

УДК 530.145

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

*С. П. Кулешов,
В. А. Матвеев,
А. Н. Сисакян,
М. А. Смондырев,
А. Н. Тавхелидзе*

Объединенный институт ядерных
исследований, г. Дубна

Настоящий обзор представляет собой попытку ознакомить читателя с основными идеями и элементами математического аппарата, лежащими в основе приближения прямолинейных путей (ППП) в квантовой теории поля. Рассмотрен ряд приложений ППП для задач взаимодействия частиц высоких энергий и прослежена его связь с квазипотенциальным описанием в квантовой теории поля.

The present survey is an attempt to get the reader familiar with the basis and the mathematical formalism which underlie the straight-line path approximation in quantum field theory. Some applications of the method to solving the problems of high energy particle interactions are considered, and its connection with the quasipotential description in quantum field theory is studied.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов сильного взаимодействия при высоких энергиях представляет собой одну из центральных проблем физики элементарных частиц настоящего времени. Теоретический фундамент для интерпретации наблюдающихся в этих процессах закономерностей составляет общие принципы квантовой теории поля. При изучении взаимодействия адронов высоких энергий важное значение приобретает введенное в фундаментальных работах Н. Н. Боголюбова по теории дисперсионных соотношений [8, 9] представление об амплитуде рассеяния как единой аналитической функции физических переменных.

Именно эта концепция, выражающая важное требование взаимосвязи между различными физическими процессами, является основой большинства теоретических и феноменологических подходов к описанию сильных взаимодействий при высоких энергиях. Наибольшее развитие получили следующие подходы: дисперсион-

ные соотношения и уравнения, дисперсионные правила сумм, асимптотический подход, феноменологические реджевский и эйкональный подходы, квазипотенциальный подход. В последние годы выяснилась плодотворность квазипотенциального метода при изучении процессов взаимодействия частиц высоких энергий.

Квазипотенциальный метод [11, 14, 34] был предложен в 1963 г. и за прошедшие годы получил существенное развитие и нашел широкое применение в самых различных областях квантовой теории поля. В основе успеха этого метода лежит тот факт, что он сочетает в себе строгость основных положений квантовой теории поля с наглядностью физической интерпретации, позволяющей привлекать как эмпирические, так и эвристические соображения о характере взаимодействия частиц при высоких энергиях.

В некоторых исследованиях последнего времени, посвященных описанию различных процессов в области высоких энергий, было обращено внимание на важное значение эвристической идеи о гладкости локального квазипотенциала, которая восходит к работам Д. И. Блохинцева [26], А. А. Логунова с сотр. [22]. Предположение о гладкости локального квазипотенциала, с одной стороны, позволяет передать основные черты высокоэнергетического рассеяния адронов, а с другой — приводит к весьма простой качественной картине взаимодействия частиц при асимптотически высоких энергиях. В результате этого адроны в процессе рассеяния при высокой энергии в каждом акте взаимодействия, которое описывается гладким комплексным квазипотенциалом, сохраняют большие значения своих продольных (в системе центра инерции) импульсов, испытывая небольшие поперечные передачи импульсов. В некотором смысле такое поведение близко к классической картине рассеяния быстрых частиц, движущихся по приближенно прямолинейным путям и испытывающих лишь малые угловые отклонения. Важное отличие, однако, состоит в поглощающем, т. е. существенно неупругом характере высокоэнергетического рассеяния адронов с присущим ему приближенным постоянством полного сечения и дифракционным поведением при малых переданных импульсах.

Упомянутую выше качественную картину приближенно прямолинейного движения взаимодействующих частиц можно распространить и на неупругие процессы при высоких энергиях, так как одной из важнейших эмпирических закономерностей этих процессов являются ограниченность поперечных импульсов и преобладание продольных (вдоль от столкновения) компонент импульсов вторичных частиц. Поэтому особенно важно развитие методов, основанных на концепции прямолинейных путей, т. е. на предположении о малости передач импульсов в процессах упругого и неупругого взаимодействий частиц при асимптотически высоких

энергиях. Такие методы будем называть приближениями прямолинейных путей (ППП). Им и посвящен настоящий обзор.

Релятивистская формулировка приближения прямолинейных путей впервые была дана, например, в работах [4, 23] на базе методов функционального интегрирования в квантовой теории поля. Выбор метода не является случайным. Во-первых, метод функционального интегрирования, как это было показано в основополагающих работах Фейнмана [27] и Н. Н. Боголюбова [7], оказывается весьма удобным для нахождения замкнутых выражений для полных функций Грина. Во-вторых, в рамках континуального представления амплитуд различных процессов, как суммы по путям сталкивающихся частиц, концепция прямолинейных путей получает простую и ясную реализацию. Приближение прямолинейных путей в этом подходе состоит в учете путей частиц, которые наиболее близко приближаются к классическим, совпадающих в случае рассеяния частиц высоких энергий на малые углы с прямолинейными траекториями. Применяемые при этом методы приближенного вычисления функциональных квадратур близки к аппроксимационным процедурам, предложенным Е. С. Фрадким [21] и Б. М. Барбашовым [4] при исследовании инфракрасной асимптотики функции Грина в квантовой электродинамике.

В данном обзоре изложена общая методика построения двухчастичных функций Грина и амплитуд рассеяния в виде континуальных интегралов. При этом в качестве объекта исследований выбраны стандартные теоретико-полевые модели: модель скалярных нуклонов, обменивающихся скалярными мезонами, и модель скалярных нуклонов и векторных мезонов. Полученные замкнутые выражения для двухчастичных функций Грина содержат вклады всевозможных графов, учитывающих радиационные поправки, замкнутые нуклонные петли и т. п. Важный этап построения амплитуды рассеяния — развитие методики корректного перехода на массовую поверхность и анализ проблемы перенормировок. Особенность общего выражения для амплитуды рассеяния, записанного в виде функционального интеграла, заключается в специфической факторизации в амплитуде вкладов, описывающих эффекты самодействия нуклонов, обменные эффекты и поляризацию вакуума. Обсуждается также физическая интерпретация амплитуды рассеяния, как суммы по отклонениям путей от классической траектории. Далее, на основе выражения для двухчастичной функции Грина проведено построение амплитуды процесса с рождением некоторого числа мезонных квантов и рассмотрены общие свойства амплитуд неупругих процессов.

На примере выражений для амплитуд процессов упругого и неупругого рассеяний, записанных в виде континуальных интегралов, дается релятивистская формулировка приближения пря-

молинейных путей. Это приближение приводит к модификации нуклонных пропагаторов, при которой не учитываются комбинации импульсов виртуальных мезонов. Возможен также и более простой вариант приближения, который ведет к исчезновению квадратичных членов в пропагаторах. Однако в некоторых случаях такой метод неприемлем из-за возникающих при этом трудностей, в частности, с расходимостями фейнмановских интегралов.

Как пример применения приближения прямолинейных путей рассмотрена амплитуда рассеяния двух частиц в пределе высоких энергий при фиксированных передачах импульса. Важной особенностью является факторизация радиационных поправок в амплитуде рассеяния, которая в данном приближении имеет вид эйконоального представления с юкавским потенциалом взаимодействия. При этом в конечном результате отсутствуют эффекты запаздывания. Интересно отметить, что сумма лестничных графов с перекрестиями в приближении прямолинейных путей сводится эффективно к сумме лестничных графов квазипотенциального типа. Дифракционное поведение амплитуды рассеяния обязано учету радиационных поправок, которые естественным образом приводят при этом к гладкому, комплексному эффективному квазипотенциалу.

В качестве второго примера применения приближения прямолинейных путей рассмотрены процессы множественного рождения частиц. Среди ряда подходов, развивающихся в этом направлении, методу прямолинейных путей наиболее близка идея об интерпретации мезонного рождения в сильных взаимодействиях по аналогии с тормозным излучением мягких частиц в электродинамике. Общим для таких подходов будет предположение о возможности частично или полностью пренебречь отдачей при испускании вторичных частиц. Среди результатов, изложенных в этой части обзора, следует отметить: предсказание о пуассоновском характере распределения по множественности при фиксированных t ; обнаружение области автомодельного поведения сечений, просуммированных по числу вторичных частиц; приближенную линейность средней множественности по t .

Приближение прямолинейных путей получило в последнее время дальнейшее развитие. В частности, в этом приближении были изучены другие теоретико-полевые модели, произведен учет более широкого класса диаграмм, рассмотрены различные асимптотические области. Задачей настоящего обзора не являлся широкий охват всех проблем, связанных с этими вопросами, и читатель может обратиться к обзору [2], в котором проведен интересный анализ эйконоального приближения и его связи с квазиклассической аппроксимацией и оптическими моделями рассеяния частиц.

Далее приводится формулировка некоторых математических реализаций концепции прямолинейных путей, использующих

методы функционального интегрирования и позволяющих произвести последовательный учет отклонения путей частиц от линейных траекторий. Важность изучения этого вопроса продиктована тем обстоятельством, что только на этом пути можно прийти к самосогласованному разрешению проблемы обоснования приближения прямолинейных путей и расширить рамки его применимости. Показано, что учет поправочных членов приводит к появлению эффектов запаздывания. Отмечается сингулярный характер поправочных членов на малых расстояниях, что в конечном итоге может привести к появлению неэйконольных вкладов в амплитуду рассеяния.

Сформулирован операторный метод решения квазипотенциальных уравнений и установлена его связь с приближенными методами функционального интегрирования, рассмотренными выше. Показывается, что при условии гладкости локального квазипотенциала операторный метод дает последовательное обоснование эйконального представления амплитуды рассеяния и позволяет найти к нему поправки.

Исследована структура неэйконольных вкладов в амплитуду рассеяния двух нуклонов. В частности, показано, что в сумме всех лестничных диаграмм восьмого порядка в скалярной модели присутствуют члены, нарушающие ортодоксальную формулу эйконала и исчезающие в пределе $\mu/m \rightarrow 0$, где μ и m есть массы мезона и нуклона. Найденные члены соответствуют вкладам в эффективный квазипотенциал, отвечающим обмену нуклон-антинуклонными парами.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ В ВИДЕ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПУТЯМ

Построение двухчастичной функции Грина. Для простоты рассмотрим сначала модель скалярных нуклонов, взаимодействующих со скалярным мезонным полем, которая описывается лагранжианом взаимодействия $L_{int} = g:\psi^+\psi\phi$. Обобщение результатов для случая модели скалярных нуклонов, взаимодействующих с нейтральным векторным полем, будет дано ниже.

Одночастичная функция Грина нуклона в заданном внешнем скалярном поле $\phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[\square + m^2 - g\phi(x)] G(x, y | \phi) = \delta(x - y). \quad (1)$$

Формальное решение уравнения можно представить в виде континуального интеграла [1]:

$$G(x, y | \phi) = i \int_0^{\infty} d\tau \exp(-i\tau m^2) \int [\delta v]_0^{\tau} \times$$

$$\times \exp \left\{ ig \int_0^{\tau} d\xi \varphi \left[x + 2 \int_0^{\xi} v(\eta) d\eta \right] \right\} \delta \left[x - y + 2 \int_0^{\tau} v(\eta) d\eta \right], \quad (2)$$

где

$$[\delta v]_{\tau_1}^{\tau_2} = \left\{ \delta v \exp \left[-i \int_{\tau_1}^{\tau_2} v^2(\eta) d\eta \right] \right\} / \left\{ \int \delta v \exp \left[-i \int_{\tau_1}^{\tau_2} v^2(\eta) d\eta \right] \right\}; \quad (3)$$

δv — элемент объема функционального пространства четырехмерных вещественных функций $v(\eta)$, заданных на отрезке $\tau_1 \leq \eta \leq \tau_2$.

Фурье-образ функции Грина имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} G(p, q | \varphi) &= \int d^4x d^4y \exp(ipx - iqy) G(x, y | \varphi) = \\ &= i \int_0^{\infty} d\tau \exp[i\tau(p^2 - m^2)] \int d^4x \exp[ix(p - q)] \int [\delta v]_0^{\tau} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ ig \int_0^{\tau} d\xi \varphi \left[x + 2p\xi + 2 \int_0^{\xi} v(\eta) d\eta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя выражение (4), можно найти функцию Грина двух нуклонов

$$\begin{aligned} G(p_1, p_2; q_1, q_2) &= \left[\exp \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \right] \times \\ &\quad \times G(p_1, q_1 | \varphi) G(p_2, q_2 | \varphi) S_0(\varphi) |_{\varphi=0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} &\left[\exp \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \right] \equiv \\ &\equiv \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 D(x_1 - x_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)} \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

$S_0(\varphi)$ — среднее значение S -матрицы по флуктуациям нуклонного вакуума в присутствии внешнего скалярного поля φ . Известно, что $S_0(\varphi)$ можно представить в виде:

$$S_0(\varphi) = \exp[i\pi(\varphi)], \quad (7)$$

где функционал $\pi(\varphi)$ в рамках рассматриваемых здесь моделей соответствует сумме связанных диаграмм, содержащих одну замкнутую нуклонную петлю с произвольным числом концов внешнего мезонного поля.

Введем обозначения

$$\int j_i \varphi \equiv \int dz \varphi(z) j(x_i - z; p_i; \tau_i | v_i), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где

$$j(x_i - z; p_i; \tau_i | v_i) = \int_0^{\tau_i} d\xi \delta \left[x_i - z + 2p_i \xi + 2 \int_0^{\xi} v_i(\eta) d\eta \right]. \quad (9)$$

Используя эти обозначения, представим выражение для функции Грина двух нуклонов (5) в следующей форме:

$$\begin{aligned} G(p_1, p_2; q_1, q_2) = & i^2 \int_0^\infty d\tau_1 d\tau_2 \exp [i\tau_1 (p_1^2 - m^2) + i\tau_2 (p_2^2 - m^2)] \times \\ & \times \int d^4x_1 d^4x_2 \exp [ix_1 (p_1 - q_1) + ix_2 (p_2 - q_2)] \times \\ & \times \int [\delta v_1]_0^{\tau_1} [\delta v_2]_0^{\tau_2} \mathcal{E}(x_{1,2}; p_{1,2}; \tau_{1,2} | v_{1,2}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\mathcal{E} = \left[\exp \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \right] \exp [ig \int \varphi (j_1 + j_2)] S_0(\varphi) |_{\varphi=0}. \quad (11)$$

Рассмотрим более подробно структуру \mathcal{E} . Определим для каждого функционала $A(\varphi)$:

$$\bar{A}(\varphi) = \left[\exp \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \right] A(\varphi), \quad (12)$$

так что среднее значение $A(\varphi)$ по вакуумным флуктуациям мезонного поля $\bar{A} = \bar{A}(\varphi) |_{\varphi=0}$.

Рассмотрим теперь среднее по мезонному вакууму от произведения двух функционалов:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \left[\exp \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \right] A(\varphi) B(\varphi) |_{\varphi=0}. \quad (13)$$

Нетрудно доказать следующее тождество:

$$\begin{aligned} \bar{A} \cdot \bar{B} &= \left[\exp \frac{i}{2} \int D \left(\frac{\delta}{\delta \varphi_1} + \frac{\delta}{\delta \varphi_2} \right)^2 \right] A(\varphi_1) B(\varphi_1) |_{\varphi_1=\varphi_2=0} = \\ &= \left[\exp i \int D \frac{\delta^2}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2} \right] \bar{A}(\varphi_1) \bar{B}(\varphi_2) |_{\varphi_1=\varphi_2=0} = \\ &= \bar{A} \left(i \int D \frac{\delta}{\delta \varphi_2} \right) \cdot \bar{B}(\varphi_2) |_{\varphi_2=0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Выбирая в качестве двух функционалов

$$A(\varphi) = \exp [ig \int \varphi (j_1 + j_2)] \text{ и } B(\varphi) = S_0(\varphi), \quad (15)$$

имеем

$$\bar{A}(\varphi) = \exp \left[ig \int \varphi (j_1 + j_2) - \frac{ig^2}{2} \int D (j_1 + j_2)^2 \right]; \quad (16)$$

$$\bar{S}_0(\varphi) = \exp [i\Pi(\varphi)], \quad (17)$$

где функционал $\Pi(\varphi)$ соответствует сумме всех связанных диаграмм с произвольным числом замкнутых нуклонных петель и внешних концов при учете всех возможных внутренних мезонных спариваний.

Используя тождество (14) и формулы (15) — (17), находим для \mathcal{E} следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \exp \left[-\frac{ig^2}{2} \int D (j_1 + j_2)^2 - g \int D (j_1 + j_2) \frac{\delta}{\delta\varphi} \right] \exp [i\Pi(\varphi)]_{\varphi=0} = \\ &= \exp \left[-\frac{ig^2}{2} \int D (j_1 + j_2)^2 + i\Pi \left(-g \int D (j_1 + j_2) \right) \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Разлагая выражение (18) в ряд по константе связи и подставляя его в формулу (10), получаем после выполнения простых функциональных интегрирований по v_i обычный неперенормированный ряд теории возмущений для функции Грина двух частиц.

Подчеркнем здесь следующий важный факт, который будет использован в дальнейшем. Выражение (18) позволяет в общем виде отделить эффекты взаимодействия между двумя нуклонами (обменные эффекты) от эффектов самодействия нуклонов (радиационные поправки) и перенормировки вакуума.

Действительно, первый член в экспоненте (18) тривиальным образом можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{ig^2}{2} \int D (j_1 + j_2)^2 &= ig^2 \int Dj_1j_2 + \\ &+ \frac{ig^2}{2} \int Dj_1^2 + \frac{ig^2}{2} \int Dj_2^2, \quad (19) \end{aligned}$$

где первое слагаемое в правой части соответствует одномезонному обмену между двумя нуклонами, а остальные приводят к радиационным поправкам.

Представим соответственно второй член в экспоненте в виде:

$$\Pi = \Pi_{12} + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi(0), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{12} &= \Pi \left[-g \int D (j_1 + j_2) \right] - \Pi \left(-g \int Dj_1 \right) - \\ &- \Pi \left(-g \int Dj_2 \right) + \Pi(0) \quad (21) \end{aligned}$$

и

$$\Pi_i = \Pi \left(-g \int Dj_i \right) - \Pi(0), \quad i=1,2. \quad (22)$$

Покажем, что выражения (21) и (22) можно представить через поляризационный оператор мезонного поля

$$P(x_1, x_2 | \varphi) = - \frac{\delta^2}{\delta\varphi(x_1) \delta\varphi(x_2)} \Pi(\varphi) \quad (23)$$

или полную функцию Грина мезонного поля

$$D(x_1, x_2 | \varphi) = D(x_1 - x_2) + \int d^4 y_1 d^4 y_2 D(x_1 - y_1) P(y_1, y_2 | \varphi) D(y_2 - x_2) \quad (24)$$

в присутствии внешних источников. В результате для \mathcal{E} получим следующее выражение [35]:

$$\mathcal{E} = \exp [i\Pi(0)] \mathcal{E}^{(1)} \mathcal{E}^{(2)} \mathcal{E}^{(12)}, \quad (25)$$

где

$$\mathcal{E}^{(i)} = \exp \left[- \frac{ig^2}{2} \int D_i^* j_i^2 \right], \quad i = 1, 2 \quad (26)$$

и

$$\mathcal{E}^{(12)} = \exp \left[- ig^2 \int D_{12}^* j_1 j_2 \right]. \quad (27)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$D_i^* = 2 \int_0^1 d\sigma \int_0^\sigma d\lambda D(x_1, x_2 | -g\lambda \int D_j j_i), \quad i = 1, 2; \quad (28)$$

$$D_{12}^* = \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^1 d\lambda_2 D(x_1, x_2 | -g\lambda_1 \int D_j j_1 - g\lambda_2 \int D_j j_2). \quad (29)$$

Отметим, что D_i^* представляет собой функцию Грина мезонного поля, взаимодействующего с внешним источником j_i , соответствующим i -у нуклону, а D_{12}^* — функцию Грина мезонного поля, взаимодействующего одновременно с обоими нуклонами.

