

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 6445



С.П. Кулешов, В.А. Матвеев,
А.Н. Сисакян, М.А. Смондырев

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ
ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ
И КОНЦЕПЦИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

1972

Кулешов С.П., Матвеев В.А., Сисакян А.Н.,
Смондырев М.А.

P2 - 6445

Приближенные методы функционального интегрирования
и концепция прямолинейных путей при высоких энергиях

Формулируется ряд приближенных методов вычисления функциональных интегралов, которые могут быть использованы для нахождения функций Грина и амплитуд рассеяния в квантовой теории поля. Показывается, что в задачах рассеяния двух частиц при высоких энергиях и фиксированных передачах импульса предложенные методы являются различными вариантами приближения прямолинейных путей.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1972

Kuleshov S.P., Matveev V.A.,
Sissakian A.N., Smondyrev M.A.

P2 - 6445

Approximate Functional Integration Methods
and Conception of Straight-Line Paths at
High Energies

A number of approximate methods of calculation of the functional integrals which can be used to find the Green functions and the scattering amplitudes in quantum field theory are formulated.

It is shown that in the investigation of particle scattering at high energies and fixed momentum transfers these methods are the different versions of straight-line path approximation.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

§1. Введение

В последнее время методы теории меры и интегрирования в функциональных пространствах широко используются в работах по квантовой теории поля. Этот подход основан на представлении решений точных уравнений теории в виде функциональных интегралов^{/1,2/}. Однако в силу отсутствия развитой техники вычисления достаточно общих квадратур функциональные интегралы являются "вещью в себе" в том смысле, что обычно извлечение необходимой информации приходится проводить поэтапно с помощью той или иной аппроксимационной процедуры. Наиболее просты и известны такие аппроксимационные процедуры, при которых на каждом этапе вычислений мы имеем дело лишь с гауссовыми квадратурами. Так, для исследования проблемы инфракрасных асимптотик функций Грина в квантовой электродинамике было развито так называемое приближение $k_i k_j = 0, (i \neq j)$ ^{/3,4/}. В дальнейшем, например, в работе^{/5/}, этот метод был использован при исследовании эйконоального представления амплитуды упругого рассеяния.

В данной статье предлагаются аппроксимационные процедуры, идейно связанные с приближениями, которые использовались в работах^{/4,5/}. Рассматриваются также некоторые применения предложенных приближенных методов функционального интегрирования в области высоких энергий и фиксированных передач импульса. Интерес к этому вопросу стимулирован тем обстоятельством, что имеются веские основания говорить, выражаясь на языке фейнмановского интегрирования по путям, о доминировании в указанной асимптотической области траекторий частиц, наименее отклоняю-

шихся от прямолинейных путей^{/6/}. Примером тому служит полученное в рамках квазипотенциального уравнения квантовой теории поля^{/7/} при условии гладкости^{/8/} локального квазипотенциала совпадение точного решения с решением, учитывающим лишь прямолинейные траектории^{/9/}. Анализ изложенных в данной работе приближений показывает, что они при высоких энергиях и фиксированных передачах импульса являются, по сути дела, реализациями общей концепции прямолинейных путей. Ранее уже рассматривались различные варианты приближения прямолинейных путей как в рамках функционального интегрирования^{/8/}, так и на языке операторного метода решений уравнений квантовой теории поля^{/9/}. Следует подчеркнуть, что выбор того или иного метода должен быть сделан исходя из конкретной постановки задачи с учётом определенной кинематической области.

