikonального представления в квантовой теории поля.

Авторы выражают глубокую признательность Н. Н. Боголюбову за интерес к работе и ценные замечания, а также Б. М. Барбашову, А. В. Ефремову, А. А. Логунову, И. Т. Тодорову, Д. В. Ширкову за плодотворные обсуждения.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
6 апреля 1973 г.

Литература

- [1] A. N. Tavkhelidze. *High Energy Physics*, Kiev, 1972, p. 367.
- [2] M. M. Islam. *Lectures in Theoretical Physics*, ed. by A. O. Barut and W. E. Brittin, vol. XIV, Colorado Associated University Press, 1972.
- [3] B. M. Barbashov, S. P. Kuleshov, V. A. Matveev, V. N. Pervushin, A. N. Sissakian, A. N. Tavkhelidze. *Phys. Lett.*, **33B**, 484, 1970.
- [4] Е. С. Фрадкин. *Труды ФИАН*, **29**, 7, «Наука», 1965.
- [5] Б. М. Барбашов. *ЖЭТФ*, **48**, 607, 1965.
- [6] J. Tiktououlos, S. Treiman. *Phys. Rev.*, **3D**, 1037, 1971.
- [7] J. Chisholm. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **48**, 300, 1952.
- [8] J. Tiktououlos. *Phys. Rev.*, **131**, 480, 1963.
- [9] А. В. Ефремов. *Препринт P-1242, ОИЯИ*, 1963; О. И. Завьялов. *ЖЭТФ*, **47**, 1103, 1964.
- [10] Б. М. Барбашов, С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, А. Н. Сисакян. *ТМФ*, **3**, 342, 1970.

METHOD OF THE STRAIGHT-LINE PATHS AND THE EIKONAL PROBLEM

S. P. Kuleshov, V. A. Matveev, A. N. Sissakian,
M. A. Smondyrev, A. N. Tavkhelidze

Structure of the «non-eikonal» contributions into the two-nucleon scattering amplitude, described by the sum of the ladder type graphs in a scalar model, is investigated.