Таким образом, \mathcal{E} , определяющая функцию Грина двух нуклонов, факторизуется на множители, которые представляют соответственно взаимодействие между двумя нуклонами, радиационные поправки и перенормировку вакуума.

Представление для амплитуды рассеяния двух нуклонов. Амплитуда рассеяния двух нуклонов определяется через двухчастичную функцию Грина (5) выражением

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) iF(p_1, p_2; q_1, q_2) = \\ & = \lim_{p_i^2, q_i^2 \rightarrow m^2} \prod_{i=1, 2} (p_i^2 - m^2) (q_i^2 - m^2) G(p_1, p_2; q_1, q_2). \quad (30) \end{aligned}$$

Здесь мы игнорируем проблему перенормировки, обсуждаемую в следующем разделе, и опускаем в правой части формулы (30) фактор $\exp [i\Pi(0)]$, не дающий вклада в рассеяние.

Как указывалось во введении, разработка корректной процедуры перехода на массовую поверхность при построении амплитуды рассеяния с помощью определения (30) в общем виде представляет собой важную проблему. Многие разумные, с физической точки зрения, приближенные методы, использованные перед переходом на массовую поверхность, смещают положения полюсов функции Грина и делают процедуру нахождения амплитуды рассеяния математически некорректной.

Используем здесь метод выделения полюсов функций Грина, представляющий собой обобщение метода, который был введен в работах [3, 5, 20, 23] при нахождении амплитуды рассеяния в модели скалярных нуклонов, взаимодействующих со скалярным мезонным полем, в пренебрежении вкладами замкнутых нуклонных петель.

Используя выражение для двухчастичной функции Грина (5) и формулы (9) и (25) — (29), представим определение амплитуды рассеяния (30) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \cdot F(p_1, p_2; q_1, q_2) = \\
 & = \lim_{p_i^2, q_i^2 \rightarrow m^2} \prod_{i=1, 2} (p_i^2 - m^2) (q_i^2 - m^2) \times \\
 & \times \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^{\tau_1} d\xi_1 \int_0^{\tau_2} d\xi_2 \exp [i\tau_1 (p_1^2 - m^2) + i\tau_2 (p_2^2 - m^2)] \times \\
 & \times \int d^4x_1 d^4x_2 \int d^4z_1 d^4z_2 \exp [ix_1 (p_1 - q_1) + ix_2 (p_2 - q_2)] \times \\
 & \times \int [\delta v_1]_0^{\tau_1} [\delta v_2]_0^{\tau_2} i \mathcal{F}(z_1, z_2 | j_1, j_2) \times \\
 & \times \delta \left(x_1 - z_1 + 2p_1 \xi_1 + 2 \int_0^{\xi_1} v_1 d\eta \right) \times \\
 & \times \delta \left(x_2 - z_2 + 2p_2 \xi_2 + 2 \int_0^{\xi_2} v_2 d\eta \right), \quad (31)
 \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{F}(z_1, z_2 | j_1, j_2) = g^2 \mathcal{E}^{(1)} \mathcal{E}^{(2)} D_{12}^* \int_0^1 d\gamma \exp \left[-i\gamma g^2 \int D_{12}^* j_1 j_2 \right]. \quad (32)$$

При получении выражений (31), (32) был использован тот факт, что свободная часть функции Грина, не связанная с взаимодей-

ствием двух нуклонов, может быть вычтена по формуле

$$\mathcal{E}^{(12)} \rightarrow \mathcal{E}^{(12)} - 1 = ig^2 \int D_{12}^* j_1 j_2 \int_0^1 d\gamma \exp \left[-i\gamma g^2 \int D_{12}^* j_1 j_2 \right]. \quad (33)$$

Принимая во внимание тождество

$$\int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^{\tau_1} d\xi_1 \int_0^{\tau_2} d\xi_2 \dots \equiv \int_0^\infty d\xi_1 \int_0^\infty d\xi_2 \int_{\xi_1}^\infty d\tau_1 \int_{\xi_2}^\infty d\tau_2 \dots \quad (34)$$

и делая замену обычных и функциональных переменных

$$\left. \begin{aligned} \tau_i &\rightarrow \tau_i + \xi_i; \\ x_i &\rightarrow x_i - 2p_i \xi_i - 2 \int_0^{\xi_i} v_i d\eta; \\ v_i(\eta) &\rightarrow v_i(\eta - \xi_i) - (p_i - q_i) \vartheta(\eta - \tau_i), \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

получаем

$$\begin{aligned} &(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) F(p_1, p_2; q_1, q_2) = \\ &= \lim_{p_i^2, q_i^2 \rightarrow m^2} \prod_{i=1, 2} (p_i^2 - m^2) (q_i^2 - m^2) \times \\ &\times \int_0^\infty d\tau_1 d\tau_2 d\xi_1 d\xi_2 \exp [i\tau_1 (p_1^2 - m^2) + i\tau_2 (p_2^2 - m^2) + \\ &+ i\xi_1 (q_1^2 - m^2) + i\xi_2 (q_2^2 - m^2)] \int d^4 x_1 d^4 x_2 \times \\ &\times \exp [ix_1 (p_1 - q_1) + ix_2 (p_2 - q_2)] \times \\ &\times \int [\delta v_1]_{-\xi_1}^{\tau_1} [\delta v_2]_{-\xi_2}^{\tau_2} i\mathcal{F}(x_1, x_2 | j_1, j_2). \end{aligned} \quad (36)$$

Учитывая трансляционную симметрию функционала \mathcal{F}^*

* Отметим, что при трансляциях $x_i \rightarrow x_i + h$ функциональные переменные величины \mathcal{F} — токи j_i , имеющие вследствие замены переменных (35) вид:

$$j_i = \int_{-\xi_i}^{\tau_i} d\xi \delta \left[x_i - z + 2p_i \xi \vartheta(\xi) + 2q_i \xi \vartheta(-\xi) + 2 \int_0^\xi v_i d\eta \right], \quad (37)$$

также подвергаются преобразованию.

и переходя к пределу в формуле (36), находим окончательное выражение для амплитуды рассеяния двух нуклонов

$$F(p_1, p_2; q_1, q_2) = \int [\delta v_1]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^{(1)}(p_1, q_1 | v_1) \times \\ \times \int [\delta v_2]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^{(2)}(p_2, q_2 | v_2) i g^2 \int d^4 x \exp(i x \Delta) \times \\ \times D_{12}^*(x; p_i; q_i | v_i) \int_0^1 d\gamma \exp\left(-i\gamma g^2 \int D_{12}^* j_1 j_2\right), \quad (38)$$

где

$$\Delta = (p_1 - q_1) = -(p_2 - q_2), \quad x = x_1 - x_2.$$

Все величины, входящие в выражение (38), являются функционалами источников

$$j_i \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \delta \left[x_i - z + 2p_i \zeta \vartheta(\zeta) + 2q_i \zeta \vartheta(-\zeta) + 2 \int_0^{\zeta} v_i d\eta \right]. \quad (39)$$

Отметим, что выражение (39) определяет скалярную плотность точечной классической частицы, которая движется вдоль криволинейной траектории $x_i(s)$, зависящей от собственного времени $s = 2m\zeta$ и удовлетворяющей уравнению

$$m dx_i(s)/ds = p_i \vartheta(\zeta) + q_i \vartheta(-\zeta) + v_i(\zeta) \quad (40)$$

при условии $x_i(0) = x_i$, $i = 1, 2$.

По этой причине представление (38) для амплитуды рассеяния можно рассматривать как континуальную сумму по всем возможным путям нуклонов в процессе рассеяния. Нетрудно обобщить полученные здесь результаты для модели скалярных нуклонов, взаимодействующих с нейтральным векторным полем, с лагранжианом взаимодействия

$$L_{int} = i g: A_\mu \psi \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi + \frac{g^2}{2}: A_\mu^2 \psi^+ \psi: \quad (41)$$

Для амплитуды рассеяния двух нуклонов в этой модели получим следующее выражение:

$$F(p_1, p_2; q_1, q_2) = \int [\delta v_1]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^{(1)}(p_1, q_1 | v_1) \times \\ \times \int [\delta v_2]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^{(2)}(p_2, q_2 | v_2) l_\alpha^{(1)} l_\beta^{(2)} i g^2 \int d^4 x \exp[i x \Delta] \times \\ \times D_{12}^{\alpha\beta*}(x; p_i, q_i | v_i) \int_0^1 d\gamma \exp\left[-i\gamma g^2 \int D_{12}^{\alpha\beta*} j_\alpha^{(1)} j_\beta^{(2)}\right], \quad (42)$$

где

$$j_{\alpha}^{(i)} = [p_i + q_i + 2v_i(0)]_{\alpha}, \quad i = 1, 2. \quad (43)$$

Аналогично предыдущему случаю все величины в представлении (42) выражаются через функции Грина векторных полей, взаимодействующих с источниками:

$$j_{\alpha}^{(i)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi [2p_i \vartheta(\xi) + 2q_i \vartheta(-\xi) + 2v_i(\xi)]_{\alpha} \times \\ \times \delta \left[x_i - z + 2p_i \zeta \vartheta(\xi) + 2q_i \zeta \vartheta(-\xi) + 2 \int_0^{\xi} v_i(\eta) d\eta \right]. \quad (44)$$

Легко видеть, что выражение (44) определяет плотность тока точечной частицы, движущейся по криволинейной траектории (40), причем плотность тока удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_{\alpha} j_{\alpha}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (45)$$

Обсуждение проблемы перенормировок. Очевидно, что одночастичная функция Грина взаимодействующих нуклонов $G(p)$, определенная формулой:

$$(2\pi)^4 \delta(p - q) G(p) = \\ = \left[\exp \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \right] G(p, q | \varphi) S_0(\varphi) |_{\varphi=0}, \quad (46)$$

имеет в общем случае отличные положения полюса и значения вычета по сравнению с функцией Грина свободных нуклонов, т. е.

$$G(p) = \frac{1}{m^2 - p^2 + \Sigma(p^2)} \Big|_{p^2 \sim m_{\Phi}^2} \sim \frac{z^{-1}}{m_{\Phi}^2 - p^2}, \quad (47)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_{\Phi}^2 &= m^2 + \Sigma(m_{\Phi}^2) = m^2 + \delta m^2; \\ z &= 1 - \frac{\partial \Sigma}{\partial p^2}(m_{\Phi}^2). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

По этой причине в определении амплитуды рассеяния (30) как вычета двухчастичной функции Грина необходимо писать $z(p_k^2 - m_{\Phi}^2)$ вместо $(p_k^2 - m^2)$. Отметим, однако, что ввиду перенормировок массы и поля функциональные интегралы в выражении (36) расходятся, т. е.

$$\int [\delta v_1]_{-\xi_1}^{\tau_1} [\delta v_2]_{-\xi_2}^{\tau_2} \mathcal{F} \xrightarrow{\tau_i, \xi_i \rightarrow \infty} \exp \left\{ -i \sum_{k=1, 2} \tau_k \times \right. \\ \left. \times [\delta m^2 + (1-z)(p_k^2 - m_{\Phi}^2)] \right\} \times \\ \times \exp \left[-i \sum_{k=1, 2} \xi_k [\delta m^2 + (1-z)(q_k^2 - m_{\Phi}^2)] \right] \int_{\mathbb{R}} [\delta v_1]_{-\infty}^{\infty} [\delta v_2]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}, \quad (49)$$

где символ \int_R обозначает регуляризованное значение функционального интеграла, получающееся после выделения расходящихся экспоненциальных множителей. Отсюда следует, что амплитуда рассеяния, определенная как вычет двухчастичной функции Грина в физических полюсах (с учетом перенормировки масс и полей), дается формулами (38) и (42), в которых используются регуляризованные значения функциональных интегралов.

Процедуру регуляризации функциональных интегралов при общем исследовании структуры амплитуды рассеяния можно значительно упростить, если предположить существование пределов

$$\frac{\mathcal{E}^{(i)}(p, q; \tau, \xi | \nu)}{\int [\delta\nu]_{-\xi}^{\tau} \mathcal{E}^{(i)}(p, q; \tau, \xi | \nu)} \xrightarrow{\tau, \xi \rightarrow \infty} e^{(i)}(p, q | \nu), \quad (50)$$

где все импульсы p и q лежат на массовой поверхности, а величины $\mathcal{E}^{(i)}(p, q; \tau, \xi | \nu)$ определены формулами (26), в которых токи нуклонов заданы выражениями (37), зависящими от τ и ξ . Смысл предела (50) сводится к существованию следующих несобственных функциональных интегралов

$$\int [\delta\nu]_{-\infty}^{\infty} e^{(i)}(p, q | \nu) = 1; \quad (51)$$

$$\int [\delta\nu]_{-\infty}^{\infty} e^{(i)}(p, q | \nu) A(\nu) = [A]_{e^{(i)}} \quad (52)$$

для подходящего класса функционалов $A(\nu)$.

Используя определение (50) и формулы (51), (52), можно представить амплитуду рассеяния двух нуклонов (38) в следующей форме:

$$F(p_1, p_2; q_1, q_2) = r^{(1)}(t) r^{(2)}(t) f(p_1, p_2; q_1, q_2), \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} f(p_1, p_2; q_1, q_2) = & \int [\delta\nu_1]_{-\infty}^{\infty} e^{(1)}(p_1, q_1 | \nu_1) \times \\ & \times \int [\delta\nu_2]_{-\infty}^{\infty} e^{(2)}(p_2, q_2 | \nu_2) i g^2 \int d^4x \times \\ & \times \exp[ix\Delta] D_{12}^*(x, p_i, q_i | \nu_i) \int_0^1 d\gamma \exp\left[-i\gamma g^2 \int D_{12}^* j_1 j_2\right]; \end{aligned} \quad (54)$$

$$r^{(i)}(t) = \int_R [\delta\nu_i]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^{(i)}(p_i, q_i | \nu_i), \quad t = (p_i - q_i)^2. \quad (55)$$

Таким образом, согласно формуле (53), определенная часть радиационных поправок к рассеянию двух нуклонов факторизуется в амплитуде рассеяния в виде множителей, зависящих лишь от квадрата переданного импульса.

Эти радиационные факторы имеют простой физический смысл: они описывают взаимодействие асимптотически свободных нуклонов в начальном и конечном состояниях с флуктуациями мезонного вакуума.

Представление (53) может оказаться особенно удобным при изучении асимптотического поведения амплитуд при высоких энергиях, так как оно в замкнутой форме выделяет из амплитуды рассеяния факторы, не зависящие от энергии.

Построение амплитуд неупругих процессов. Рассмотрим здесь обобщение описанного выше метода для построения амплитуд неупругих процессов. Для конкретности изучим процессы рождения мезонов при неупругих столкновениях двух нуклонов. Эти процессы можно описать с помощью двухчастичной функции Грина двух нуклонов в присутствии внешнего мезонного поля φ^{ext} :

$$\begin{aligned}
 G(p_1, p_2; q_1, q_2 | \varphi^{\text{ext}}) &= i^2 \int_0^\infty d\tau_1 d\tau_2 \times \\
 &\times \exp [i\tau_1 (p_1^2 - m^2) + i\tau_2 (p_2^2 - m^2)] \times \\
 &\times \int d^4x_1 d^4x_2 \exp [ix_1 (p_1 - q_1) + ix_2 (p_2 - q_2)] \times \\
 &\times \int [\delta v]_0^{\tau_1} [\delta v_2]_0^{\tau_2} \mathcal{E}(\varphi^{\text{ext}}), \quad (56)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\varphi^{\text{ext}}) &= \left[\exp \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \right] \exp \left[ig \int \varphi (j_1 + j_2) \right] S_0(\varphi) |_{\varphi=\varphi^{\text{ext}}} = \\
 &= \exp \left\{ -\frac{ig^2}{2} \int D (j_1 + j_2)^2 + ig \int \varphi^{\text{ext}} (j_1 + j_2) + \right. \\
 &\quad \left. + i\Pi \left[\varphi^{\text{ext}} - g \int D (j_1 + j_2) \right] \right\}. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Удобно переписать выражение (57) в следующем виде:

$$\mathcal{E}(\varphi^{\text{ext}}) = \exp [i\Pi(\varphi^{\text{ext}})] \mathcal{E}R(\varphi^{\text{ext}}), \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned}
 R(\varphi^{\text{ext}}) &= \exp \left\{ ig \int \varphi^{\text{ext}} (j_1 + j_2) + i\Pi \left[\varphi^{\text{ext}} - g \int D (j_1 + j_2) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - i\Pi(\varphi^{\text{ext}}) - i\Pi[-g \int D (j_1 + j_2)] \right\}; \quad (59)
 \end{aligned}$$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\varphi^{\text{ext}} = 0)$ определяется уравнением (18) и соответствует чисто упругому рассеянию нуклонов.

Введем теперь

$$\Gamma_i(z|\varphi^{\text{ext}}) = j_i + \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\lambda \int dy (Dj_i)_y P(z, y|\sigma\varphi^{\text{ext}} - \lambda g \int Dj_i), \quad i = 1, 2; \quad (60)$$

$$\Gamma_{12}(z|\varphi^{\text{ext}}) = \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^1 d\lambda_2 \int dy_1 dy_2 (Dj_1)_{y_1} \times \\ \times (Dj_2)_{y_2} \Gamma[z, y_1, y_2|\sigma\varphi^{\text{ext}} - g \int D(\lambda_1 j_1 + \lambda_2 j_2)], \quad (61)$$

где

$$\Gamma(z, y_1, y_2|\varphi) = \frac{\delta^3}{\delta\varphi(z) \delta\varphi(y_1) \delta\varphi(y_2)} \Pi(\varphi) \quad (62)$$

есть обобщенный вершинный оператор связи трех мезонов в присутствии внешнего поля и поляризационный оператор определен формулой (23).