§2. Формулировка приближений

Рассмотрим функциональный интеграл по гауссовой мере

$$\int \frac{\delta \nu}{const} e^{-i \int d\xi \nu^2(\xi)} e^{g \pi[\nu]} \quad , \quad (2.1)$$

где $\pi[\nu]$ - некий функционал, а $const$ обозначает нормировочную постоянную. Как известно, вычисление (2.1) может быть сведено к нахождению функциональных производных в соответствии с формулой

$$\int [\delta \nu] e^{g \pi[\nu]} = \exp \left\{ \frac{1}{4i} \int d\xi \frac{\delta^2}{\delta \nu^2(\xi)} \right\} e^{g \pi[\nu]} \Big|_{\nu=0} \quad . \quad (2.2)$$

Кроме того, в некоторых задачах квантовой теории поля (см., например,¹⁰⁾ требуется определить действие дифференциального оператора $\exp \left\{ \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \nu^2} \right\}$, где

$$\int D \frac{\delta^2}{\delta \nu^2} = \int d\xi_1 d\xi_2 D(\xi_1, \xi_2) \frac{\delta^2}{\delta \nu(\xi_1) \delta \nu(\xi_2)} \quad , \quad \bar{=}$$

а $D(\xi_1, \xi_2)$ - функция типа пропагатора. Имея в виду дальнейшие приложения, мы объединим обе задачи следующим образом. Требуется найти функционал $\Pi[\nu]$ из соотношения

$$e^{\Pi[\nu]} = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \nu^2} \right\} e^{\pi[\nu]} \equiv e^{\overline{\pi[\nu]}} \quad , \quad (2.3)$$

где $\pi[\nu]$ - заданный функционал, а D - функция двух переменных. В случае, когда

$$D = -\frac{1}{2} \delta(\xi_1 - \xi_2) \quad , \quad (2.4)$$

значение функционала $\Pi[\nu]$ при $\nu = 0$ определяет согласно формуле (2.2) функциональный интеграл. Для упрощения записи действие дифференциального оператора будет обозначаться в некоторых случаях знаком усреднения как в (2.3).

Для наглядности введем графические обозначения

$$\begin{aligned} \pi[\nu] &\rightarrow \bigcirc, \quad \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \nu^2} \pi \rightarrow \bigcirc \text{ с волнистой линией}, \\ \exp \left\{ \frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \nu^2} \right\} \pi[\nu] = \bar{\pi} &\rightarrow \text{затененный круг}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В этих обозначениях, например,

$$\frac{i}{2} \int D \frac{\delta^2}{\delta \nu^2} \pi^2[\nu] \rightarrow 2 \text{ (затененный круг с волнистой линией) } \bigcirc + 2 \text{ (два круга с волнистой линией)},$$

где первые два члена в обычной терминологии будем называть несвязными графами. Подчеркнем, что хотя графы (2.5) и имеют очевидную аналогию с графами Фейнмана, во многих случаях их внешний вид не будет иметь ничего общего с обычными фейнмановскими диаграммами.

Предположим теперь, что структура функционала $\pi[\nu]$ такова, что имеется параметр малости, связанный с петлей. В этом случае существует аппроксимационная процедура, которую мы назовем корреляционной и согласно которой ищем функционал $\Pi[\nu]$ в виде ряда

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \Pi_n \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.3), немедленно получаем

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \bar{\pi} \rightarrow \text{---} \circ \text{---} , \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2} (\bar{\pi}^2 - \bar{\pi}^2) \rightarrow \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} + \dots + \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} + \dots , \\ \Pi_3 &= \frac{1}{3!} [\bar{\pi}^3 - \bar{\pi}^3 - 3\bar{\pi} (\bar{\pi}^2 - \bar{\pi}^2)] \rightarrow \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} + \dots + \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} + \dots , \\ \Pi_n &= \frac{1}{n!} \bar{\pi}^n \quad \left| \begin{array}{l} \dots \dots \dots \\ \text{связная} \\ \text{часть} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассматривая графики (2.7), убеждаемся, что корреляционный метод действительно соответствует разложению по числу петель, причём в Π_n даёт вклад лишь связанная часть суммы всех графов с n петлями.

Обрывая ряд (2.6), мы получаем приближенное выражение для функционала Π . Это приближение справедливо, если для любых $n \geq 2$ выполняется неравенство:

$$\bar{\pi}^n \left| \begin{array}{l} \text{связная} \\ \text{часть} \end{array} \right. \ll \bar{\pi}^n \left| \begin{array}{l} \text{несвязная} \\ \text{часть} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

В этом случае при разложении e^{Π} в ряд по степеням g учёт лишь Π_1 даёт нам главные члены в каждом порядке, доучёт Π_2 -поправки к ним и т.д.