Функционал $R(\varphi^{\text{ext}})$ в терминах выражений (60), (61) имеет следующий вид:

$$R(\varphi^{\text{ext}}) = \exp[-i\Pi(0)] \exp\left[ig \int \varphi^{\text{ext}} (\Gamma_1 + \Gamma_2) + ig^2 \int \varphi^{\text{ext}} \Gamma_{12}\right]. \quad (63)$$

Производящая функция амплитуд неупругих процессов определяется как вычет двухчастичной функции Грина двух нуклонов в присутствии внешнего поля (56) при переходе на массовую поверхность нуклонов

$$iF(p_1, p_2; q_1, q_2|\varphi^{\text{ext}}) = \lim_{p_i^2, q_i^2 \rightarrow m^2} \prod_{i=1, 2} (p_i^2 - m^2) (q_i^2 - m^2) \times \\ \times G(p_1, p_2; q_1, q_2|\varphi^{\text{ext}}). \quad (64)$$

Опуская в правой части (64) множитель $\exp[i\Pi(\varphi^{\text{ext}})]$, не дающий вклад во взаимодействие частиц, и производя замену переменных (35), получаем для производящего функционала (64) следующее представление:

$$F(p_1, p_2; q_1, q_2|\varphi^{\text{ext}}) = \int d^4x_1 d^4x_2 \times \\ \times \exp[ix_1(p_1 - q_1) + ix_2(p_2 - q_2)] \int [\delta v_1]_{-\infty}^{\infty} \times \\ \times \mathcal{E}^{(1)}(p_1, q_1|v_1) \exp\left[ig \int \varphi^{\text{ext}} \Gamma_1\right] \int [\delta v_2]_{-\infty}^{\infty} \times \\ \times \mathcal{E}^{(2)}(p_2, q_2|v_2) \exp\left[ig \int \varphi^{\text{ext}} \Gamma_2\right] i\tilde{\mathcal{F}}(x_1, x_2|j_1, j_2; \varphi^{\text{ext}}), \quad (65)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(x_1, x_2 | j_1, j_2; \varphi^{\text{ext}}) = \\ = g^2 \tilde{D}_{12}^* \int_0^1 d\gamma \exp \left[-i\gamma g^2 \int \tilde{D}_{12}^* j_1 j_2 \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

Здесь величина \tilde{D}_{12}^* задана выражением

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{12}^* = D_{12}^*(x_1, x_2; p_i, q_i | v_i) - \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^1 d\lambda_2 \times \\ \times \int dz dy_1 dy_2 \varphi^{\text{ext}}(z) D(x_1 - y_1) \times \\ \times \Gamma_{12} \left[z, y_1, y_2 | \sigma \varphi^{\text{ext}} - g \int D(\lambda_1 j_1 + \lambda_2 j_2) \right] D(y_2 - x_2) \end{aligned} \quad (67)$$

и соответствует полной функции Грина мезонного поля, взаимодействующего одновременно с внешним полем φ^{ext} и источниками j_1 и j_2 .

Отметим, что функциональная зависимость величины (67) от φ^{ext} определяется взаимодействием внешнего поля с обменными токами в системе двух нуклонов.

Амплитуда процесса рождения N вторичных мезонов при столкновении двух нуклонов вычисляется с помощью функциональных производных от производящего функционала (65), т. е.

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2 - \sum_{i=1}^N k_i) F(p_1, p_2; q_1, q_2; k_1, k_2, \dots, k_N) = \\ = \prod_{i=1}^N \int dy_i \exp(iy_i k_i) \frac{\delta}{\delta \varphi^{\text{ext}}(y_i)} F(p_1, p_2; q_1, q_2 | \varphi^{\text{ext}}) \Big|_{\varphi^{\text{ext}}=0}. \end{aligned} \quad (68)$$

Например, амплитуда рождения одного мезона с импульсом k имеет вид:

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2; q_1, q_2; k) = ig \int [\delta v_1]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^{(1)}(p_1, q_1 | v_1) \times \\ \times \int [\delta v_2]_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^{(2)}(p_2, q_2 | v_2) \int d^4x \exp(ix\Delta) \times \\ \times \left\{ \Gamma_1(p_1, q_1; k | v_1) + \Gamma_2(p_2, q_2; k | v_2) \right\} g^2 D_{12}^* \times \\ \times \int_0^1 d\gamma \exp \left[-i\gamma g^2 \int D_{12}^* j_1 j_2 \right] + \tilde{\Gamma}_{12}(x; p_i, q_i; k | v_i) \times \\ \times \exp \left(-ig^2 \int D_{12}^* j_1 j_2 \right) \Big\}. \end{aligned} \quad (69)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Gamma_i(p_i, q_i; k | \nu_i) = \int dz \exp(izk) \Gamma_i(z | \varphi^{\text{ext}}) \Big|_{\substack{x_i=0 \\ \varphi^{\text{ext}}=0}}, \quad i = 1, 2; \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{12}(x; p_i, q_i; k | \nu_i) = & -g \int_0^1 d\lambda_1 \int_0^1 d\lambda_2 \int dz dy_1 dy_2 \exp(izk) \times \\ & \times D(y_1 - x/2) D(y_2 + x/2) \Gamma \left[y_1, y_2, z | -g \int D(\lambda_1 j_1 + \lambda_2 j_2) \right]. \quad (71) \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно построить амплитуды рождения двух и более мезонов.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Упругое рассеяние. Амплитуда упругого рассеяния двух нуклонов в пренебрежении эффектами поляризации вакуума $\pi = 0$ определяется выражением (42), в котором

$$\begin{aligned} D_{12}^{\alpha\beta*} &= D_i^{\alpha\beta*} = \\ &= D^{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\exp(ikx)}{\mu^2 - k^2} (g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta / k^2). \quad (72) \end{aligned}$$

В результате получим следующее замкнутое выражение для двухчастичной амплитуды рассеяния [4]:

$$\begin{aligned} F(p_1, p_2; q_1, q_2) = & \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4x \exp(ix\Delta) D^{\alpha\beta}(x) \times \\ & \times \int [\delta\nu_1]_{-\infty}^{\infty} [\delta\nu_2]_{-\infty}^{\infty} [2\nu_1(0) + p_1 + q_1]_\alpha \times \\ & \times [2\nu_2(0) + p_2 + q_2]_\beta \int_0^1 d\gamma \exp - \left\{ \frac{ig^2}{2} \int d^4k D^{\alpha\beta}(k) \times \right. \\ & \times \left[\sum_{i=1,2} j_\alpha^{(i)}(k; p_i, q_i | \nu_i) j_\beta^{(i)}(-k; p_i, q_i | \nu_i) + \right. \\ & \left. \left. + \gamma \exp(ikx) j_\alpha^{(1)}(k; p_1, q_1 | \nu_1) j_\beta^{(2)}(-k; p_2, q_2 | \nu_2) + (k \rightarrow -k) \right] \right\}, \quad (73) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} j_\alpha^{(i)}(k; p_i, q_i | \nu_i) = & 2i \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta [v_i(\zeta) + p_i \vartheta(\zeta) + q_i \vartheta(-\zeta)]_\alpha \times \\ & \times \exp \left\{ 2ik \left[p_i \zeta \vartheta(\zeta) + q_i \zeta \vartheta(-\zeta) + \int_0^\zeta v_i d\eta \right] \right\} \quad (74) \end{aligned}$$

есть ток перехода, удовлетворяющий уравнению непрерывности

$$k_{\alpha} j_{\alpha}^{(i)}(k; p_i, q_i | v_i) = 0. \quad (75)$$

Отметим, что члены $j^{(1)}j^{(2)}$, $i = 1, 2$ в (73) описывают радиационные поправки в каждой из нуклонных линий, а члены $j^{(1)}j^{(2)}$ описывают взаимодействие между двумя нуклонами.

Остановимся вкратце на физическом смысле функциональных переменных v_1 и v_2 . Введенные формально при получении решения для функции Грина, эти переменные описывают отклонение траектории частицы от прямолинейного пути. Действительно, если в формуле для тока перехода (74) положить $v = 0$, получим

$$j_{\alpha}(k; p, q | 0) = -[2p_{\alpha}/(2pk + i0) - 2q_{\alpha}/(2qk - i0)], \quad (76)$$

что соответствует классическому току нуклона, движущемуся при $\zeta > 0$ с импульсом p , а при $\zeta < 0$ с импульсом q .

Заметим, однако, что приближение $v = 0$ оказывается заведомо неприменимым при собственных временах частицы s , близких к нулю, когда классическая траектория частицы меняет направление. На языке диаграмм Фейнмана это равносильно пренебрежению в нуклонных пропагаторах квадратичной зависимостью от импульса k , т. е.

$$\frac{1}{m^2 - (p+k)^2} \rightarrow -\frac{1}{2pk},$$

что может привести к появлению расходимостей интегралов по d^4k на верхнем пределе.

Лучшее приближение к классическому току нуклона, учитывающее отдачу, дается средним значением тока (74) по функциональной переменной v , т. е.

$$\begin{aligned} \bar{j}_{\alpha}(k; p, q | v) &= \int [\delta v]_{-\infty}^{\infty} j_{\alpha}(k; p, q | v) = \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta [k\varepsilon(\zeta) + 2p\vartheta(\zeta) + 2q\vartheta(-\zeta)]_{\alpha} \times \\ &\times \exp\{2ik[p\zeta\vartheta(\zeta) + q\zeta\vartheta(-\zeta)] + ik^2|\zeta|\} = \\ &= -[(2p_{\alpha} + k_{\alpha})/(2pk + k^2 + i0) - (2q_{\alpha} - k_{\alpha})/(2qk - k^2 - i0)]. \quad (77) \end{aligned}$$

Приближение прямолинейных путей частиц, используемое при нахождении амплитуды упругого рассеяния, заключается в подстановке в показатель экспоненты в формуле (73) произведений

токов, усредненных по функциональным переменным v_1 и v_2 :

$$= \left(\frac{2p_{1\alpha} + k_\alpha}{2p_1k + k^2 + i0} - \frac{2q_{1\alpha} - k_\alpha}{2q_1k - k^2 - i0} \right) \left(\frac{2p_{2\beta} - k_\beta}{2p_2k - k^2 + i0} - \frac{2q_{2\beta} + k_\beta}{2q_2k + k^2 - i0} \right); \quad (78)$$

$$\begin{aligned} & \frac{j_\alpha^{(1)}(k; p_1, q_1) j_\beta^{(2)}(-k; p_2, q_2)}{j_\alpha^{(i)}(k; p_i, q_i) j_\beta^{(i)}(k; p_i, q_i)} = \\ & = \left(\frac{2p_{i\alpha} + k_\alpha}{2p_ik + k^2 + i0} - \frac{2q_{i\alpha} + k_\alpha}{2q_ik + k^2 - i0} \right) \times \\ & \times \left(\frac{2p_{i\beta} + k_\beta}{2p_ik + k^2 + i0} - \frac{2q_{i\beta} + k_\beta}{2q_ik + k^2 - i0} \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (79)$$

Следовательно, выражение для амплитуды упругого рассеяния в пренебрежении членами, соответствующими замене импульсов выходящих частиц, в приближении прямолинейных путей частиц принимает вид

$$f_{el}(p_1, p_2; q_1, q_2) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} r^{(1)}(t) r^{(2)}(t) (p_1 + q_1)_\alpha (p_2 + q_2)_\beta \times \\ \times \int d^4x \exp[ix(p_1 - q_1)] D^{\alpha\beta}(x) \int_0^1 d\gamma \exp[-i\gamma\chi^{(0)}(x; p_i, q_i)], \quad (80)$$

где

$$\chi^{(0)}(x; p_i, q_i) = \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \exp(ikx) D^{\alpha\beta}(k) \times \\ \times \left(\frac{2p_1 + k}{2p_1k + k^2 + i0} - \frac{2q_1 - k}{2q_1k - k^2 - i0} \right)_\alpha \left(\frac{2p_2 - k}{2p_2k - k^2 + i0} - \frac{2q_2 + k}{2q_2k + k^2 - i0} \right)_\beta; \quad (81)$$

$$r^{(1)}(t) = \exp \left[\frac{g^2}{2i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D(k) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2p_1 + k}{2p_1k + k^2} - \frac{2q_1 + k}{2q_1k + k^2} \right)_\alpha \right]; \quad (82)$$

$$r^{(2)}(t) = \exp \left[\frac{g^2}{2i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D(k) \left(\frac{2p_2 + k}{2p_2k + k^2} - \frac{2q_2 + k}{2q_2k + k^2} \right)_\alpha \right]. \quad (83)$$

Интересно отметить, что вклад радиационных поправок к диаграммам лестничного типа в рассматриваемом приближении факторизуется в виде множителя $r^{(1)}r^{(2)}$, зависящего лишь от квадрата переданного импульса $t = (p_1 - q_1)^2$. Аналогичное явление факторизации вкладов радиационных поправок в случае квантовой электродинамики было найдено в работе [30].

В пределе высоких энергий $s \rightarrow \infty$ при фиксированных переданных импульсах t , ограниченных условием $|t/m^2| \ll g^2$, величины $\chi^{(0)}$ и $r^{(i)}$ принимают вид:

$$\chi^{(0)} = \frac{g^2}{8\pi} \int \frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{\mathbf{k}_\perp + \mu^2} \exp(-i\mathbf{k}_\perp \mathbf{x}_\perp) = \frac{g^2}{4\pi} K_0(\mu|\mathbf{x}_\perp|); \quad (84)$$

$$r^{(1)}r^{(2)} = \exp(at), \quad (85)$$

где K_0 — функция Мак-Дональда нулевого порядка,

$$a = \frac{g^2}{3(2\pi)^2 m^2} [\ln(m^2/\mu^2) + 1/2 + O(\mu^2/m^2)]. \quad (86)$$

Таким образом, в данном асимптотическом пределе выражение для амплитуды упругого рассеяния двух скалярных нуклонов, взаимодействующих с векторным полем, имеет вид*:

$$f_{el}(s, t) = f^{(0)}(s, t) \exp(at), \quad (87)$$

где

$$f^{(0)}(s, t) = \frac{i(s-u)}{2} \int d^2x_{\perp} \exp(ix_{\perp} \Delta_{\perp}) \left\{ \exp[-(ig^2/4\pi) K_0(\mu|x_{\perp}|)] - 1 \right\} \quad (88)$$

$$t = -\Delta_{\perp}^2. \quad (89)$$

Как видно из формулы (87), учет радиационных эффектов приводит к дифракционному поведению амплитуды рассеяния частиц высоких энергий на малые углы, что соответствует гауссовой форме локального квазипотенциала упругого рассеяния с радиусом действия порядка $g\hbar/(mc)$. Силы, обусловленные обменом мезонов между нуклонами, имеют, очевидно, радиус $\hbar/(\mu c)$, причем предполагается, что $g\hbar/(mc) \ll \hbar/(\mu c)$. Таким образом, в области переданных импульсов $\mu^2 \ll |t| < g^2 m^2$ становится важным учет многократного мезонного обмена, что приводит к эйкональной структуре величины $f^{(0)}(s, t)$.

Как было показано в работе [24], учет взаимодействия нуклонов с нулевыми колебаниями мезонного вакуума позволяет качественно объяснить происхождение свойства гладкости локального квазипотенциала. Представив амплитуду (87) в эйкональной форме, найдем выражение для соответствующей этому представлению функции эйконала:

$$\exp[2i\chi(x_{\perp})] = \int \frac{d^2\rho}{4\pi a} \exp(-\rho^2/4a) \exp[2i\chi^{(0)}(x_{\perp} + \rho)]. \quad (90)$$

Отсюда нетрудно показать, что $\chi(x_{\perp})$ — комплексная величина с положительно определенной мнимой частью $|\exp(2i\chi)| < 1$ в соответствии с условием унитарности.

Разлагая экспоненту под интегралом (90) по степеням $\chi^{(0)}$, можно найти величину χ в виде ряда

$$\begin{aligned} \chi(\rho) &= \frac{g^2}{8\pi} \int \frac{d^2k_{\perp} \exp(-ikx_{\perp})}{k_{\perp}^2 + \mu^2} \exp(-ak_{\perp}^2) + \\ &+ i \left(\frac{g^2}{8\pi} \right)^2 \int \frac{d^2k_{\perp} d^2k'_{\perp} \exp[-ix_{\perp}(k_{\perp} + k'_{\perp})]}{(k_{\perp}^2 + \mu^2)(k'_{\perp}^2 + \mu^2)} \times \\ &\times \{ \exp[-a(k_{\perp} + k'_{\perp})^2] \exp[-a(k_{\perp}^2 - k'_{\perp}^2)] \} + \dots \end{aligned} \quad (91)$$

* Учет тождественности нуклонов приводит при симметризации выражения (87) к членам, исчезающим в пределе $s \rightarrow \infty$, и t фиксированном.

Первый член является чисто вещественным и соответствует рассеянию на юкавском потенциале, центр сил которого случайным образом распределен по гауссову закону. Второй член в формуле дает вклад в мнимую часть квазипотенциала.

Таким образом, учет радиационных эффектов при рассеянии двух частиц естественным образом приводит к гладкому комплексному квазипотенциалу, мнимая часть которого — положительно определенная величина в соответствии с условием унитарности.

Неупругие процессы. Амплитуды неупругих процессов, описывающие рождение некоторого числа квантов векторного поля при столкновении двух скалярных нуклонов высоких энергий, можно найти с помощью производящей функции $f(p_1, p_2; q_1, q_2 | A^{\text{ext}})$.

В рамках приближения прямолинейных путей частиц величина $f(p_1, p_2; q_1, q_2 | A^{\text{ext}})$ принимает вид:

$$\begin{aligned} f(p_1, p_2; q_1, q_2 | A^{\text{ext}}) &= g^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \times \\ &\times \exp [ix_1(p_1 - q_1) + ix_2(p_2 - q_2)] (p_1 + q_1)_\alpha (p_2 + q_2)_\beta \times \\ &\times D^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \exp \left\{ ig \int d^4k A_\gamma^{\text{ext}} \times \right. \\ &\times \left. [j_\gamma^{(1)}(k; p_1, q_1) \exp(ikx) + \overline{j_\gamma^{(2)}}(k; p_2, q_2) \exp(-ikx)] \right\} \times \\ &\times \int_0^1 d\lambda \exp \left\{ \frac{ig^2\lambda}{2} \int d^4k D^{\alpha\beta}(k) \left[\sum_{i=1,2} \overline{j_\alpha^{(i)}(k; p_i, q_i) j_\beta^{(i)}(-k; p_i, q_i)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda \exp [ik(x_1 - x_2)] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \overline{j_\alpha^{(1)}(k; p_1, q_1) j_\beta^{(2)}(-k; p_2, q_2)} + (k \rightarrow -k) \right] \right\}, \quad (92) \end{aligned}$$

где функциональные средние тока и его билинейных комбинаций определены формулами (77) — (79) соответственно.

Амплитуда рождения N квантов векторного поля определяется с помощью вариационных производных по полю A^{ext} :

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2 - \sum_{i=1}^N k_i) f(p_1, p_2; q_1, q_2; k_1, k_2, \dots, k_N) &= \\ &= \prod_{i=1}^N e_\alpha^*(k_i) \frac{\delta}{\delta A_\alpha^{\text{ext}}(k_i)} f(p_1, p_2; q_1, q_2 | A^{\text{ext}}) |_{A^{\text{ext}}=0} = \\ &= g^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \exp [ix_1(p_1 - q_1) + ix_2(p_2 - q_2)] \times \\ &\quad \times \prod_{i=1}^N e_\alpha^*(k_i) [\overline{j_\alpha^{(1)}}(k_i; p_1, q_1) \exp(ik_i x_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \overline{j_{\alpha}^{(2)}}(k_i; p_2, q_2) \exp(ik_i x_2)] (p_1 + q_1)_\sigma (p_2 + q_2)_\rho \times \\
 & \times D^{\sigma\rho}(x_1 - x_2) \int_0^1 d\lambda \exp\left\{\frac{ig^2\lambda}{2} \int d^4k D^{\mu\delta}(k) \times \right. \\
 & \times \left[\sum_{i=1,2} \overline{j_{\mu}^{(i)}}(-k; p_1, q_1) j_{\delta}^{(i)}(k; p_2, q_2) + \right. \\
 & \left. \left. + \overline{\lambda j_{\mu}^{(1)}}(k; p_1, q_1) f_{\delta}^{(2)}(-k; p_2, q_2) \exp[-ik(x_1 - x_2)] + (k \rightarrow -k) \right] \right\}, \quad (93)
 \end{aligned}$$

где $e_{\alpha}(k)$ — поляризационный вектор мезона с импульсом k .

В дальнейшем будем интересоваться случаем, когда рожденные мезоны удовлетворяют условию «мягкости»:

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^N k_{0i} \ll 1, \quad \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_{i\perp} \right| \ll |\mathbf{p}_{1\perp} - \mathbf{q}_{1\perp}| \approx |\mathbf{p}_{2\perp} - \mathbf{q}_{2\perp}|, \quad (94)$$

где компоненты импульсов частиц заданы в системе центра инерции $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$, причем импульсы начальных нуклонов выбраны вдоль оси z . При этих условиях амплитуда рождения N мезонов факторизуется и ее можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{inel}}(N) & \equiv f(p_1, p_2; q_1, q_2; k_1, k_2, \dots, k_N) = \\
 & = f_{e1} \prod_{i=1}^{n_1} g e_{i\alpha}^*(k_i) \overline{j_{\alpha}^{(1)}}(k_i; p_1, q_1) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^{n_2} g e_{i\beta}^*(k'_i) \overline{j_{\beta}^{(2)}}(k'_i; p_2, q_2), \quad (95)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \overline{j_{\alpha}^{(i)}}(k; p_i, q_i) & = \left(\frac{2p_i + k}{2p_i k + k^2} - \frac{2q_i - k}{2q_i k - k^2} \right)_{\alpha}, \quad i = 1, 2; \\
 t = \Delta^2 & = (q_1 - p_1 + \sum_{i=1}^{n_1} k_i)^2 = (q_2 - p_2 + \sum_{i=1}^{n_2} k'_i)^2, \quad n_1 + n_2 = N. \quad (96)
 \end{aligned}$$

Дифференциальное сечение рождения N мезонов в столкновении двух нуклонов определяется выражением

$$\begin{aligned}
 d\sigma_N & = \frac{1}{2\sqrt{s}(s-4m^2)} |f_{\text{inel}}(N)|^2 (2\pi)^4 \times \\
 & \times \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2 - \sum_{i=1}^N k_i) \times \\
 & \times \frac{1}{(2\pi)^6} \cdot \frac{dq_1 dq_2}{2q_{10} \cdot 2q_{20}} \cdot \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \frac{dk_i}{2k_{0i}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3}, \quad (97)
 \end{aligned}$$

где $s = (p_1 + p_2)^2$.

Используя (97), после преобразования

$$\begin{aligned} & \delta \left(p_1 + p_2 - q_1 - q_2 - \sum_{i=1}^{n_1} k_i - \sum_{l=1}^{n_2} k'_l \right) = \\ & = \int d^4\Delta \delta \left(p_1 - q_1 - \sum_{i=1}^{n_1} k_i + \Delta \right) \delta \left(p_2 - q_2 - \sum_{l=1}^{n_2} k'_l - \Delta \right) \end{aligned} \quad (98)$$

можно представить дифференциальное сечение рождения мезонов в следующем виде [4]:

$$(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{n_1, n_2} \xrightarrow[\Delta\text{-фикс}]{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2s} \cdot \frac{d^4\Delta}{(2\pi)^4} |f_{e1}(s, t)|^2 W_{n_1}(p_1, \Delta) W_{n_2}(p_2, -\Delta), \quad (99)$$

где

$$\begin{aligned} W_{n_1}(p_1, \Delta) &= \frac{2\pi}{n_1!} \int \frac{d^4q_1}{2q_{10}} \delta \left(p_1 - q_1 - \sum_{i=1}^{n_1} k_i + \Delta \right) \times \\ & \times \prod_{i=1}^{n_1} \frac{dk_i}{2k_{0i}} \cdot \frac{(-g^2)}{(2\pi)^3} |j_{\alpha}^{(1)}(k; p_1, q_1)|^2 \end{aligned} \quad (100)$$

и аналогичное выражение для $W_{n_2}(p_2, -\Delta)$.

Величины $W_{n_1}(p_1, \Delta)$ и $W_{n_2}(p_2, -\Delta)$ зависят от переменных

$$t = \Delta^2, \quad v_1 = p_1\Delta \quad \text{и} \quad t = \Delta^2, \quad v_2 = -p_2\Delta. \quad (101)$$

соответственно.

Используя переменные (101), преобразуем элемент объема $d^4\Delta$ к следующему виду:

$$d^4\Delta = \frac{4\pi}{\sqrt{s(s-4m^2)}} dt dv_1 dv_2 \frac{d\Phi}{2\pi}, \quad (102)$$

где Φ — азимутальный угол, причем физическая область переменных интегрирования определяется неравенствами

$$\begin{aligned} -t &\leq 2v_i \leq s, \quad i = 1, 2; \\ -s &\leq t \leq 0, \quad m^2 \ll s. \end{aligned} \quad (103)$$

В дальнейшем будем интересоваться дифференциальным сечением $(\frac{d\sigma}{dt})_{n_1, n_2}$ в пределе $s \rightarrow \infty$ и при фиксированном t . Интегрируя выражение (100) по dv_1 и dv_2 и используя формулу (87), получаем при $|t/m^2| \ll g^2$

$$(\frac{d\sigma}{dt})_{n_1, n_2} \xrightarrow[\text{t-фикс}]{s \rightarrow \infty} (1/4\pi) v^2(t) w_{n_1}(s, t) w_{n_2}(s, t), \quad (104)$$

где

$$w_n(s, t) = \frac{\exp(at)}{\pi} \int d\nu W_n(t, \nu) = \\ = \exp(at) \frac{1}{n!} \int_{\Omega_p} \prod_{i=1}^n \frac{d\mathbf{k}_i}{2k_{0i}} \cdot \frac{(-g^2)}{(2\pi)^3} |\overline{j_\alpha^{(l)}}(k_i, p_l, q_l)|^2, \quad l=1, 2. \quad (105)$$

Область интегрирования Ω_p по импульсам вторичных мезонов определяется условием

$$-t \leq 2p \sum_{i=1}^n k_i - (\Delta - \sum_{i=1}^n k_i)^2 \leq s \quad (106)$$

или же, принимая во внимание, что в нашем случае $(\Delta - \sum_{i=1}^n k_i)^2 \approx \approx \Delta^2$, условием

$$0 \leq 2p \sum_{i=1}^n k_i \leq s + t. \quad (107)$$

Рассмотрим теперь приближение, в котором можно пренебречь суммарным импульсом испущенных мезонов в соответствии с условием «мягкости» (94). В этом приближении выражение (105) принимает вид распределения Пуассона [25]:

$$w_n(s, t) = \frac{1}{n!} \exp(at) [\bar{n}(s, t)]^n, \quad (108)$$

где*

$$\bar{n}(s, t) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2k_0} |\overline{j_\alpha^{(l)}}(k; p, q)|^2, \quad l=1, 2 \quad (109)$$

среднее число частиц, рожденных в столкновении двух нуклонов при высоких энергиях $s \rightarrow \infty$ и фиксированных t .

Используя формулу (96) для $\overline{j_\alpha}$, найдем при $|t| \ll g^2 m^2$, что

$$\bar{n}(s, t) = -bt. \quad (110)$$

Величина b зависит от выбранного способа обрезания сверху интегралов по импульсам испущенных мезонов. В частности, при условиях $R_\perp^2 \sim m^2$; $1 \gg \alpha^2 \gg \mu^2/m^2$, где $\alpha = R_z/p_0$, получим

$$b = [2g^2/(3(2\pi)^2 m^2)] [\ln(m^2/\mu^2) + 1/2 + O(\mu/m)], \quad (111)$$

что совпадает с удвоенным параметром наклона дифракционной экспоненты (86). Отметим также, что равенство $2a = b$ имеет место в инфракрасном асимптотическом пределе $\mu \rightarrow 0$. В этом случае при суммировании в выражении (104) по числу всех испу-

* Интегрирование в формуле (109) эффективно ограничено условиями $|k_z| \leq R_z$, $|k_\perp| \leq R_\perp$.

щенных мезонов зависимость от переменной t сокращается, что приводит к исчезновению дифракционного пика в дифференциальном сечении. Подобная закономерность была отмечена в работе [19] и имеет аналогию с автомоделным поведением глубоко неупругих процессов взаимодействия адронов при высоких энергиях [17, 18].

3. НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ В РАМКАХ МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Выше были изучены некоторые приложения приближения прямолинейных путей в его простой форме. Грубо говоря, использовалось приближение $\int [\delta v] \exp F \approx \exp \left(\int [\delta v] F \right)$ или даже $\exp (F_{v=0})$. Другими словами, предполагалось, что при рассеянии частиц в асимптотической области высоких энергий и ограниченных передач импульса в фейнмановском интеграле по путям главный вклад дают лишь пути, наименее отклоняющиеся от классических траекторий частиц.

Ниже рассмотрим ряд систем приближения, являющихся различными математическими реализациями физической концепции прямолинейных путей в рамках метода функционального интегрирования. Отметим, что методы теории меры и интегрирования в функциональных пространствах широко используются в последнее время в работах по квантовой теории поля. Подход этот основан на представлении решений точных уравнений теории в виде функциональных интегралов. Однако из-за отсутствия развитой техники вычисления общих квадратур функциональные интегралы являются «вещью в себе» в том смысле, что извлечение необходимой информации возможно лишь в рамках той или иной аппроксимационной процедуры.

Наиболее просты и известны такие аппроксимационные процедуры, при которых на каждом этапе вычислений имеем дело лишь с гауссовыми квадратурами. Именно к этому виду аппроксимаций относятся уже обсуждавшееся выше приближение $k_i k_j = 0$ и приближение прямолинейных путей. Развиваемые ниже аппроксимационные процедуры восходят идейно к концепции прямолинейных путей и позволяют, в частности, дать последовательную оценку эффектов отклонения путей частиц от прямолинейных траекторий в процессах рассеяния при высоких энергиях.

Формулировка приближений. Рассмотрим функциональный интеграл по гауссовой мере

$$\int \frac{\delta v}{\text{const}} \exp \left[-i \int d\xi v^2(\xi) \right] \exp (g \pi [v]), \quad (112)$$

где $\pi [v]$ — некий функционал, а const обозначает нормировочную постоянную. Как известно, вычисление (112) можно свести к нахождению функциональных производных в соответствии с формулой

$$\int [\delta v] \exp (g\pi [v]) = \exp \left\{ \frac{1}{4i} \int d\xi \frac{\delta^2}{\delta v^2 (\xi)} \right\} \exp (g\pi [v]) \Big|_{v=0}. \quad (113)$$

Кроме того, в некоторых задачах квантовой теории поля (см., например, [31]) требуется определить действие дифференциального оператора

$$\exp \left\{ \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta v^2} \right\},$$

где
$$\int D \frac{\delta^2}{\delta v^2} = \int d\xi_1 d\xi_2 D (\xi_1, \xi_2) \frac{\delta^2}{\delta v (\xi_1) \delta v (\xi_2)};$$

$D (\xi_1, \xi_2)$ — функция типа пропагатора. Имея в виду дальнейшие приложения, объединим обе задачи следующим образом. Требуется найти функционал $\Pi [v]$ из соотношения

$$\exp (\Pi [v]) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta v^2} \right\} \exp (g\pi [v]) \equiv \overline{\exp (g\pi [v])}, \quad (114)$$

где $\pi [v]$ — заданный функционал; D — функция двух переменных. В случае, когда

$$D = -\delta (\eta_1 - \eta_2) / 2, \quad (115)$$

значение функционала $\Pi [v]$ при $v = 0$ определяет согласно формуле (113) функциональный интеграл. Для упрощения записи действие дифференциального оператора будет обозначаться в некоторых случаях знаком усреднения, как в (114).

Для наглядности введем графические обозначения

$$\begin{aligned} \pi [v] &\Rightarrow \bigcirc, & \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta v^2} \pi &\Rightarrow \bigcirc \text{ с завитком}, \\ \exp \left\{ \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta v^2} \right\} \pi [v] = \overline{\pi} &\Rightarrow \bigcirc \text{ с диагональными линиями}. \end{aligned} \quad (116)$$

В этих обозначениях, например:

$$\frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta v^2} \pi^2 [v] \Rightarrow 2 \left(\bigcirc \text{ с завитком} \bigcirc + \bigcirc \text{ с завитком} \bigcirc \right),$$

где первые два члена в обычной терминологии будем называть несвязными графами. Подчеркнем, что хотя графы (116) и имеют очевидную аналогию с графами Фейнмана, во многих случаях их внешний вид не будет иметь ничего общего с обычными фейнмановскими диаграммами.

Предположим теперь, что структура функционала $\pi [v]$ такова, что имеется параметр малости, связанный с петлей. В этом случае существует аппроксимационная процедура, которую мы назовем корреляционной и согласно которой ищем функционал $\Pi [v]$ в виде ряда

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \Pi_n. \tag{117}$$

Подставляя это выражение в (109), немедленно получаем

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \overline{\pi} & \Rightarrow & \text{---} \bigcirc \text{---}, \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2!} (\overline{\pi}^2 - \overline{\pi}^2) & \Rightarrow & \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \\ \Pi_3 &= \frac{1}{3!} [\overline{\pi}^3 - \overline{\pi}^3 - 3\overline{\pi}(\overline{\pi}^2 - \overline{\pi}^2)] & \Rightarrow & \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \\ & & & + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots, \end{aligned} \tag{118}$$

Рассматривая графики (118), убеждаемся, что корреляционный метод действительно соответствует разложению по числу петель, причем в Π_n дает вклад лишь связанная часть суммы всех графов с n петлями.

Обрывая ряд (117), получаем приближенное выражение для функционала Π . Это приближение справедливо, если для любых $n \geq 2$ выполняется неравенство

$$\overline{\pi^n} |_{\text{связная часть}} \ll \overline{\pi^n} |_{\text{несвязная часть}}. \tag{119}$$

В этом случае при разложении $\exp \Pi$ в ряд по степеням g учет лишь Π_1 дает главные члены в каждом порядке, доучет Π_2 — поправки к ним и т. д.

С корреляционной процедурой тесно связано разложение вида

$$\overline{\exp(g\pi)} = \exp(g\overline{\pi}) \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \overline{(\pi - \overline{\pi})^n} \right]. \tag{120}$$

Такое разложение встречалось в работах [1, 5]. Оно имеет в общем ту же область применимости, что и корреляционное приближение, и отличается от него тем, что дает меньшее число поправочных членов в каждом порядке по g . Однако высшие поправочные члены в корреляционном разложении имеют, на наш взгляд, более простой геометрический смысл [см. (118)], что облегчает в некоторой степени его использование.

Как было выше отмечено, рассмотренные приближения хороши, когда существует параметр малости, связанный с петлей. Может случиться и так, что в теории имеется малый параметр, связанный с линией, т. е. возникающий при варьировании функционала $\pi [v]$. Тогда возможно провести разложение по числу линий, соединяющих разные петли. Представляя π в виде

$$\pi [v] = \int d\eta \tilde{\pi} [\eta] \exp \left[-i \int \eta(\xi) v(\xi) d\xi \right] \quad (121)$$

и подставляя (121) в соотношение (120), получаем

$$\begin{aligned} \exp (\Pi_{\varepsilon} [v]) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int \prod_{j=1}^n \{\delta \eta_j \tilde{\pi} [\eta_j]\} \times \\ &\times \exp \left[-i \int v \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \right) - \frac{i}{2} \int D \left(\sum_{j=1}^n \eta_j^2 \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[-i \varepsilon \int D \left(\sum_{i < j} \eta_i \eta_j \right) \right], \end{aligned} \quad (122)$$

где членам с разными η приписан параметр малости ε , причем $\Pi [v] = \Pi_{\varepsilon} [v]$ при $\varepsilon = 1$.

Функционал $\Pi_{\varepsilon} [v]$ ищем в виде:

$$\Pi_{\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Pi_{n+1}. \quad (123)$$

Ограничиваясь лишь несколькими первыми членами ряда (123), приходим к приближению, которое назовем $\eta_i \eta_j$ -приближением.

Вычисления приводят к следующим выражениям для первых членов

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= g \overline{\pi} \Rightarrow \text{шарик} , \\ \Pi_2 &= \frac{i g^2}{2} \int D \left(\frac{\delta \overline{\pi}}{\delta v} \right)^2 \Rightarrow \text{два шарика, соединенных линией} , \\ \Pi_3 &= \frac{g^2}{2i} \int D_{13} D_{24} \frac{\delta^2 \overline{\pi}}{\delta v_1 \delta v_2} \left(\frac{1}{2i} \cdot \frac{\delta^2 \overline{\pi}}{\delta v_3 \delta v_4} + \right. \\ &+ g \frac{\delta \overline{\pi}}{\delta v_3} \cdot \frac{\delta \overline{\pi}}{\delta v_4} \left. \right) \Rightarrow \text{два шарика, соединенных линией, и три шарика, соединенных линией} , \end{aligned} \quad (124)$$

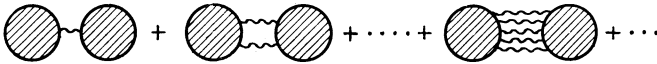
где цифры означают порядок свертки, т. е.

$$\int D_{13} D_{24} \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta v_1 \delta v_2} \cdot \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta v_3 \delta v_4} \equiv \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \times \\ \times D(\xi_1, \xi_2) D(\xi_2, \xi_4) \times \\ \times \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta v(\xi_1) \delta v(\xi_2)} \cdot \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta v(\xi_3) \delta v(\xi_4)} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, действительно получим разложение по числу линий, соединяющих разные петли. Так как мы имеем дело со связными графами, числа таких линий k и петель n связаны неравенством

$$k \geq n - 1. \quad (125)$$

Это ведет к тому, что сумма первых n членов $\eta_i \eta_j$ -приближения содержится в аналогичной сумме корреляционного приближения, т. е. область применимости первого из них не шире, чем второго. Применение его, однако, может существенно упростить выкладки, так как при этом нет необходимости иметь дело с суммой



Первые члены во всех рассмотренных приближениях совпадают, а различия появляются лишь при вычислении поправок. Это обстоятельство является отражением того факта, что рассмотренные методы в применении к вычислению высокоэнергетической амплитуды рассеяния представляют различные варианты приближения прямолинейных путей.