С корреляционной процедурой тесно связано разложение вида

$$\overline{e^{g \pi}} = e^{g \bar{\pi}} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^n}{n!} (\overline{\pi - \bar{\pi}})^n \right]. \quad (2.9)$$

Такое разложение встречалось в работах^{4,5/}. Оно имеет в общем ту же область применимости, что и корреляционное приближение, и отличается от него тем, что даёт меньшее число поправочных членов в каждом порядке по g . Заметим, однако, что высшие поправочные члены в корреляционном разложении имеют, на наш взгляд, более простой геометрический смысл (см. (2.7)), что облегчает в некоторой степени его использование.

Как было отмечено выше, рассмотренные приближения хороши, когда существует параметр малости, связанный с петлей. Может случиться и так, что в теории имеется малый параметр, связанный с линией, т.е. возникающий при варьировании функционала $\pi[\nu]$. Тогда возможно провести разложение по числу линий, соединяющих разные петли. Представляя π в виде

$$\pi[\nu] = \int \delta \eta \tilde{\pi}[\eta] e^{-i \int \eta(\xi) \nu(\xi) d\xi} \quad (2.10)$$

и подставляя (2.10) в соотношение (2.3), получаем

$$e^{\Pi_{\epsilon}[\nu]} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \int \prod_{j=1}^n \{ \delta \eta_j \tilde{\pi}[\eta_j] \} \times \quad (2.11)$$

$$\times e^{-i \int \nu \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \right) - \frac{i}{2} \int D \left(\sum_{j=1}^n \eta_j^2 \right) - i \epsilon \int D \left(\sum_{i < j} \eta_i \eta_j \right)},$$

где членам с разными η приписан параметр малости ϵ , причём $\Pi[\nu] = \Pi_{\epsilon}[\nu]$ при $\epsilon = 1$.

Функционал $\Pi_\epsilon [\nu]$ ищем в виде

$$\Pi_\epsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \Pi_{n+1}. \quad (2.12)$$

Ограничиваясь лишь несколькими первыми членами ряда (2.12), мы приходим к приближению, которое назовём " $\eta_i \eta_j$ -приближением".

Вычисления приводят к следующим выражениям для первых членов:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= g \bar{\pi} \rightarrow \text{---} \circ \text{---} , \\ \Pi_2 &= \frac{ig^2}{2} \int D \left(\frac{\delta \bar{\pi}}{\delta \nu} \right)^2 \rightarrow \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} , \\ \Pi_3 &= \frac{g^2}{2i} \int D_{13} D_{24} \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta \nu_1 \delta \nu_2} \left\{ \frac{1}{2i} \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta \nu_3 \delta \nu_4} + \right. \\ &+ g \frac{\delta \bar{\pi}}{\delta \nu_3} \frac{\delta \bar{\pi}}{\delta \nu_4} \left. \right\} \rightarrow \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} \text{---} \circ \text{---} , \end{aligned} \quad (2.13)$$

где цифры означают порядок свертки, т.е.

$$\int D_{13} D_{24} \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta \nu_1 \delta \nu_2} \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta \nu_3 \delta \nu_4} \equiv \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 .$$

$$D(\xi_1, \xi_3) D(\xi_2, \xi_4) \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta \nu(\xi_1) \delta \nu(\xi_2)} \frac{\delta^2 \bar{\pi}}{\delta \nu(\xi_3) \delta \nu(\xi_4)}$$

и т.д.

Таким образом, мы действительно получили разложение по числу линий, соединяющих разные петли. Так как мы имеем дело со связными графами, числа таких линий k и петель n связаны неравенством

$$k \geq n - 1. \quad (2.14)$$

Это ведет к тому, что сумма первых n членов $\eta_i \eta_j$ -приближения содержится в аналогичной сумме корреляционного приближения, т.е. область применимости первого из них не шире, чем второго. Применение его, однако, может существенно упростить выкладки, так как при этом нет необходимости иметь дело с суммой



Отметим также, что первые члены во всех рассмотренных приближениях совпадают, а различия появляются лишь при вычислении поправок. Это обстоятельство является отражением того факта, что рассмотренные методы в применении к вычислению высокоэнергетической амплитуды рассеяния представляют различные варианты приближения прямолинейных путей/6/.