Поправки к эйкональной формуле. Рассмотрим применение развитых выше методов для конкретного примера размера амплитуды рассеяния двух скалярных нуклонов в модели $L_{\text{int}} = g:\psi^+\psi\phi:$, которую в пренебрежении радиационными поправками и вкладами поляризации вакуума можно представить [5] в виде:

$$f_{e1}(p_1, p_2; q_1, q_2) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4x D(x) \exp[-ix(p_1 - q_1)] \int_0^1 d\lambda \times \\ \times S_\lambda(x; p_1, p_2; q_1, q_2) + (q_1 \leftrightarrow q_2), \quad (126)$$

где

$$S_\lambda = \int [\delta v_1]_{-\infty}^{\infty} [\delta v_2]_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ ig^2 \lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\tau D \left[-x + 2\xi a_1(\xi) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\tau a_2(\tau) - 2 \int_{-\xi}^0 d\eta v_1(\eta) + \right. \right.$$

$$+ 2 \int_{-\tau}^0 d\eta v_2(\eta) \Big] \Big\}^{\text{def}} = \int [\delta v_1]_{-\infty}^{\infty} [\delta v_2]_{-\infty}^{\infty} \exp(i g^2 \lambda \pi); \quad (127)$$

$$a_{1,2}(\xi) = p_{1,2} \vartheta(\xi) + q_{1,2} \vartheta(-\xi). \quad (128)$$

Будем искать асимптотику функционального интеграла S_λ при больших энергиях $s = (p_1 + p_2)^2$ и фиксированных передачах импульсов $t = (p_1 - q_1)^2$. Проведенные вычисления показывают, что в этом случае с петлями связан параметр $1/s$, а с линиями * — $1/\sqrt{s}$, поэтому с учетом соотношения (125) в n -м порядке по g^2 для величины S_λ при фиксированном $x \neq 0$ главный член будет иметь асимптотику $1/s^n$, а следующая поправка $1/s^n \sqrt{s}$. Таким образом, если необходимо вычислить лишь два первых асимптотических члена в каждом порядке по g^2 , удобно применить $\eta_i \eta_j$ -приближение, обобщенное для двух функциональных переменных v_1 и v_2 , причем достаточно использовать приближение $\exp \Pi_2 = 1 + \Pi_2 + \dots$ по типу разложения (120). Итак, приближенная формула для S_λ имеет вид:

$$S_\lambda \approx \exp(i g^2 \lambda \bar{\pi}) \left[1 + \frac{i \lambda^2 g^4}{4} \int d\xi \sum_{i=1,2} \left(\frac{\delta \bar{\pi}}{\delta v_i(\eta)} \right)^2 \right] \Big|_{v=0}. \quad (129)$$

Исходя из формулы (127) для S_λ , получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \bar{\pi} \Big|_{v=0} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k D(k) \exp(-ikx) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\tau \exp\{2ik [\xi a_1(\xi) - \tau a_2(\tau)]\} \times \\ &\times \exp[ik^2 (|\xi| + |\tau|)] = \frac{1}{(2\pi)^4 s} \int d^4 k D(k) \exp(-ikx) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\tau \exp\{2ik [\xi a_1(\xi)/\sqrt{s} - \tau a_2(\tau)/\sqrt{s}]\} \times \\ &\times \exp\left[i \frac{k^2}{\sqrt{s}} (|\xi| + |\tau|)\right]. \end{aligned} \quad (130)$$

В этой формуле была проведена замена переменных $\xi, \tau \rightarrow \xi/\sqrt{s}, \tau/\sqrt{s}$.

* Напомним, что речь идет о петлях и линиях, определяемых правилами (116).

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{i\lambda^2 g^4}{4} \int d\eta \left[\left(\frac{\delta \bar{\pi}}{\delta v_1(\eta)} \right)^2 + \left(\frac{\delta \bar{\pi}}{\delta v_2(\eta)} \right)^2 \right] \Big|_{v=0} = \\
 & = -\frac{i\lambda^2 g^4}{(2\pi)^8 s^2} \int d^4 k_1 d^4 k_2 D(k_1) D(k_2) \exp[-ix(k_1 + k_2)] (k_1 k_2) \times \\
 & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\tau_1 d\xi_2 d\tau_2 \exp \left\{ 2ik_1 \left[\xi_1 \frac{a_1(\xi_1)}{\sqrt{s}} - \tau_1 \frac{a_2(\tau_1)}{\sqrt{s}} \right] + \right. \\
 & \quad + i \frac{k_1^2}{\sqrt{s}} (|\xi_1| + |\tau_1|) \left. \right\} \exp \left\{ 2ik_2 \left[\xi_2 \frac{a_1(\xi_2)}{\sqrt{s}} - \tau_2 \frac{a_2(\tau_2)}{\sqrt{s}} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + i \frac{k_2^2}{\sqrt{s}} (|\xi_2| + |\tau_2|) \right\} \frac{1}{\sqrt{s}} [\Phi(\xi_1, \xi_2) + \Phi(\tau_1, \tau_2)], \quad (131)
 \end{aligned}$$

где

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \vartheta(\xi_1, \xi_2) [|\xi_1| \vartheta(|\xi_2| - |\xi_1|) + |\xi_2| \vartheta(|\xi_1| - |\xi_2|)]. \quad (132)$$

Найдем теперь асимптотику выражений (130) и (131) при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t . Выражение (130) необходимо при этом вычислить с точностью до членов $O(1/s^2)$, а (131) с точностью $O(1/s^3)$. Для этого перейдем к системе центра инерции и направим ось z вдоль импульсов налетающих частиц. Тогда

$$\left. \begin{aligned}
 p_{1,2} &= \left\{ \frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, \pm \frac{\sqrt{s-4m^2}}{2} \right\}; \\
 q_{1,2} &= \left\{ \frac{\sqrt{s}}{2}, \pm \Delta_{\perp} \sqrt{1 + \frac{t}{s-4m^2}}, \pm \frac{\sqrt{s-4m^2}}{2} \left(1 + \frac{2t}{s-4m^2} \right) \right\}; \\
 \Delta_{\perp}^2 &= -t,
 \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

и, подставляя (133) в (128), получаем при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{a_1(\xi)}{\sqrt{s}} &\approx \frac{1}{2} n^+ + \frac{\Delta_{\perp}}{\sqrt{s}} \vartheta(-\xi) + O\left(\frac{1}{s}\right); \\
 \frac{a_2(\xi)}{\sqrt{s}} &\approx \frac{1}{2} n^- - \frac{\Delta_{\perp}}{\sqrt{s}} \vartheta(-\xi) + O\left(\frac{1}{s}\right); \\
 n^{\pm} &= (1, 0, 0, \pm 1).
 \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Используя (134), получаем асимптотические выражения для (130) и (131). Именно:

$$\begin{aligned}
 \bar{\pi} &= \frac{1}{(2\pi)^4 s} \int d^4 k D(k) \exp(-ikx) \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\tau \exp[i\xi(k_0 - k_z) - i\tau(k_0 + k_z)] \times \\
 &\times \left\{ 1 - 2i \frac{\mathbf{k}_\perp \Delta_\perp}{\sqrt{s}} [\xi \vartheta(-\xi) + \tau \vartheta(-\tau)] + \right. \\
 &+ \frac{ik^2}{\sqrt{s}} (|\xi| + |\tau|) \left. \right\} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \approx -\frac{1}{8\pi^2 s} \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{\mathbf{k}_\perp^2 + \mu^2} \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{x}_\perp) + \\
 &+ \frac{i\Delta_\perp}{s \sqrt{s} 8\pi^2} [(x_0 + x_z) \vartheta(-x_0 - x_z) + (x_z - x_0) \vartheta(x_0 - x_z)] \times \\
 &\times \int d^2 \mathbf{k}_\perp \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{x}_\perp) \frac{\mathbf{k}_\perp}{\mathbf{k}_\perp^2 + \mu^2} + \frac{i}{16\pi^2 s \sqrt{s}} (|x_0 + x_z| + |x_0 - x_z|) \times \\
 &\times \int d^2 \mathbf{k}_\perp \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{x}_\perp) \frac{\mathbf{k}_\perp}{\mathbf{k}_\perp^2 + \mu^2} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \\
 &= -\frac{1}{4\pi s} K_0(\mu |\mathbf{x}_\perp|) - \frac{\mu}{4\pi s \sqrt{s}} \frac{\Delta_\perp \mathbf{x}_\perp}{|\mathbf{x}_\perp|} \times \\
 &\times [(x_0 + x_z) \vartheta(-x_0 - x_z) + (x_z - x_0) \vartheta(x_0 - x_z)] \times \\
 &\times K_1(\mu |\mathbf{x}_\perp|) - \frac{i\mu^2}{8\pi s \sqrt{s}} (|x_0 + x_z| + |x_0 - x_z|) \times \\
 &\times K_0(\mu |\mathbf{x}_\perp|) + O\left(\frac{1}{s^2}\right); \quad (135)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{i\lambda^2 g^4}{4} \int d\eta \left[\left(\frac{\delta\bar{\pi}}{\delta v_1(\eta)} \right)^2 + \left(\frac{\delta\bar{\pi}}{\delta v_2(\eta)} \right)^2 \right] \Big|_{v=0} \approx \\
 &\approx -\frac{i\lambda^2 g^4}{(2\pi)^8 s^2 \sqrt{s}} \int d^4 k_1 d^4 k_2 D(k_1) D(k_2) \exp[-ix(k_1 + k_2)] (k_1 k_2) \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\tau_1 d\xi_2 d\tau_2 \exp[i\xi_1(k_{10} - k_{1z}) - i\tau(k_{10} + k_{1z})] \times \\
 &\times \exp[i\xi_2(k_{20} - k_{2z}) - i\tau_2(k_{20} + k_{2z})] [\Phi(\xi_1, \xi_2) + \Phi(\tau_1, \tau_2)] + O\left(\frac{1}{s^3}\right) = \\
 &= -\frac{i\lambda^2 g^4 \mu^2}{32\pi^2 s^2 \sqrt{s}} (|x_0 + x_z| + |x_0 - x_z|) K_1^2(\mu |\mathbf{x}_\perp|). \quad (136)
 \end{aligned}$$

В этих формулах считаем $|\mathbf{x}_\perp| \neq 0$, что обеспечивает сходимость всех интегралов. Функции K_0 и K_1 являются функциями Мак-Дональда нулевого и первого порядка и определяются выраже-

ниями

$$K_0(\mu | \mathbf{x}_\perp |) = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \mathbf{k}_\perp \frac{\exp(i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp |)}{k_\perp^2 + \mu^2}; \quad K_1(\mu | \mathbf{x}_\perp |) = -\frac{\partial K_0(\mu | \mathbf{x}_\perp |)}{\partial (\mu | \mathbf{x}_\perp |)}.$$

Теперь подставляем (135) и (136) в (129) и получаем для S_λ искомого формулу [15]:

$$\begin{aligned} S_\lambda \approx \exp \left[-\frac{ig^2\lambda}{4\pi s} K_0(\mu | \mathbf{x}_\perp |) \right] & \left\{ 1 - \frac{ig^2\lambda\mu}{4\pi s \sqrt{s}} \cdot \frac{\Delta_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}{|\mathbf{x}_\perp|} \times \right. \\ & \times [(x_0 + x_z) \vartheta(-x_0 - x_z) + (x_z - x_0) \vartheta(x_0 - x_z)] K_1(\mu | \mathbf{x}_\perp |) + \\ & + \frac{g^2\lambda\mu^2}{8\pi s \sqrt{s}} (|x_0 + x_z| + |x_0 - x_z|) K_0(\mu | \mathbf{x}_\perp |) - \\ & \left. - \frac{ig^4\lambda^2\mu^2}{32\pi^2 s^2 \sqrt{s}} (|x_0 + x_z| + |x_0 - x_z|) K_1^2(\mu | \mathbf{x}_\perp |) \right\}. \quad (137) \end{aligned}$$

В этом выражении множитель перед фигурной скобкой соответствует эйкональному поведению амплитуды рассеяния, а члены в скобке определяют поправки относительной величины $1/\sqrt{s}$.

Как известно из исследования амплитуды рассеяния в рамках диаграммной техники Фейнмана, высокоэнергетическая асимптотика может содержать лишь логарифмы и целые степени s . Аналогичное явление наблюдается и здесь, ибо интегрирование выражения (137) для величины S_λ в соответствии с формулой (126) приводит к исчезновению коэффициентов при полудельных степенях s . Тем не менее учет членов, содержащих полудельные степени s , необходим для вычисления следующих поправок в амплитуде рассеяния. Интересно отметить появление в поправочных членах зависимости от x_0 и x_z , т. е. возникновение так называемых эффектов запаздывания, отсутствующих в главном асимптотическом члене.

Проводя аналогичные вычисления, можно убедиться, что все последующие члены достаточно быстро убывают по сравнению с выписанными. Однако стоит подчеркнуть, что это вовсе не означает доказательства справедливости в очерченных рамках эйконального представления для амплитуды рассеяния. Дело в том, что коэффициентные функции в асимптотическом разложении, выражающиеся через функции Мак-Дональда, сингулярны на малых расстояниях, причем эта сингулярность усиливается по мере роста скорости убывания соответствующего члена при больших s . Следовательно, интегрирование величины S_λ в соответствии с формулой (126) при нахождении амплитуды рассеяния может привести к появлению членов, нарушающих в высших порядках по g^2 эйкональный ряд. На возможность появления таких членов в отдельных порядках теории возмущений в моделях типа φ^3 было указано в работах [6, 36].

Отметим, что в рамках квазипотенциального подхода в квантовой теории поля имеется строгое обоснование эйконоального представления на основе предположения о гладкости локального квазипотенциала. В рассматриваемом примере имеем дело с сингулярным взаимодействием, которое приводит в пренебрежении радиационными эффектами к квазипотенциалу юкавского типа, требующему особой осторожности.

4. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД И ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ

Формулировка операторного метода. Рассмотрим квазипотенциальное уравнение с локальным квазипотенциалом для амплитуды рассеяния скалярных частиц

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; s) = gV(\mathbf{p} - \mathbf{p}'; s) + g \int d\mathbf{q} K(\mathbf{q}^2; s) V(\mathbf{p} - \mathbf{q}; s) T(\mathbf{q}, \mathbf{p}'; s), \quad (138)$$

где \mathbf{p} и \mathbf{p}' — относительные импульсы частиц в системе центра инерции в начальном и конечном состояниях: $s = 4(\mathbf{p}^2 + m^2) = 4(\mathbf{p}'^2 + m^2)$.

Для решения уравнения (138) сделаем фурье-преобразование:

$$V(\mathbf{p} - \mathbf{p}'; s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \exp[i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{r}] V(\mathbf{r}; s); \quad (139)$$

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; s) = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\mathbf{p}'\mathbf{r}') T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s). \quad (140)$$

Подставляя (139) и (140) в (138), получаем

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = & \frac{g}{(2\pi)^3} V(\mathbf{r}; s) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \\ & + \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} K(\mathbf{q}^2; s) V(\mathbf{r}; s) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) \times \\ & \times \int d\mathbf{r}'' \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}'') T(\mathbf{r}', \mathbf{r}''; s). \end{aligned} \quad (141)$$

Вводя представление

$$T(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = \frac{g}{(2\pi)^3} V(\mathbf{r}; s) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s), \quad (142)$$

имеем

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = & \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} K(\mathbf{q}^2; s) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) \times \\ & \times \int d\mathbf{r}'' \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}'') V(\mathbf{r}''; s) F(\mathbf{r}', \mathbf{r}''; s). \end{aligned} \quad (143)$$

Определим псевдодифференциальный оператор

$$\hat{L}_r = K(-\nabla_r^2; s), \quad (144)$$

тогда

$$K(\mathbf{r}; s) = \int d\mathbf{q} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) K(\mathbf{q}^2; s) = \hat{L}_r (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{r}). \quad (145)$$

С учетом соотношения (145) уравнение (143) можно переписать в символической форме

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + g\hat{L}_r [V(\mathbf{r}; s) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s)]. \quad (146)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \exp[W(\mathbf{r}; \mathbf{k}; s)] \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]. \quad (147)$$

Подставляя (147) в (146), получаем уравнение для функции $\exp[W(\mathbf{r}; \mathbf{k}; s)] =$

$$= 1 + g\hat{L}_r \{V(\mathbf{r}; s) \exp[W(\mathbf{r}; \mathbf{k}; s) - i\mathbf{k}\mathbf{r}] \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\}. \quad (148)$$

Используя идею модифицированной теории возмущений в экспоненте [21], функцию $W(\mathbf{r}; \mathbf{k}; s)$ запишем в виде разложения в ряд по константе связи g

$$W(\mathbf{r}; \mathbf{k}; s) = \sum_{n=1}^{\infty} g^n W_n(\mathbf{r}; \mathbf{k}; s). \quad (149)$$

Тогда из уравнения (148) следуют выражения для функций

$$W_1(\mathbf{r}; \mathbf{k}; s) = \int d\mathbf{q} V(\mathbf{q}; s) K[(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2; s] \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}); \quad (150)$$

$$\begin{aligned} W_2(\mathbf{r}; \mathbf{k}; s) = & -\frac{W_1^2(\mathbf{r}; \mathbf{k}; s)}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \exp(-i\mathbf{q}_1\mathbf{r} - i\mathbf{q}_2\mathbf{r}) \times \\ & \times V(\mathbf{q}_1; s) V(\mathbf{q}_2; s) K[(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{k})^2; s] \times \\ & \times \{K[(\mathbf{q}_1 + \mathbf{k})^2; s] + K[(\mathbf{q}_2 + \mathbf{k})^2; s]\} \end{aligned} \quad (151)$$

и т. д.

Ограничиваясь рассмотрением лишь W_1 вместо W в формуле (147), получаем из (147), (142) и (140) следующее приближенное выражение для амплитуды рассеяния [32]

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; s) = & \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \exp[i(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\mathbf{r}] \times \\ & \times V(\mathbf{r}; s) \exp[gW_1(\mathbf{r}; \mathbf{p}; s)]. \end{aligned} \quad (152)$$

Чтобы пояснить смысл сделанного приближения, разложим T_1 в ряд по константе связи g :

$$T_1^{(n+1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; s) = \frac{g^{n+1}}{n!} \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_n V(\mathbf{q}_1; s) \dots V(\mathbf{q}_n; s) \times \\ \times V\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i; s\right) \prod_{i=1}^n K[(\mathbf{q}_i + \mathbf{p}')^2; s] \quad (153)$$

и сравним с $(n+1)$ -м итерационным членом точного уравнения (138):

$$T^{(n+1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; s) = \\ = \frac{g^{n+1}}{n!} \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_n V(\mathbf{q}_1; s) \dots V(\mathbf{q}_n; s) \times \\ \times V\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i; s\right) \sum_p K[(\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}')^2; s] \times \\ \times K[(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{p}')^2; s] \dots K\left[\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i + \mathbf{p}'\right)^2; s\right], \quad (154)$$

где \sum_p — сумма по перестановкам импульсов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$.

Из (153) и (154) легко видеть, что сделанное приближение в случае уравнения Липмана — Швингера совпадает с так называемым «приближением $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = 0$ », согласно которому в «нуклонных пропагаторах» отбрасываются члены типа $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j$ ($i \neq j$).

Операторный метод и асимптотическое поведение амплитуды рассеяния. На примере квазипотенциального уравнения Логунова — Тавхелидзе рассмотрим случай, когда полученные ранее выражения для амплитуд рассеяния можно использовать для нахождения асимптотик в области $s \rightarrow \infty$ и при фиксированном t . При этом в асимптотических выражениях будем учитывать наряду с главным и следующий поправочный член, используя формулу

$$\exp[W(\mathbf{r}; \mathbf{p}'; s)] = \\ = \exp[gW_1(\mathbf{r}; \mathbf{p}'; s)] [1 + g^2 W_2(\mathbf{r}; \mathbf{p}'; s) + \dots], \quad (155)$$

где W_1 и W_2 определены соотношениями (150) и (151).

Направим ось z вдоль вектора $(\mathbf{p} + \mathbf{p}')$. Тогда

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \Delta_{\perp}; \quad \Delta_{\perp} n_z = 0; \quad t = -\Delta_{\perp}^2. \quad (156)$$

Учитывая, что

$$K[(\mathbf{q} + \mathbf{p}')^2; s] = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{q} + \mathbf{p}')^2 + m^2}} \cdot \frac{1}{(\mathbf{q} + \mathbf{p}')^2 - \frac{s}{4} + m^2 - i\epsilon} \Big|_{t-\text{фикс}}^{s \rightarrow \infty} = \\ = \frac{2}{s(q_z - i\epsilon)} \left[1 - \frac{3q_z + \mathbf{q}_{\perp}^2 - \mathbf{q}_{\perp} \Delta_{\perp}}{\sqrt{s}(q_z - i\epsilon)} \right] + O\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad (157)$$

из (150) и (151) получаем

$$W_1 = W_{10}/s + W_{11}/(s\sqrt{s}) + O(1/s^2); \quad (158)$$

$$W_2 = W_{20}/(s^2\sqrt{s}) + O(1/s^3), \quad (159)$$

где

$$W_{10} = 2 \int d\mathbf{q} V(\mathbf{q}; s) \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{q_z - i\varepsilon} = 2i \int_z^\infty dz' V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z'^2}; s); \quad (160)$$

$$\begin{aligned} W_{11} &= -2 \int d\mathbf{q} V(\mathbf{q}; s) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{3q_z^2 + \mathbf{q}_\perp^2 - \mathbf{q}_\perp \Delta_\perp}{(q_z - i\varepsilon)^2} = \\ &= -6V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z^2}; s) + 2(\nabla_\perp^2 + i\Delta_\perp \nabla_\perp) \times \\ &\quad \times \int_z^\infty dz' (z - z') V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z'^2}; s); \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} W_{20} &= -4 \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \exp[-i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathbf{r}] V(\mathbf{q}_1; s) V(\mathbf{q}_2; s) \times \\ &\quad \times \frac{3q_{1z}q_{2z} + \mathbf{q}_{1\perp}\mathbf{q}_{2\perp}}{(q_{1z} - i\varepsilon)(q_{2z} - i\varepsilon)(q_{1z} + q_{2z} - i\varepsilon)} = \\ &= -4i \int_z^\infty dz' \left\{ 3V^2(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z'^2}; s) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\nabla_\perp \int_{z'}^\infty dz'' V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z''^2}; s) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (162)$$

Для того чтобы определить искомую асимптотику с указанной степенью точности, достаточно амплитуду рассеяния записать в форме

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; s) &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r}_\perp dz \exp(i\Delta_\perp \mathbf{r}_\perp) V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z^2}; s) \times \\ &\quad \times \exp\left(g \frac{W_{10}}{s}\right) \left(1 + g \frac{W_{11}}{s\sqrt{s}} + g^2 \frac{W_{20}}{s^2\sqrt{s}} + \dots\right). \end{aligned} \quad (163)$$

Тогда, подставляя (160) — (162) в (163), после несложных, но достаточно громоздких выкладок, получаем для гладких потенциалов известное выражение [10]

$$\begin{aligned} T(t, s) &= \frac{s}{(2\pi)^3} \int_{\substack{s \rightarrow \infty \\ t \text{ — фикс}}} d^2\mathbf{r}_\perp \exp(i\Delta_\perp \mathbf{r}_\perp) \times \\ &\quad \exp\left[\frac{2ig}{s} \int_{-\infty}^\infty dz V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z^2}; s)\right] - 1 \\ &\quad \times \frac{}{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{6g^2}{(2\pi)^3 s \sqrt{s}} \int d^2\mathbf{r}_\perp \exp(i\Delta_\perp \mathbf{r}_\perp) \times \\
 & \times \exp \left[\frac{2ig}{s} \int_{-\infty}^{\infty} dz' V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z'^2}; s) \right] \int_{-\infty}^{\infty} dz V^2(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z^2}; s) - \\
 & - \frac{ig}{(2\pi)^3 \sqrt{s}} \int d^2\mathbf{r}_\perp \exp(i\Delta_\perp \mathbf{r}_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} dz \times \\
 & \times \left\{ \exp \left[\frac{2ig}{s} \int_z^{\infty} dz' V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z'^2}; s) \right] - \right. \\
 & - \exp \left[\frac{2ig}{s} \int_{-\infty}^0 dz' V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z'^2}; s) \right] \left. \right\} \left\{ \int_z^{\infty} dz' \nabla_\perp^2 V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z'^2}; s) + \right. \\
 & \left. + \frac{2ig}{s} \left[\int_z^{\infty} dz' \nabla_\perp V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z'^2}; s) \right]^2 \right\} - \\
 & - \frac{ig}{(2\pi)^3 \sqrt{s}} \Delta_\perp^2 \int d^2\mathbf{r}_\perp \exp(i\Delta_\perp \mathbf{r}_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} z dz V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z^2}; s) \times \\
 & \times \exp \left[\frac{2ig}{s} \int_z^{\infty} dz' V(\sqrt{\mathbf{r}_\perp^2 + z'^2}; s) \right]. \quad (164)
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что первый член в этой формуле описывает эйкональное поведение амплитуды рассеяния, а все остальные определяют к нему поправочные члены относительной величины $1/\sqrt{s}$.

Связь операторного метода с методом интегрирования по путям. Чтобы выяснить, какой реальной физической картине могут соответствовать полученные результаты, установим связь операторного метода с фейнмановским методом интегрирования по траекториям. Для этого вернемся к уравнению (148) для функции W . Решение этого уравнения можно записать в символической форме

$$\begin{aligned}
 \exp W &= \frac{1}{1 - gK [(-i\nabla - \mathbf{k})^2] V(\mathbf{r})} \times 1 = \\
 &= -i \int_0^{\infty} d\tau \exp[i\tau(1 + i\epsilon)] \exp\{-i\tau gK [(-i\nabla - \mathbf{k})^2] V(\mathbf{r})\} \times 1. \quad (165)
 \end{aligned}$$

Согласно параметризации Фейнмана [28] введем упорядочивающий индекс η и перепишем (165) в виде:

$$\begin{aligned} \exp W = & -i \int_0^{\infty} d\tau \exp [i\tau (1 + i\varepsilon)] \times \\ & \times \exp \left\{ -ig \int_0^{\tau} d\eta K [(-i\nabla_{\eta+\varepsilon} - \mathbf{k})^2] V(\mathbf{r}_\eta) \right\} \times 1. \end{aligned} \quad (166)$$

Используя фейнмановское преобразование

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{P}(\eta)] = & \int \mathcal{D}\mathbf{p} \int_{\mathbf{x}(0)=0} \mathcal{D} \frac{\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \exp \left\{ i \int_0^{\tau} d\eta \dot{\mathbf{x}}(\eta) [\mathbf{p}(\eta) - \mathbf{P}(\eta)] \right\} \mathcal{F}[\mathbf{p}(\eta)], \end{aligned} \quad (167)$$

решение уравнения (148) запишем в виде функционального интеграла

$$\begin{aligned} \exp W = & -i \int_0^{\infty} d\tau \exp [i\tau (1 + i\varepsilon)] \int \mathcal{D}\mathbf{p} \int_{\mathbf{x}(0)=0} \mathcal{D} \frac{\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \exp \left[i \int_0^{\tau} d\eta \dot{\mathbf{x}}(\eta) \mathbf{p}(\eta) \right] G(\mathbf{x}; \mathbf{p}; \tau) \times 1. \end{aligned} \quad (168)$$

В этой формуле

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}; \mathbf{p}; \tau) = & \exp \left[- \int_0^{\tau} d\eta \dot{\mathbf{x}}(\eta) \nabla_{\eta+\varepsilon} \right] \times \\ & \times \exp \left\{ -ig \int_0^{\tau} d\eta K [(\mathbf{p}(\eta) - \mathbf{k})^2] V(\mathbf{r}_\eta) \right\} \end{aligned} \quad (169)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\tau} = & \left\{ -igK [(\mathbf{p}(\tau) - \mathbf{k})^2] V(\mathbf{r}) - \dot{\mathbf{x}}(\tau - \varepsilon) \nabla \right\} G; \\ G(\tau = 0) = & 1. \end{aligned} \quad (170)$$

Находя из этого уравнения операторную функцию G и подставляя ее в формулу (168), получаем окончательное выражение для W [16]:

$$\begin{aligned} \exp W = & -i \int_0^{\infty} d\tau \exp [i\tau (1 + i\varepsilon)] \int \mathcal{D}\mathbf{p} \int_{\mathbf{x}(0)=0} \mathcal{D} \frac{\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \exp \left[i \int_0^{\tau} d\eta \dot{\mathbf{x}}(\eta) \mathbf{p}(\eta) \right] \exp(g\tau), \end{aligned} \quad (171)$$

где

$$\pi = -i \int_0^{\tau} d\eta K [(\mathbf{p}(\eta) - \mathbf{k})^2] V \left[\mathbf{r} - \int_0^{\tau} d\xi \dot{\mathbf{x}}(\xi) \vartheta(\xi - \eta + \epsilon) \right]. \quad (172)$$

Выписывая разложение

$$\exp W = \overline{\exp(g\pi)} = \exp(g\bar{\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \overline{(\pi - \bar{\pi})^n}, \quad (173)$$

в котором знак усреднения обозначает интегрирование по τ , $\mathbf{x}(\eta)$ и $\mathbf{p}(\eta)$ с соответствующей мерой [см., например, (171)], и проводя вычисления, находим, что

$$\bar{\pi} = W_1; \quad (\overline{\pi^2} - \bar{\pi}^2)/2 = W_2 \text{ и т. д.}, \quad (174)$$

т. е. разложения (173) и (155) полностью совпадают.

Ограничиваясь в разложении (173) лишь первым членом ($n = 0$), получаем приближенное выражение (152) для амплитуды рассеяния, которое соответствует учету путей частиц, наиболее близко приближающихся к классическим и совпадающих в случае рассеяния частиц высоких энергий на малые углы с прямолинейными траекториями. Иными словами, можно сказать, что операторный метод является при высоких энергиях реализацией концепции прямолинейных путей.

5. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ПУТИ И ПРОБЛЕМА ЭЙКОНАЛА

Как было показано выше, в основе метода прямолинейных путей лежит предположение о существенной подавленности больших передач импульса в отдельных актах взаимодействия частиц высоких энергий. Таким образом, большие импульсы, переносимые частицами в процессе столкновения, имеют тенденцию к сохранению («инерция» больших импульсов). Вид частиц, переносящих большой импульс, может при этом изменяться в течение процесса взаимодействия в соответствии с эмпирическими закономерностями, наблюдаемыми в инклюзивных процессах. Так, при столкновении быстрых нуклонов следует учитывать возможность излучения «жесткого» мезона с передачей ему значительной доли импульса начального нуклона.

Обычно при выводе формулы эйконала методами суммирования ряда теории возмущений в качестве «лидирующих» частиц, переносящих большие импульсы, выбираются начальные частицы. Однако существование виртуальных процессов с изменением вида лидирующих частиц должно приводить к нарушению ортодоксального эйконального представления. Возможность появления экстра-членов в асимптотике суммы диаграмм теории возму-

щений, не укладывающихся в обычную формулу эйконала, впервые была отмечена в работе [36].

Рассмотрим здесь структуру неэйкональных вкладов в амплитуду рассеяния двух нуклонов, описываемую суммой диаграмм лестничного типа без учета радиационных поправок и эффектов поляризации вакуума в скалярной модели [33].

Высокоэнергетические асимптотики графов Фейнмана и модификация пропагаторов виртуальных частиц. В качестве объекта исследования выберем амплитуду рассеяния двух скалярных нуклонов в модели $L_{\text{вз}} = g: \psi^+ \psi \phi$: в пренебрежении радиационными поправками и замкнутыми нуклонными петлями. Эта амплитуда представляется в виде суммы диаграмм типа (рис.1):

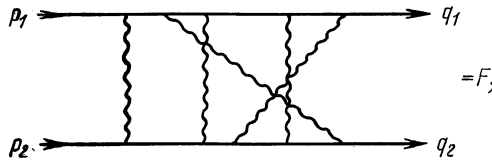


Рис. 1

где p_1 и p_2 — импульсы входящих, а q_1 и q_2 — выходящих частиц. Если число импульсов интегрирования l , а число внутренних линий I (в диаграммах этого типа $I = 3l + 1$), то

$$F = \int dk_1 \dots dk_l \prod_{i=1}^I \frac{1}{r_i^2 - m_i^2 + i\epsilon}, \quad (175)$$

где r_i — линейные комбинации импульсов интегрирования k_j . Вводя параметризацию Фейнмана, имеем

$$F = (I - 1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_I \delta \left(1 - \sum_{i=1}^I \alpha_i \right) \int \frac{dk_1 \dots dk_l}{[\Psi(k, \alpha, s, t)]^I}, \quad (176)$$

где

$$\Psi = \sum_{i=1}^I \alpha_i (r_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) = \sum_{i,j=1}^l a_{ij} k_i k_j + 2 \sum_{i=1}^l b_i k_i + c, \quad (177)$$

после чего можно провести интегрирование по k_i и получить представление для F в форме Чисольма [29]:

$$F = (i\pi^2)^l (I - 2l - 1)! \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_I \delta \left(1 - \sum_{i=1}^I \alpha_i \right) \times \\ \times \frac{[C(\alpha)]^{I-2l-2}}{[D(\alpha, s, t)]^{I-2l}}. \quad (178)$$

В этой формуле

$$C = \det \| a_{ij} \|; \quad D = \det \left\| \begin{array}{ccc} & & b_1 \\ & a_{ij} & \vdots \\ & \dots & b_l \\ b_1 \dots b_l & & c \end{array} \right\|, \quad (179)$$

причем детерминант Чисхольма D представляется в виде:

$$D(\alpha, s, t) = f(\alpha) s + g(\alpha) t + h(\alpha). \quad (180)$$

Изложим кратко основные результаты работы [37], которыми будем пользоваться при изучении асимптотического поведения выражения (178) *.

Определение

t -Путем называется такое множество линий графа, образующих непрерывную дугу, что а) если стянуть все эти линии в точку, то граф разбивается на две части, соединенные лишь в одной вершине, причем импульсы p_1 и q_1 присоединяются к одной из этих частей, а p_2 и q_2 — к другой; б) ни одно из его подмножеств не обладает свойством «а».

Длиной t -пути называется число образующих его линий; t -пути минимальной длины называются t -путями.

Правило

Если граф F таков, что существует M \bar{t} -путей длины ρ , то его асимптотика дается формулой

$$F \approx (i\pi^2)^l \frac{(I - 2l - 1 - \rho)! \rho!}{(M - 1)!} \frac{(\ln s)^{M-1}}{s^\rho} \int \frac{[C_0(\alpha)]^{I-2l-2}}{(g_0 t + h_0)^{I-2l-\rho}} \tilde{f}_0^\rho \times \\ \times \prod_{j=1}^M \delta \left(\sum_{v=1}^{\rho} \alpha_v^{(j)} - 1 \right) \delta \left(\sum_{v \in P} \alpha_v - 1 \right) \{d\alpha\}. \quad (181)$$

В этой формуле

$$g_0 t + h_0 = D(\alpha, s, t) |_{\alpha_v^{(j)}=0}; \\ C_0(\alpha) = C(\alpha) |_{\alpha_v^{(j)}=0}; \quad (182)$$

$\alpha_v^{(j)}$ — параметры линий, принадлежащих j -у \bar{t} -пути; α_v ($v \notin P$) — оставшиеся параметры, а величина f_0 получается из f [см. (180)] следующим образом.

Произведем замену

$$\alpha_v^{(j)} \rightarrow \lambda_j \alpha_v^{(j)}, \quad (183)$$

* Результаты, подобные [37], были получены также в работах [12, 13].

тогда

$$f \rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M \tilde{f}(\lambda) \text{ и } \tilde{f}_0 = \tilde{f} \Big|_{\lambda_j=0}. \quad (184)$$

Выписав необходимые формулы, перейдем к дальнейшему изложению. В случае, когда в графах типа F (см. рис. 1) передача импульса равна нулю, т. е. $p_1 = q_1$ и $p_2 = q_2$, множество линий, в пропагаторы которых входит импульс p_i , назовем p -путем.

Таким образом, в графах имеется два p -пути, каждый из которых образует непрерывную дугу. Заметим, что каждый p -путь согласно определению является t -путем. Однако в отличие от t -путей, являющихся топологическими характеристиками данного графа, расположение p -путей зависит от конкретной расстановки импульсов интегрирования. В рассматриваемых графах последние можно расставить так, чтобы p -пути совпадали с парой любых t -путей, не образующих замкнутую петлю.

Утверждение 1

Пусть задан граф такой, что вклад в его главную асимптотику дает пара t -путей, не имеющих общей линии. Если расставить импульсы интегрирования так, чтобы p -пути совпали с t -путями, а затем произвести следующую модификацию пропагаторов, зависящих от внешних импульсов

$$\frac{1}{\left(\sum_i k_i\right)^2 + 2p \sum_i k_i - m_j^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{2p \sum_i k_i + i\epsilon}, \quad (185)$$

т. е. пренебречь массами и произведениями импульсов интегрирования, тогда асимптотика этого графа не изменится.

Доказательство

Модификация пропагаторов (185) приводит к следующим изменениям в детерминантах C и D [см. (179)]. В детерминанте C обращаются в нуль параметры, соответствующие t -путям, т. е. C переходит в C_0 . В детерминанте D изменится величина s , в которой обратятся в нуль те же параметры. Это приводит к тому, что в величине $f(\alpha)$ [см. (180)] сохранятся особенности, связанные с t -путями, т. е. сохранится прежняя асимптотическая зависимость от s . Величины C_0 , $g_0 t + h_0$ и \tilde{f}_0 , вычисляемые по формулам (182) — (184), также не изменятся. Принимая во внимание выражение для асимптотики графа (181), убеждаемся, таким образом, что модификация пропагаторов (185) ничего в нем не меняет.

Утверждение 2

Пусть задан граф такой, что вклад в его главную асимптотику дает пара t -путей, имеющих общую линию. Расставим импульсы интегрирования так, чтобы p -пути совпали с t -путями. Тогда его асимптотика совпадает с асимптотикой редуцированного графа,

получаемого из первоначального стягиванием общей линии в точку, и умноженной на фактор $\pm 1/s$. Знак плюс выбирается тогда, когда внешние импульсы в общей линии имеют одинаковое направление, а знак минус — в обратном случае. К редуцированному графу применимо утверждение 1.