§3. Поправки к эйкональной формуле

Рассмотрим применение развитых выше методов для конкретного примера амплитуды рассеяния двух скалярных нуклонов в модели $L_{int} = g : \psi^2 \phi :$, которая в пренебрежении радиационными поправками и вкладами поляризации вакуума представима в виде/5/

$$f(q_1, q_2; p_1, p_2) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int dx D(x) e^{-ix(p_1 - q_1)} \int_0^1 d\lambda \times \quad (3.1)$$

$$\times S_\lambda(x; q_1, q_2; p_1, p_2) + (q_1 \rightarrow q_2),$$

где

$$S_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta\nu_1] \int_{-\infty}^{\infty} [\delta\nu_2] \exp\{ig^2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dr D[-x + 2\xi] a_1(\xi) -$$

$$-2r a_2(r) - 2 \int_{-\xi}^0 d\eta v_1(\eta) + 2 \int_{-\xi}^0 d\eta v_2(\eta) \} \stackrel{\text{def}}{=} \int [\delta v_1]_{-\infty}^{\infty} [\delta v_2]_{-\infty}^{\infty} e^{i g^2 \lambda \bar{\pi}} \quad (3.2)$$

$$a_{1,2}(\xi) = p_{1,2} \theta(\xi) + q_{1,2} \theta(-\xi) . \quad (3.3)$$

Будем искать асимптотику функционального интеграла S_λ при больших энергиях $s = (p_1 + p_2)^2$ и фиксированных передачах импульса $t = (p_1 - q_1)^2$. Проведенные вычисления показывают, что в этом случае с петлями связан параметр $1/s$, а с линиями $-1/\sqrt{s} x$, так что благодаря соотношению (2.14) в n -ном порядке по g^2 для величины S_λ при фиксированном $x \neq 0$ главный член будет иметь асимптотику $1/s^n$, а следующая поправка $1/s^n \sqrt{s}$. Таким образом, если мы хотим вычислить лишь два первых асимптотических члена в каждом порядке по g^2 , удобно применить $\eta_i \eta_j$ -приближение, обобщенное для двух функциональных переменных v_1 и v_2 , причём достаточно использовать приближение $e^{\Pi_2} = 1 + \Pi_2 + \dots$ по типу разложения (2.9). Итак, приближенная формула для S_λ имеет вид:

$$S_\lambda = e^{i g^2 \lambda \bar{\pi}} \left[1 + \frac{i \lambda^2 g^4}{4} \int d\eta \sum_{i=1,2} \left(\frac{\delta \bar{\pi}}{\delta v_i(\eta)} \right)^2 \right]_{\nu=0} . \quad (3.4)$$

Исходя из формулы (3.2) для S_λ , мы получаем следующее выражение для $\bar{\pi}$:

$$\bar{\pi} \Big|_{\nu=0} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k D(k) e^{-i k x} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi dr e^{2 i k [\xi a_1(\xi) - r a_2(r)]} x$$

^{x/} Напомним, что речь идет о петлях и линиях, определяемых правилами (2.5).

$$e^{ik^2(|\xi|+|r|)} = \frac{1}{(2\pi)^4 s} \int d^4 k D(k) e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi dr \times$$

$$e^{2ik[\xi \frac{a_1(\xi)}{\sqrt{s}} - r \frac{a_2(r)}{\sqrt{s}}]} e^{i \frac{k^2}{\sqrt{s}} [|\xi|+|r|]} \quad (3.5)$$

В формуле (3.5) мы сделали замену переменных $\xi, r \rightarrow \frac{\xi}{\sqrt{s}}, \frac{r}{\sqrt{s}}$.