Доказательство

Пусть общая линия имеет параметр β и ей соответствует пропагатор

$$\frac{1}{\left(\sum_i k_i\right)^2 + 2(p_1 \pm p_2) \left(\sum_i k_i\right) - M^2 \pm s + i\varepsilon} \cdot \quad (186)$$

Нам достаточно доказать, что этот пропагатор можно заменить на $\pm 1/s$. Действительно, величины C_0 и $g_0 t + h_0$ не меняются при этом по тем же соображениям, какие использовались в доказательстве утверждения 1. Величина f будет иметь структуру

$$f = \beta C + \left| \begin{array}{c} C \\ \hline (\alpha^{(2)} + \beta) \end{array} \right| \begin{array}{c} (\alpha^{(1)} + \beta) \\ 0 \end{array} \quad (187)$$

где $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ — наборы параметров, соответствующих двум путям. Теперь очевидно, что вместо f можно использовать величину

$$f^{(1)} = \beta C (\beta = 0) + \left| \begin{array}{c} C (\beta = 0) \\ \hline (\alpha^{(2)}) \end{array} \right| \begin{array}{c} (\alpha^{(1)}) \\ 0 \end{array} \quad (188)$$

что и доказывает наше утверждение, так как $f^{(1)}$ имеет те же особенности, что и f , и приводит к той же функции \tilde{f}_0 .

Эйкональные и неэйкональные вклады в амплитуде рассеяния. Как известно, амплитуда рассеяния двух скалярных нуклонов в пренебрежении радиационными поправками и вкладами поляризации вакуума представима в виде [ср. (126)—(128)]:

$$f(p_1, p_2; q_1, q_2) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int d^2x D(x) \times \\ \times \exp[-ix(p_1 - q_1)] \int_0^1 d\lambda S_\lambda + (q_1 \leftrightarrow q_2), \quad (189)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 S_\lambda = & \int [\delta v_1]_{-\infty}^\infty [\delta v_2]_{-\infty}^\infty \exp \left\{ i g^2 \lambda \times \right. \\
 & \times \int_{-\infty}^\infty d\xi \int_{-\infty}^\infty d\tau D \left[-x + 2\xi a_1(\xi) - 2\tau a_2(\tau) - \right. \\
 & \left. \left. - 2 \int_{-\xi}^0 v_1(\eta) d\eta + 2 \int_{-\tau}^0 v_2(\eta) d\eta \right] \right\} ; \\
 a_{1,2}(\xi) = & p_{1,2} \vartheta(\xi) + q_{1,2} \vartheta(-\xi).
 \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

В выражениях (189) и (190) импульсы интегрирования каждой отдельной диаграммы расставлены так, что p -пути совпадают с нуклонными линиями. Полагая v_1 и v_2 равными нулю, т. е. отбрасывая в нуклонных пропагаторах члены типа $k_i k_j$, в пренебрежении перекрученными графами получим, согласно утвержде-

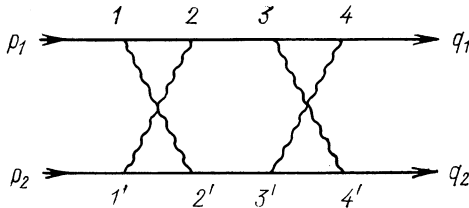


Рис. 2.

нию 1, сумму вкладов в каждую диаграмму t -путей, совпадающих с нуклонными линиями. В результате при $s = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow \infty$ и $t = (p_1 - q_1)^2$ фиксированном будем иметь известное эйкональное представление амплитуды рассеяния:

$$\begin{aligned}
 f \approx & \frac{is}{(2\pi)^4} \int d^2 \mathbf{x}_\perp \exp(-i \mathbf{x}_\perp \Delta_\perp) \times \\
 & \times \left\{ \exp \left[-\frac{ig^2}{4\pi s} K_0(\mu |\mathbf{x}_\perp|) \right] - 1 \right\}. \quad (191)
 \end{aligned}$$

В связи с этим вклады от t -путей, совпадающих с нуклонными линиями, будем называть впредь эйкональными.

В работе [36] указывалось на тот факт, что в диаграммах старших порядков по константе связи g (именно, начиная с восьмого) необходимо учитывать также и другие t -пути, дающие вклад не меньший, чем эйкональные. Начнем изучение неэйкональных вкладов с диаграммы восьмого порядка (рис. 2).

В этой диаграмме, которую в дальнейшем будем называть диаграммой XX, существуют четыре \bar{t} -пути одинаковой длины, три

(1234), (1'2'3'4'), (1'234') и (12'3'4). Формальный учет всех четырех путей привел бы нас к асимптотике $\ln^3 s/s^3$. Однако это соответствует обращению в нуль параметров всех линий, входящих в диаграмму, что невозможно из-за фактора $\delta(1 - \sum_i \alpha_i)$. Учет каких-либо трех путей приводит к асимптотике $\ln^2 s/s^3$, которая не будет главной, так как в данном случае коэффициент при ней, пропорциональный C_0 , будет равен нулю, вследствие того что \bar{t} -пути образуют замкнутую петлю. Таким образом, необходимо вычислить сумму вкладов от следующих пар \bar{t} -путей:

$$(1234; 1'2'3'4'), (1234; 1'234'), (12'3'4; 1'2'3'4') \text{ и } (12'3'4; 1'234'). \quad (192)$$

Пары (1234; 12'3'4) и (1'2'3'4'; 1'234') вклада не дадут, так как эти \bar{t} -пути опять образуют замкнутую петлю. Все пары \bar{t} -путей (192) приводят к одной и той же асимптотической зависимости от s вида $\ln s/s^3$, поэтому далее будем интересоваться лишь коэффициентами при ней.

Вклад в диаграмму XX от пары (1234; 1'2'3'4') присутствует в формуле (191). В связи с этим будем обозначать его

$$(\ln s/s^3) f_{\text{внк}}^{(XX)}(t). \quad (193)$$

Найдем теперь вклад в асимптотику диаграммы XX от \bar{t} -путей (12'3'4) и (1'234'). Расставим импульсы интегрирования так, чтобы эти пути совпали с p -путями. Тогда, согласно утверждению 1, можно в линиях, входящих в \bar{t} -пути, модифицировать пропагаторы по типу (185). Сделаем после этого замену импульсов интегрирования:

$$k_i \rightarrow k_i m/\mu. \quad (194)$$

При этом нуклонные линии заменяются на мезонные

$$D_m(km/\mu) = \frac{1}{k^2 m^2/\mu^2 - m^2 + i\epsilon} = \mu^2 D_\mu(k)/m^2; \\ D_m(p_1 - q_1 - k) \rightarrow \mu^2 D_\mu[(p_1 - q_1)\mu/m - k]/m^2, \quad (195)$$

т. е. $t \rightarrow t\mu^2/m^2$, а функции распространения, соответствующие \bar{t} -путям, приобретут лишь множители вида μ/m . Благодаря этому можно считать все линии, входящие в \bar{t} -пути, модифицированными нуклонными линиями. В результате получаем граф того же вида, что и на рис. 2, но в котором p -пути уже направлены вдоль нуклонных линий (рис. 3).

Таким образом, искомый вклад будет иметь вид

$$(\ln s/s^3) f_{\text{неэйк}}^{(1)}(t);$$

$$f_{\text{неэйк}}^{(1)}(t) = \mu^2 f_{\text{эйк}}^{(XX)}(t\mu^2/m^2)/m^2. \quad (196)$$

Если массы частиц удовлетворяют условию

$$\mu^2/m^2 \ll 1, \quad t/m^2 \ll 1, \quad (197)$$

то вклад неэйкональных \bar{t} -путей мал по сравнению с вкладом эйкональных.

Осталось рассмотреть лишь вклады в асимптотику диаграммы XX от пары \bar{t} -путей (1'2'3'4') и (12'3'4). Вторая неисследованная

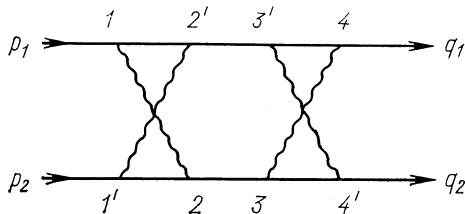


Рис. 3.

пара (1234) и (1'234') [см. (192)], очевидно, дает такой же вклад. Если стянуть \bar{t} -пути (1'2'3'4') и (12'3'4) в точку, то получим редуцированный граф вида, показанного на рис. 4.

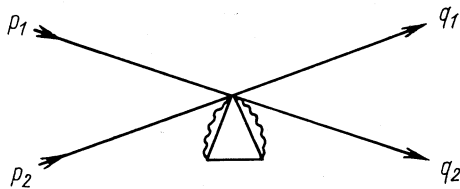


Рис. 4.

Отсюда следует, что вклад этих \bar{t} -путей в асимптотику диаграммы XX не зависит от передачи импульса, т. е. представим в виде:

$$\frac{\ln s}{s^3} \cdot \frac{1}{\mu^2} \varphi \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right). \quad (198)$$

Найдем вид функции $\varphi(\mu^2/m^2)$ при выполнении условия (197). Для этого расставим в диаграмме XX импульсы интегрирования так, чтобы p -пути совпали с \bar{t} -путями (1'2'3'4') и (12'3'4). Тогда, используя утверждение 2, получим, что искомый вклад будет

равен асимптотике редуцированного графа (рис. 5), умноженной на $1/s$.

При $s \rightarrow \infty$ асимптотика F' , если учесть формулу (181), будет иметь вид:

$$F' \approx \frac{\ln s}{s^2} \text{const} \int d\alpha_1 \dots d\alpha_9 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \times \\ \times \delta(1 - \alpha_3 - \alpha_4) \delta(1 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9) \frac{C_0}{(g_0 t + h_0) \tilde{f}_0^2}, \quad (199)$$

где

$$g_0 = 0; \quad h_0 = -\mu^2 [m^2 (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) / \mu^2 + (\alpha_8 + \alpha_9)] C_0. \quad (200)$$

Из (199) и (200) получаем выражение для функции φ , определяемой соотношением (198):

$$\varphi \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) = \text{const} \int \{d\alpha\} \text{Pd} \left(1 - \sum_i \alpha_i \right) \times \\ \times \frac{\delta(1 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9)}{\tilde{f}_0^2 [m^2 (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) / \mu^2 + (\alpha_8 + \alpha_9)]}. \quad (201)$$

При больших m^2/μ^2 основной вклад дает область $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 =$

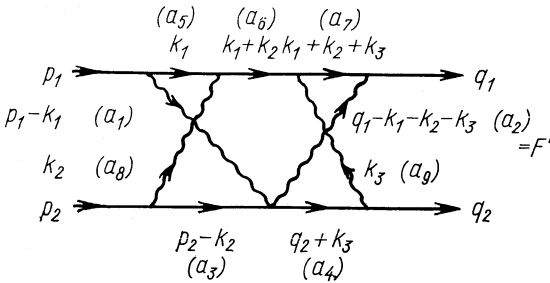


Рис. 5.

$= 0$, и можно снова применить метод Тиктопулоса [37], сделав замену $\alpha_{5, 6, 7} \rightarrow \lambda \alpha_{5, 6, 7}$. При этом

$$\left. \begin{aligned} d\alpha_5 d\alpha_6 d\alpha_7 &\rightarrow \lambda^2 \delta(1 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7) d\alpha_5 d\alpha_6 d\alpha_7 d\lambda; \\ \delta(1 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9) &\rightarrow \delta(1 - \alpha_8 - \alpha_9); \\ \tilde{f}_0 &\rightarrow \lambda \tilde{f}_0, \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

откуда

$$\varphi \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) = \text{const} \int_0^1 \frac{r d\lambda}{\lambda m^2 / \mu^2 + 1},$$

т. е.

$$\varphi(\mu^2/m^2) = \text{const} \times (\mu^2/m^2) \ln(\mu^2/m^2) \quad (203)$$

при выполнении условия (197). Заметим, что const в (203) включает в себя теперь все интегралы по α_i .

Учитывая, что $f_{\text{эйк}}(t=0) = \text{const}/\mu^2$, и принимая во внимание формулы (193), (196), (198) и (203), получаем асимптотическое выражение для диаграммы XX

$$f^{(XX)}(t) \approx (\ln s/s^3) \{f_{\text{эйк}}^{(XX)}(t) + f_{\text{неэйк}}^{(XX)}(t)\}, \quad (204)$$

где

$$f_{\text{неэйк}}^{(XX)}(t) = (\mu^2/m^2) f_{\text{эйк}}^{(XX)}(t\mu^2/m^2) + \\ + \text{const} f_{\text{эйк}}^{(XX)}(t=0) (\mu^2/m^2) \ln (\mu^2/m^2)$$

при $s \rightarrow \infty$, фиксированном t и $\mu^2/m^2 \ll 1$.

Асимптотика амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния. Восьмой порядок. Выше рассмотрели одну из диаграмм восьмого порядка. Обратимся теперь к оставшимся диаграммам, исключая

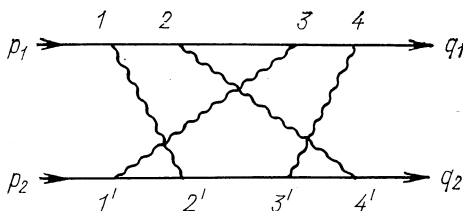


Рис. 6.

из их числа графы, соответствующие в формуле (189) члену $(q_1 \leftrightarrow q_2)$. В них имеются три типа неэйкональных \bar{t} -путей, дающих вклад в главную асимптотику.

К первому типу отнесем неэйкональные \bar{t} -пути, не имеющие общих линий. Кроме диаграммы XX имеется лишь одна диаграмма с такими \bar{t} -путями (рис. 6) и две диаграммы, кросс-симметричные им.

Вклад в асимптотику диаграммы (см. рис. 6) может быть записан в форме, аналогичной (196):

$$f_{\text{неэйк}}^{(2)}(t) = \frac{\ln s}{s^3} \cdot \frac{\mu^2}{m^2} \text{cross} f_{\text{эйк}}^{(2)}(t\mu^2/m^2). \quad (205)$$

Если сложить эйкональные вклады диаграмм XX и изображенной на рис. 6 с кросс-симметричными им, то $\ln s$ сократятся, и получим вклад $(1/s^3) f_{\text{эйк}}(t)$. Тогда, согласно формулам (197) и (205), вклад неэйкональных \bar{t} -путей в эту же сумму имеет вид:

$$f_{\text{неэйк}}(t) = (\mu^2/m^2) f_{\text{эйк}}(t\mu^2/m^2). \quad (206)$$

Других неэйкональных вкладов, зависящих от передачи импульса, в восьмом порядке не имеется.

Ко второму типу отнесем неэйконалиные \bar{t} -пути, имеющие одну общую нуклонную линию. Вклад таких \bar{t} -путей не зависит от передачи импульса и был рассмотрен в предыдущем параграфе для диаграммы XX [см. формулы (198) — (204)]. Однако подобные вклады в сумме всех диаграмм, содержащих такие \bar{t} -пути, сокращаются.

Рассмотрим, например, диаграмму, показанную на рис. 7:

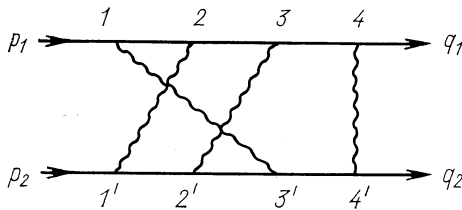


Рис. 7.

в которой пути (1'2'3'4') и (13'4'4') принадлежат ко второму типу. Их вклад можно учесть, воспользовавшись утверждением 2. Именно, асимптотика этой диаграммы графически представима в виде:

$$\frac{1}{s} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \quad (207)$$

Асимптотика графа, получающегося зеркальным отображением вершин 1 и 2 относительно 4, изображается следующим образом:

$$\frac{1}{s} \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \quad (208)$$

Рассмотрим теперь кросс-симметричные графы. Согласно утверждению 2, общие линии надо заменять на множитель $-1/s$. Тогда получаем

$$-\frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right\} \quad (209)$$

Первый член в этой формуле соответствует неэйконольному вкладу в диаграмму, кросс-симметричную изображенной на рис. 7. Складывая (207) — (209), убеждаемся, что вклад неэйконольных \bar{t} -путей второго типа в их сумме сокращается. Очевидно, что и для других диаграмм подобного вида эти рассуждения являются справедливыми.

К третьему типу отнесем неэйконольные \bar{t} -пути, имеющие общую мезонную линию. Вклад таких \bar{t} -путей также не зависит от

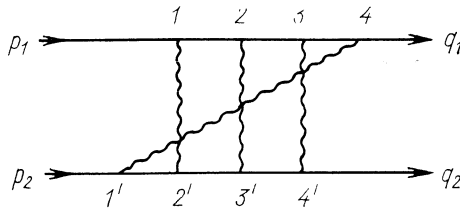


Рис. 8.

передачи импульса. В восьмом порядке имеется несколько диаграмм, обладающих \bar{t} -путями третьего типа. Рассмотрим для при-

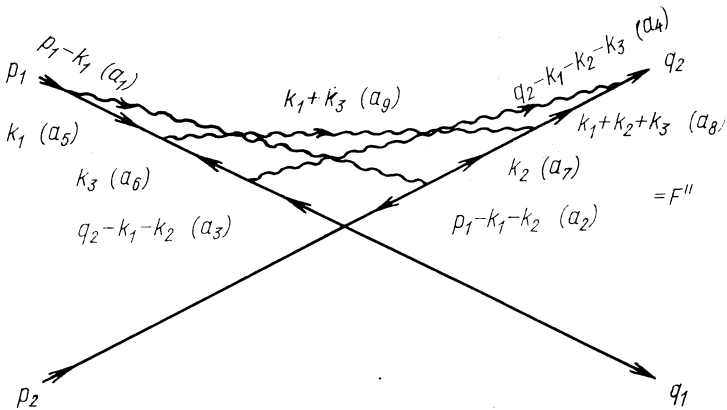


Рис. 9.

мера лишь одну из них (рис. 8), имея в виду, что все результаты также относятся ко всем подобным диаграммам.

В этой диаграмме пути (1'434') и (12'1'4) являются неэйконоальными \bar{t} -путями, принадлежащими к третьему типу. Их вклад можно записать в аналогичной (198) форме:

$$\frac{\ln s}{s^3} \cdot \frac{1}{\mu^2} \Phi \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right). \quad (210)$$

Как и выше, будем искать вид функции Φ при выполнении условия (197). Расставим импульсы интегрирования так, чтобы p -пути совпали с \bar{t} -путями (1'434') и (12'1'4) (см. рис. 8). Согласно утверждению 2, искомый вклад будет равен асимптотике редуцированного графа (рис. 9), умноженной на $1/s$.

Используя формулу (181), при $s \rightarrow \infty$ получаем асимптотику

$$F'' \approx \frac{\ln s}{s^2} \text{const} \int d\alpha_1 \dots d\alpha_9 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \delta(1 - \alpha_3 - \alpha_4) \times \\ \times \delta(1 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9) \frac{C_0}{(g_0 t + h_0) \tilde{f}_0^2}, \quad (211)$$

где

$$g_0 = 0; \quad h_0 = -\mu^2 C_0 [m^2 (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8) / \mu^2 + \alpha_9]. \quad (212)$$

Из (211) и (212) получаем выражение для функции $\Phi(\mu^2/m^2)$, определяемой соотношением (210):

$$\Phi \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) = \text{const} \int \{d\alpha\} \Pi \delta \left(1 - \sum_i \alpha_i \right) \times \\ \times \frac{\delta(1 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9)}{\tilde{f}_0^2 [m^2 (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8) / \mu^2 + \alpha_9]}. \quad (213)$$

При больших m^2/μ^2 вклад дает область $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 0$. Делая замену $\alpha_{5, 6, 7, 8} \rightarrow \lambda \alpha_{5, 6, 7, 8}$, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} d\alpha_5 \dots d\alpha_8 &\rightarrow \lambda^3 \delta(1 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8) d\alpha_5 \dots d\alpha_8 d\lambda; \\ \delta(1 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9) &\rightarrow \delta(1 - \alpha_9); \\ \tilde{f}_0 &\rightarrow \lambda \tilde{f}_0, \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

откуда следует

$$\Phi(\mu^2/m^2) = \text{const} \int_0^1 d\lambda \frac{\lambda}{\lambda m^2 / \mu^2 + 1},$$

т. е.

$$\Phi(\mu^2/m^2) = \text{const} \times (\mu^2/m^2), \quad (215)$$

при выполнении условия (214).

Результаты первого и второго раздела можно свести в одну формулу, в которой учтено сокращение $\ln s$ при сложении с кросс-симметричными диаграммами. Именно, при больших s асимптоти-

ческое выражение амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния в восьмом порядке по g имеет вид:

$$f^{(8)} \approx \frac{g^8}{s^3} \left\{ \frac{1}{8 \cdot 4! (2\pi)^8} \int d^2 \mathbf{x}_\perp \exp(-i \mathbf{x}_\perp \Delta_\perp) \times \right. \\ \left. \times K_0^4(\mu | \mathbf{x}_\perp |) + f_{\text{неэйк}}^{(8)}(t) \right\}, \quad (216)$$

где

$$f_{\text{неэйк}}^{(8)}(t) = (\mu^2/m^2) f_{\text{эйк}}(t\mu^2/m^2) + (\text{const}/\mu^2) \Phi(\mu^2/m^2).$$

В последней формуле $f_{\text{эйк}}(t)$ обозначает коэффициент при главной асимптотике суммы диаграмм, изображенных на рис. 2 и 6 и кросс-симметричных им, причем учитывающий лишь вклады эйкональных \bar{t} -путей. Функция $\Phi(\mu^2/m^2)$ при $\mu^2/m^2 \ll 1$ ведет себя как μ^2/m^2 . Первый член в фигурной скобке представляет собой сумму эйкональных вкладов всех графов восьмого порядка [ср. формулу (191)].

При условии малости отношения мезонной и нуклонных масс в поправочных к эйкональному членам можно пренебречь зависимостью от передачи импульса t , если $t/m^2 \ll 1$:

$$f_{\text{эйк}}(t\mu^2/m^2) \approx f_{\text{эйк}}(0) = \text{const}/\mu^2, \quad (217)$$

и формула (216) принимает вид:

$$f^{(8)} \Big|_{\substack{s \rightarrow \infty \\ t \text{ - фикс} \\ \mu^2/m^2 \ll 1}} \approx \frac{g^8}{s^3} \left\{ \frac{1}{8 \cdot 4! (2\pi)^8} \int d^2 \mathbf{x}_\perp \exp(-i \mathbf{x}_\perp \Delta_\perp) \times \right. \\ \left. \times K_0^4(\mu | \mathbf{x}_\perp |) + \text{const}/m^2 \right\}. \quad (218)$$

В заключение этого раздела подчеркнем, что все изложенное опиралось на исследование вкладов от различных \bar{t} -путей, связанных с нулями функции $f(\alpha)$ [см. (178) — (181)].

Асимптотика амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния. Высшие порядки. Выше было рассмотрено высокоэнергетическое

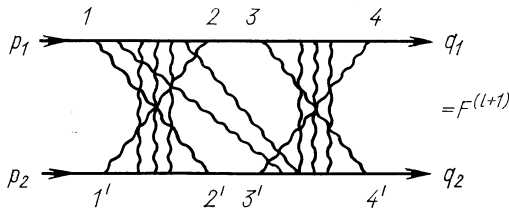


Рис. 10.

поведение амплитуды рассеяния в восьмом порядке по константе связи g . В этом порядке было видно, что существуют диаграммы, дающие неэйкональные вклады в асимптотику того же порядка

по s , что и эйконольные. Однако в старших порядках, как было указано в работе [36], существуют диаграммы, неэйконольные вклады которых имеют более сильную асимптотику, чем эйконольные. Характерным примером таких диаграмм с неэйконольными путями первого типа является диаграмма, изображенная на рис. 10.

В этой диаграмме, так же как в диаграмме XX, имеются два \bar{t} -пути длины три: $(12'3'4)$ и $(1'234')$. Для исследования ее асимптотики применим ту же методику, что и в первом разделе, т. е. направим p -пути вдоль \bar{t} -путей и произведем замену импульсов.

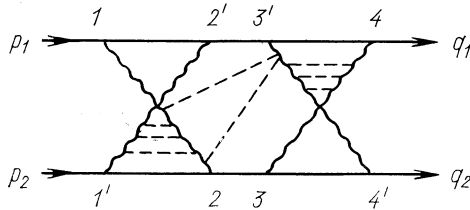


Рис.11.

Если имеем дело с диаграммой порядка $(2l+2)$ по g ($l+1$ — число мезонных линий), то асимптотика графа, изображенного на рис. 10, совпадает с асимптотикой графа на рис. 11, умноженной на фактор $(\mu^2/m^2)^{l-2}$.

При этом в диаграмме, изображенной на рис. 11, надо иметь в виду замену $t \rightarrow t\mu^2/m^2$ [ср. (195)]. Пунктирные линии рассматриваемого редуцированного графа обозначают виртуальные частицы с массой μ^2/m . Своим происхождением эти линии обязаны мезонным линиям (см. рис. 10), не принадлежащим к \bar{t} -путям:

$$D_\mu(k) \rightarrow D_\mu(km/\mu) = \frac{1}{k^2 m^2 / \mu^2 - \mu^2 + i\epsilon} = \mu^2 / m^2 D_{\mu^2/m}(k) / m^2. \tag{219}$$

Если выполняется условие (197), то при вычислении асимптотики диаграммы, изображенной на рис. 11, можно положить $t = 0$.

Тогда, используя формулу (181), для главного асимптотического члена указанной диаграммы $(2l+2)$ -го порядка по константе связи g получаем следующее выражение:

$$F^{(l+1)} \approx \frac{\ln s}{s^3} \cdot \frac{\text{const}}{\mu^{2(l-2)}} \int \{d\alpha\} \{d\beta\} \{d\gamma\} \text{П}\delta\left(1 - \sum_i \gamma_i\right) \times \\ \times \delta\left(1 - \sum_i \alpha_i - \sum_i \beta_i\right) \frac{C_0}{\tilde{t}_0^3 \left(\frac{m^2}{\mu^2} \sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i\right)^{l-2}}, \quad l \geq 3. \tag{220}$$

В этой формуле параметры α_i соответствуют волнистым мезонным линиям, β_i — пунктирным и γ_i — нуклонным линиям. Оказывается, что особенность $\sum_i \alpha_i = 0$ не вносит существенного вклада в интеграл (220) при $m^2/\mu^2 \gg 1$ *.

Но тогда

$$F^{(l+1)} \approx \frac{\ln s}{s^3} \cdot \frac{\text{const}}{(m^2)^{l-2}}, \quad l \geq 3. \tag{221}$$

В рассматриваемом $(2l+2)$ -м порядке по g существуют диаграммы с неэйкональными t -путями третьего типа (рис. 12).

В диаграмме, изображенной на рис. 12, имеются два t -пути длины три: $(12'1'3)$ и $(1'323')$, приводящие к асимптотическому

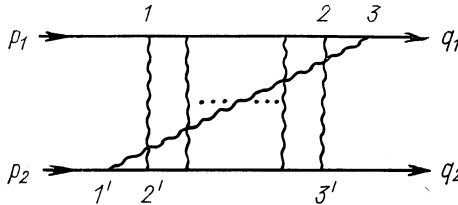


Рис. 12.

поведению $\ln s/s^3$. Метод, примененный выше для исследования подобной диаграммы в восьмом порядке, приводит здесь к формуле, аналогичной (221). Неэйкональные t -пути второго типа, вклады от которых в восьмом порядке в сумме сократились, в старших порядках приводят к более слабому асимптотическому поведению.

Все диаграммы данного порядка $(2l+2)$ по g или относятся к типу, описанному выше, и тогда дают вклад в асимптотику в соответствии с формулой (221), или имеют t -пути большей длины, чем три, что приводит к более слабому асимптотическому поведению при $s \rightarrow \infty$. Если учесть сокращение $\ln s$ при сложении графов с кросс-симметричными им диаграммами, придем к следующему выражению для асимптотики амплитуды рассеяния $f^{(2l+2)}$ в $(2l+2)$ -м порядке по константе связи g :

$$f^{(2l+2)} \Big|_{\substack{s \rightarrow \infty \\ t\text{-фикс} \\ \mu^2/m^2 \ll 1}} \approx \frac{1}{s^3} \cdot \frac{\text{const}}{(m^2)^{l-2}}, \quad l \geq 3. \tag{222}$$

Заметим, что эйкональная формула (191) при $t = 0$ в том же порядке по g приводит к следующему выражению:

$$f_{\text{эйк}}^{(2l+2)}(t = 0) = \text{const}/(s^l \mu^2). \tag{223}$$

* В этом нетрудно убедиться, вычисляя степень λ , появляющейся в числителе при замене $\alpha \rightarrow \lambda\alpha$ [ср. (214), (215)].

Таким образом, отношение неэйкональной и эйкональной амплитуд в данном порядке по константе связи

$$\left. \frac{f_{\text{неэик}}^{(2l+2)}}{f_{\text{эик}}^{(2l+2)}} \right|_{\substack{s \rightarrow \infty \\ t\text{-фикс} \\ \mu^2/m^2 \ll 1}} \approx \text{const} (\mu^2/m^2) (s/m^2)^{l-3}, \quad l \geq 3. \quad (224)$$

Из (224) видно, что в области

$$s \rightarrow \infty; \quad \mu^2/m^2 \ll 1; \quad s \sim m^2; \quad t = 0 \quad (225)$$

эйкональная амплитуда много больше неэйкональной, т. е. формула (191) правильно воспроизводит главные асимптотические члены в каждом порядке по g^2 . Если же находимся в области, определяемой соотношениями (225), но считаем $s \gg m^2$, то, как это следует из (224), вклады неэйкональных \bar{t} -путей доминируют над эйкональными. Таким образом, изучение класса лестничных диаграмм в скалярной модели показывает, что эйкональная формула соответствует учету в асимптотике \bar{t} -путей, совпадающих с нуклонными линиями. «Лидирующая» частица, переносящая

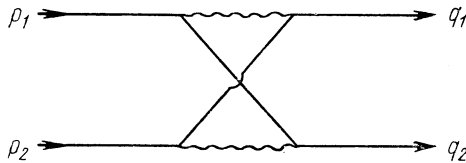


Рис. 13.

большой импульс, является в этом случае нуклоном и не изменяет своего вида в виртуальных процессах. Неэйкональные вклады в амплитуду обусловлены процессами с изменением вида лидирующей частицы, т. е. с передачей импульса от нуклонов к мезонам, и наоборот. При этом возникает важный вопрос о роли «перекрученных» графов, соответствующих исходным лестничным графам с заменой конечных импульсов ($q_1 \leftrightarrow q_2$) [ср. рис. 1 и формулу (189)]. Возможность переноса большого импульса мезоном приводит к тому, что вклад в асимптотику амплитуды рассеяния может доминировать над эйкональным в том же порядке по константе связи. Например, в четвертом порядке перекрученный граф (рис. 13) имеет асимптотику $\ln s/s$.

Отметим, что если ортодоксальная эйкональная формула соответствует рассеянию на юкавском квазипотенциале, обусловленном одномезонным обменом, то учет графа на рис. 13 приводит к появлению поправки к квазипотенциалу неюкавского типа. Найденная поправка соответствует обмену нуклон-антинуклон-

ной парой и имеет эффективный радиус $\sim \hbar/2m$, а на малых расстояниях ведет себя как $\ln r/r$.

Указанный здесь пример демонстрирует важность задачи изучения последовательных поправок к эффективному квазипотенциалу при высоких энергиях и свидетельствует в пользу квазипотенциальной интерпретации эйконоального представления в квантовой теории поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель данного обзора — познакомить читателя с основными идеями и элементами математического аппарата, лежащими в основе приближения прямолинейных путей в квантовой теории поля. Отдельные, относящиеся к этому методу, результаты были опубликованы в различных работах, и изложение их в более полном виде в одном месте должно помочь составить цельное представление о существовании концепции прямолинейных путей.

Развитие приближения прямолинейных путей происходило в результате разработки такой системы приближений в квантовой теории поля, которая не опирается на теорию возмущений и связанное с этим предположение о слабости взаимодействия и которая вбирает в себя основные закономерности взаимодействия частиц при высоких энергиях. Одной из главных закономерностей, которая характеризует столкновения адронов высоких энергий и лежит в основе концепции прямолинейных путей, является существенная подавленность больших передач импульса в отдельных актах взаимодействия. В рамках квазипотенциального подхода для случая упругих взаимодействий эта закономерность нашла свое отражение в предположении о гладкости локального квазипотенциала. Как уже отмечалось выше, свойство гладкости локального квазипотенциала позволяет дать строгое обоснование эйконоального разложения амплитуды рассеяния. Последовательное отражение концепции прямолинейных путей и предположение о гладкости взаимодействия нашли в операторном методе решения квазипотенциальных уравнений.

Для случая чисто теоретико-полевых задач метод континуального интегрирования является, по-видимому, наиболее подходящим языком для выражения концепции прямолинейных путей. Система поправок приближения прямолинейных путей связана с последовательным учетом отклонения путей частиц от прямолинейных траекторий и не опирается на диаграммную технику теории возмущений.

Важнейшая задача — проблема обоснования приближения прямолинейных путей хотя бы в рамках определенных теоретико-полевых моделей. Основное препятствие, стоящее на пути решения этой проблемы, состоит в сингулярном характере исходных

релятивистских взаимодействий, соответствующих простейшим изученным моделям теории поля. Другой важный вопрос — это теоретико-полевая интерпретация свойства гладкости локального квазипотенциала, обеспечивающего справедливость эйконоального разложения амплитуды рассеяния частиц высоких энергий. Отметим при этом, что формальный вывод эйконоального представления с фазой, соответствующей сингулярному эффективному взаимодействию, не дает решения задачи обоснования эйконоальной формулы и требует тщательного анализа опущенных членов.

И наконец, важной задачей, в которой используются методы функционального интегрирования, является необходимость учета сложных эффектов поляризации вакуума («замкнутых нуклонных петель»), а также потребность выхода за рамки простейших теоретико-полевых моделей и попытки вывода общих результатов, не зависящих от конкретных деталей модельных взаимодействий. Можно надеяться, что дальнейшее изучение приближения прямолинейных путей позволит расширить круг его приложений и сделает его одним из эффективных методов квантовой теории поля.

Авторы глубоко благодарны Н. Н. Боголюбову за постоянный интерес к работе и многочисленные плодотворные обсуждения. Мы искренне благодарны Б. М. Барбашову и В. Н. Первухину, в сотрудничестве с которыми была получена часть изложенных в обзоре результатов, Б. А. Арбузову, Д. И. Блохинцеву, П. Н. Боголюбову, В. С. Владимирову, А. В. Ефремову, О. И. Завьялову, В. Г. Кадышевскому, А. А. Логунову, В. А. Мецгерикову, Р. М. Мурадян, М. К. Поливанову, Л. Д. Соловьеву, О. А. Хрусталеву, Д. В. Ширкову за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашов Б. М. ЖЭТФ, 1965, 48, 607.
2. Барбашов Б. М. и др. ЭЧАЯ, 1973, 4, вып. 3.
3. Барбашов Б. М., Волков М. К. ЖЭТФ, 1966, 50, 660.
4. Барбашов Б. М. и др. ТМФ, 1970, 5, 330.
5. Барбашов Б. М. и др. ТМФ, 1970, 3, 342.
6. Барбашов Б. М., Нестеренко В. В. ТМФ, 1970, 4, 293.
7. Боголюбов Н. Н. «Докл. АН СССР», 1954, 99, 225.
8. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
9. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
10. Гарсеванишвили В. Р. и др. ТМФ, 1971, 6, 36.
11. Гарсеванишвили В. Р., Матвеев В. А., Слепченко Л. А. В сб.: ЭЧАЯ, т. 1, вып. 1. М., Атомиздат, 1970, с. 91.
12. Ефремов А. В. ОИЯИ, P-1242, Дубна, 1963.
13. Завьялов О. И. ЖЭТФ, 1964, 47, 1103.
14. Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н. «Проблемы теоретической физики». Сб. статей, посвященный 60-летию Н. Н. Боголюбова. М., «Наука», 1969.
15. Кулешов С. П. и др. ОИЯИ, P2-6445, Дубна, 1972.

16. Кулешов С. П. и др. ОИЯИ, P2-6437, Дубна, 1972.
17. Марков М. А. Нейтрино. М., «Наука», 1964.
18. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н. ЭЧАЯ, 1972, 3, вып. 1.
19. Матвеев В. А., Тавхелидзе А. Н. ОИЯИ, E2-5144, Дубна, 1970.
20. Милехин Г. Д., Фрадкин Е. С. ЖЭТФ, 1963, 45, 1926.
21. Фрадкин Е. С. В кн.: Тр. ФИАН СССР им. Лебедева. Т. 29. М., «Наука», 1965, с. 7.
22. Alliluyev S. P., Gershtein S. S., Logunov A. A. Phys. Lett., 1965, 18, 195.
23. Barbashov V. M. e.a. Phys. Lett., 1970, 33B, 484.
24. Barbashov V. M. e.a. Phys. Lett., 1970, 33B, 419.
25. Barbashov V. M. e.a. Nuovo cimento, 1971, 4A, 731.
26. Blokhintsev D. I. Nucl. Phys., 1962, 31, 628.
27. Feynman R. P. Rev. Mod. Phys., 1947, 20, 376.
28. Feynman R. P. Phys. Rev., 1951, 84, 108.
29. Chisholm J. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1952, 48, 300.
30. Yennie D. R., Frautschi S. C., Suura H. Ann. Phys., 1961, 13, 379.
31. Kuleshov S. P. e.a. JINR, E2-5897, Dubna, 1971.
32. Kuleshov S. P. e.a. JINR, E2-5833, Dubna, 1971.
33. Kuleshov S. P. e.a. JINR, E2-7041, Dubna, 1973.
34. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Nuovo cimento, 1963, 299, 380.
35. Matveev V. A., Tavkhelidze A. N. JINR, E2-5851, Dubna, 1971.
36. Tiktopoulos G., Treiman S. B. Phys. Rev., 1971, 3D, 1037.
37. Tiktopoulos G. Phys. Rev., 1963, 131, 480.