Аналогично получаем

$$\frac{i\lambda^2 g^4}{4} \int d\eta \left[\left(\frac{\delta \bar{\pi}}{\delta \nu_1(\eta)} \right)^2 + \left(\frac{\delta \bar{\pi}}{\delta \nu_2(\eta)} \right)^2 \right] \Big|_{\nu=0} =$$

$$= - \frac{i\lambda^2 g^4}{(2\pi)^8 s^2} \int d^4 k_1 d^4 k_2 D(k_1) D(k_2) e^{-ix(k_1+k_2)} (k_1 k_2) \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 dr_1 d\xi_2 dr_2 e^{2ik_1[\xi_1 \frac{a_1(\xi_1)}{\sqrt{s}} - r_1 \frac{a_2(r_1)}{\sqrt{s}}]} + \frac{k_1^2}{\sqrt{s}} [|\xi_1|+|r_1|] \times (3.6)$$

$$e^{2ik_2[\xi_2 \frac{a_1(\xi_2)}{\sqrt{s}} - r_2 \frac{a_2(r_2)}{\sqrt{s}}]} + i \frac{k_2^2}{\sqrt{s}} [|\xi_2|+|r_2|] \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{s}} [\Phi(\xi_1, \xi_2) + \Phi(r_1, r_2)],$$

где

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \theta(\xi_1, \xi_2) [|\xi_1| \theta(|\xi_2| - |\xi_1|) + |\xi_2| \theta(|\xi_1| - |\xi_2|)]. \quad (3.7)$$

Найдем теперь асимптотику выражений (3.5) и (3.6) при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t . Выражение (3.5) надо при этом вычислить с точностью до членов $O(1/s^2)$, а (3.6) — с точностью $O(1/s^3)$. Для этого перейдем

в систему центра масс и направим ось z вдоль импульсов налетающих частиц. Тогда

$$p_{1,2} = \left\{ \frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, \pm \frac{\sqrt{s-4m^2}}{2} \right\},$$

$$q_{1,2} = \left\{ \frac{\sqrt{s}}{2}, \pm \vec{\Delta}_\perp \sqrt{1 + \frac{t}{s-4m^2}}, \pm \frac{\sqrt{s-4m^2}}{2} \left(1 + \frac{2t}{s-4m^2}\right) \right\}, \quad (3.8)$$

$$\vec{\Delta}_\perp^2 = -t$$

и, подставляя (3.8) в (3.3), получаем при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t

$$\frac{a_1(\xi)}{\sqrt{s}} \approx \frac{1}{2} n^+ + \frac{\vec{\Delta}_\perp}{\sqrt{s}} \theta(-\xi) + o\left(\frac{1}{s}\right),$$

$$\frac{a_2(\xi)}{\sqrt{s}} \approx \frac{1}{2} n^- - \frac{\vec{\Delta}_\perp}{\sqrt{s}} \theta(-\xi) + o\left(\frac{1}{s}\right), \quad (3.9)$$

$$n^\pm = (1, 0, 0, \pm 1).$$

Используя (3.9), получаем асимптотические выражения для (3.5) и (3.8). Именно,

$$\begin{aligned} \bar{\pi} &= \frac{1}{(2\pi)^4 s} \int d^4 k D(k) e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi dr e^{i\xi(k_0 - k_z) - ir(k_0 + k_z)} \times \\ &\times \left\{ 1 - 2i \frac{\vec{k}_\perp \vec{\Delta}_\perp}{\sqrt{s}} [\xi \theta(-\xi) + r \theta(-r)] + \frac{ik^2}{\sqrt{s}} [|\xi| + |r|] \right\} + o\left(\frac{1}{s^2}\right) \approx \\ &\approx -\frac{1}{8\pi^2 s} \int \frac{d^2 k_\perp}{k_\perp^2 + \mu^2} e^{i\vec{k}_\perp \vec{x}_\perp} + \frac{i\vec{\Delta}_\perp}{s\sqrt{s}} \frac{1}{8\pi^2} [(x_0 + x_z) \theta(-x_0 - x_z) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (x_z - x_0) \theta(x_0 - x_z) \int d^2 \vec{k}_\perp e^{i \vec{k}_\perp \vec{x}_\perp} \frac{\vec{k}_\perp}{k_\perp^2 + \mu^2} + \\
& + \frac{i}{16 \pi^2 s \sqrt{s}} [|x_0 + x_z| + |x_0 - x_z|] \int d^2 \vec{k}_\perp e^{i \vec{k}_\perp \vec{x}_\perp} \frac{\vec{k}_\perp^2}{k_\perp^2 + \mu^2} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \\
& = -\frac{1}{4 \pi s} K_0(\mu | \vec{x}_\perp |) - \frac{\mu}{4 \pi s \sqrt{s}} \frac{\vec{\Delta}_\perp \vec{x}_\perp}{| \vec{x}_\perp |} [(x_0 + x_z) \theta(-x_0 - x_z) + \\
& + (x_z - x_0) \theta(x_0 - x_z)] K_1(\mu | \vec{x}_\perp |) - \frac{i \mu^2}{8 \pi s \sqrt{s}} [|x_0 + x_z| + \\
& + |x_0 - x_z|] K_0(\mu | \vec{x}_\perp |) + O\left(\frac{1}{s^2}\right); \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{i \lambda^2 g^4}{4} \int d\eta \left[\left(\frac{\delta \bar{\pi}}{\delta \nu_1(\eta)} \right)^2 + \left(\frac{\delta \bar{\pi}}{\delta \nu_2(\eta)} \right)^2 \right] \Big|_{\nu=0} \approx \\
& \approx -\frac{i \lambda^2 g^4}{(2\pi)^8 s^2 \sqrt{s}} \int d^4 k_1 d^4 k_2 D(k_1) D(k_2) e^{-i x(k_1 + k_2)} (k_1 k_2) \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 dr_1 d\xi_2 dr_2 e^{i \xi_1(k_{10} - k_{1z}) - i r_1(k_{10} + k_{1z})} \times \\
& e^{i \xi_2(k_{20} - k_{2z}) - i r_2(k_{20} + k_{2z})} [\Phi(\xi_1, \xi_2) + \Phi(r_1, r_2)] + O\left(\frac{1}{s^3}\right) = \\
& = -\frac{i \lambda^2 g^4 \mu^2}{32 \pi^2 s^2 \sqrt{s}} [|x_0 + x_z| + |x_0 - x_z|] K_1^2(\mu | \vec{x}_\perp |) + O\left(\frac{1}{s^3}\right). \tag{3.11}
\end{aligned}$$

В формулах (3.10), (3.11) мы считаем $|\vec{x}_\perp| \neq 0$, что обеспечило нам сходимость всех интегралов. Функции K_0 и K_1 являются функциями Мак-Дональда нулевого и первого порядка и опреляются выражениями

$$K_0(\mu|\vec{x}_\perp|) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\vec{k}_\perp \frac{e^{i\vec{k}_\perp \vec{x}_\perp}}{k_\perp^2 + \mu^2}; \quad K_1(\mu|\vec{x}_\perp|) = -\frac{\partial K_0(\mu|\vec{x}_\perp|)}{\partial(\mu|\vec{x}_\perp|)}.$$

Теперь подставляем (3.10) и (3.11) в (3.4) и получаем искомую формулу для S_λ :

$$S_\lambda = e^{-\frac{i g^2 \lambda}{4\pi s} K_0(\mu|\vec{x}_\perp|)} \left\{ 1 - \frac{i g^2 \lambda \mu}{4\pi s \sqrt{s}} \frac{\Delta_\perp \vec{x}_\perp}{|\vec{x}_\perp|} \times \right. \\ \left. \times [(x_0 + x_z) \theta(-x_0 - x_z) + (x_z - x_0) \theta(x_0 - x_z)] K_1(\mu|\vec{x}_\perp|) \right\} + \quad (3.12)$$

$$+ \frac{g^2 \lambda \mu^2}{8\pi s \sqrt{s}} [|x_0 + x_z| + |x_0 - x_z|] K_0(\mu|\vec{x}_\perp|) - \\ - \frac{i g^4 \lambda^2 \mu^2}{32\pi^2 s^2 \sqrt{s}} [|x_0 + x_z| + |x_0 - x_z|] K_1^2(\mu|\vec{x}_\perp|).$$

В выражении (3.12) множитель перед фигурной скобкой соответствует эйкональному поведению амплитуды рассеяния, а члены в скобке определяют поправки относительной величины $1/\sqrt{s}$. Интересно отметить появление в поправочных членах зависимости от x_z и x_0 , т.е. возникновения так называемых эффектов запаздывания.

Проводя аналогичные вычисления, можно убедиться, что все последующие члены достаточно быстро убывают по сравнению с выписанными. Однако стоит подчеркнуть, что это отнюдь не означает доказательства справедливости в очерченных рамках эйконального представления для амплитуды рассеяния. Дело в том, что коэффициентные функции в асимпто-

тическом разложении, выражающиеся через функции Мак-Дональда, сингулярны на малых расстояниях, причём эта сингулярность усиливается по мере роста скорости убывания соответствующего члена при больших s . Следовательно, интегрирование величины S_λ в соответствии с формулой (3.1) при нахождении амплитуды рассеяния может привести, вообще говоря, к появлению членов, нарушающих в высших порядках по g^2 эйкональный ряд. На возможность появления таких экстрачленов в отдельных порядках теории возмущений в моделях типа ϕ^3 было указано в работах/11,12/.

Отметим в этой связи, что в рамках квазипотенциального подхода в квантовой теории поля имеется строгое обоснование эйконального представления на основе предположения о гладкости локального квазипотенциала.

В рассматриваемом нами примере мы имеем дело с сингулярным взаимодействием, приводящим в пренебрежении радиационными эффектами к квазипотенциалу типа Юкавы, требующему особой осторожности.

Мы надеемся, что развитые в работе методы могут оказаться полезными при рассмотрении круга вопросов, связанных с проблемой доказательства эйконального представления в моделях теории поля. Эта задача, однако, выходит за рамки настоящей статьи.

Авторы выражают глубокую признательность Н.Н. Боголюбову, Д.И. Блохинцеву, М.К. Поливанову, А.Н. Тавхелидзе за стимулирующие замечания, Б.М. Барбашову, М.К. Волкову, С.В. Голоскокову, А.В. Ефремову, В.В. Нестеренко, И.Т. Годорову за полезные обсуждения.

Литература

1. R.P. Feynman. Rev.Mod.Phys., 20, 376 (1947).
2. Н.Н. Боголюбов. ДАН СССР, 99, 225 (1954).
3. Е.С. Фрадкин. Труды ФИАН, 29, 7 (1965).
4. Б.М. Барбашов. ЖЭТФ, 48, 607 (1965).
5. Б.М. Барбашов, С.П. Кулешов, В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян. ТМФ, 3, 342 (1970).
6. B.M.Barbashov, S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, V.N.Pervushin, A.N.Sissakian, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 33B, 484 (1970).

7. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. *Nuovo Cim.*, 29, 380 (1963); В.Г. Калышевский, А.Н. Таухелидзе. "Проблемы теоретической физики", сборник статей, посвященный 60-летию Н.Н. Боголюбова, "Наука", Москва (1969).
8. D.I.Blokhintsev. *Nucl.Phys.*, 31, 628 (1962); S.P.Alliluyev, S.S.Gershtein, A.A.Logunov. *Phys.Lett.*, 18, 195 (1965). O.A.Khrustalev, V.I.Savrin, N.Ye.Tyurin. *JINR*, E2-4479, Dubna (1969); B.M.Barbashov, S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, A.N.Sissakian, A.N.Tavkhelidze. *Nuovo Cim.*, 4A, 182 (1971).
9. С.П. Кулешов, В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян, М.А. Смондырев. ОИЯИ, P2-8437, Дубна, 1972.
10. S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, A.N.Sissakian, M.A.Smondyrev. *JINR*, E2-5897, Dubna (1971).
11. G.Tiktopoulos, S.B.Treiman. Preprint of Princeton University (1970).
12. Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко. ТМФ, 4, 293 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1972 года.