АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Том 2

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1970

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 2, № 1
январь
1970

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЛАУБЕРОВСКОГО ТИПА ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ НА ГЛАДКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ

С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, А. Н. Сисакян

Дается вывод представления глауберовского типа для амплитуды рассеяния частиц со спином $^1/_2$ на гладких потенциалах при высоких энергиях налетающих частиц. Рассмотрение проводится в рамках двухкомпонентного описания и на основе уравнения Дирака.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно в работах [1, 2] был развит подход к изучению рассеяния частиц высоких энергий, основанный на квазипотенциальном уравнении Логунова и Тавхелидзе для амплитуды рассеяния в квантовой теории поля [3, 4]. Этот подход исходит из существенного предположения о гладкости квазипотенциала $V(E, \mathbf{r})$, описывающего взаимодействие двух адронов при высоких энергиях, как функции относительной координаты частиц $\mathbf{r}$ [5]. При этом рассеяние имеет квазиклассический характер как для малых [1], так и для больших углов рассеяния [5]. В частности, в работе [1] было показано, что при условии гладкости квазипотенциала для амплитуды рассеяния двух бесспиновых частиц высоких энергий на малые углы справедливо интегральное представление, близко связанное с представлением Глаубера для амплитуды рассеяния быстрых частиц на ядрах в эйкональном приближении [6].

Для выяснения роли гладкого квазипотенциала весьма важными являются результаты работ [7], где предложен новый метод, который позволяет решить уравнение Шредингера с гладким квазипотенциалом или условие унитарности с заданным вкладом неупругих каналов и найти асимптотику амплитуды упругого рассеяния при высоких энергиях. Полуфеноменологический анализ полученной амплитуды рассеяния, а также эффектов поляризации в пион-нуклонном рассеянии дает удовлетворительные результаты.

Представляет интерес изучение спиновых эффектов при рассеянии частиц высоких энергий. В настоящей работе мы дадим вывод представления глауберовского типа для амплитуды рассеяния частиц со спином $^1/_2$ на гладких потенциалах при высоких энергиях налетающих частиц. Рассмотрение ведется как в рамках двухкомпонентного описания [6], так и на основе уравнения Дирака.

Отметим, что эйкональное представление для амплитуды рассеяния быстрых дираковских частиц в кулоновском поле рассматривалось в работе Шиффа [8], а также в ряде других работ [9]. Однако метод, использованный в этих работах, неприменим, вообще говоря, в случае рассеяния, например, на скалярном или псевдоскалярном потенциалах, рассмотрение которых представляет определенный интерес при изучении взаимодействия адронов при высоких энергиях. Метод, предложенный в настоящей работе, является достаточно общим и позволяет рассматривать потенциалы произвольного типа.

## 2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЛАУБЕРА ДЛЯ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ $1/2$ В ДВУХКОМПОНЕНТНОМ ОПИСАНИИ

Рассмотрим задачу о рассеянии быстрой частицы со спином $1/2$ на основе уравнения типа Клейна — Гордона

$$(p^2+\nabla^2)\psi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}), \tag{2.1}$$

где потенциал содержит вклад спин-орбитальных сил

$$V(\mathbf{r}) = V_0(r) + V_1(r)(\sigma\mathbf{L}); \quad \mathbf{L} = -i[\mathbf{r}\times\nabla]. \tag{2.2}$$

Предполагается, что $V_0(r)$ и $V_1(r)$ есть скалярные гладкие функции $\mathbf{r}$, зависящие, вообще говоря, от энергии частицы $E=\sqrt{m^2+p^2}$. Очевидно, что при условии гладкости потенциала для достаточно больших энергий дебройлевская длина волны частицы $1/p$ становится много меньше эффективных размеров области взаимодействия, т. е. выполняются условия квазиклассичности рассеяния

$$|\dot{V}/Vp| \ll 1, \quad |V/p^2| \ll 1. \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ipz}\varphi(\mathbf{r}), \tag{2.4}$$

где двухкомпонентный спинор $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет граничному условию

$$\varphi(\mathbf{r})|_{z\to-\infty} = \varphi_0, \tag{2.5}$$

что соответствует налетающей частице со спиновой волновой функцией $\varphi_0$ и большим импульсом $p$, направленным по оси $z$. При выполнении условий (2.3) спинор $\varphi(\mathbf{r})$ является медленно меняющейся функцией и приближенно удовлетворяет уравнению

$$2ip\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (V_0 + V_1 p\,[\sigma\times\mathbf{r}]_z)\varphi. \tag{2.6}$$

Решение уравнения (2.6) с граничным условием (2.4) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0 \exp\{\chi_0(\rho,z) + i[\mathbf{n}\times\sigma]_z\chi_1(\rho,z)\}, \tag{2.7}$$

где

$$\chi_0(\rho,z) = \frac{1}{2ip}\int\limits_{-\infty}^{z} dz' V_0(\rho,z'), \tag{2.8а}$$

$$\chi_1(\rho,z) = \frac{\rho}{2}\int\limits_{-\infty}^{z} dz' V_1(\rho,z'). \tag{2.8б}$$

Здесь $\mathbf{r}=(\rho; z)$; $\mathbf{n}=\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}=(\cos\Phi,\ \sin\Phi)$, где $\Phi$ — азимутальный угол в плоскости $(x, y)$ и

$$[\sigma\times\mathbf{n}]_z=\sigma_x\sin\Phi-\sigma_y\cos\Phi, \qquad (2.9)$$

$$[\sigma\times\mathbf{n}]_z^2=1.$$

Для амплитуды рассеяния получим соответственно

$$f(p,\Delta)=-\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}}\varphi_0^*(\mathbf{p}')(V_0+p[\sigma\times\mathbf{r}]_zV_1)\psi(\mathbf{r})=$$

$$=\frac{p}{2\pi i}\int d^2\rho e^{-i\rho\Delta}\varphi_0^*(\mathbf{p}')\{e^{\chi_0+i[\mathbf{n}\times\sigma]_z\chi_1}-1\}\varphi_0(\mathbf{p}), \qquad (2.10)$$

где

$$\Delta=(\mathbf{p}'-\mathbf{p}),\quad \Delta\mathbf{p}\approx 0,$$

$$\chi_0\equiv\chi_0(\rho,+\infty),\quad \chi_1\equiv\chi_1(\rho,+\infty).$$

Используя формулы интегральных представлений функций Бесселя

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\Phi e^{ix\cos\Phi}, \qquad (2.11а)$$

$$J_1(x)=-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\Phi e^{ix\cos\Phi}\cos\Phi, \qquad (2.11б)$$

получим следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$f(p,\Delta)=\varphi_0^*(\mathbf{p}')[a+\sigma_y b]\varphi_0(\mathbf{p}), \qquad (2.12)$$

где

$$a=-ip\int_0^\infty\rho d\rho J_0(\rho\Delta)\{e^{\chi_0}\cos\chi_1-1\}, \qquad (2.13а)$$

$$b=-ip\int_0^\infty\rho d\rho J_1(\rho\Delta)e^{\chi_0}\sin\chi_1. \qquad (2.13б)$$

Спиновые волновые функции частиц в состояниях с определенными значениями спиральности $\lambda=\sigma\mathbf{p}/p$ и $\lambda'=\sigma\mathbf{p}'/p'$ имеют следующий вид [10]:

$$\varphi_0(\mathbf{p})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ при } \lambda={}^1/_2 \text{ и } -{}^1/_2, \qquad (2.14а)$$

$$\varphi_0(\mathbf{p}')=\begin{pmatrix}\cos\Theta/2\\-\sin\Theta/2\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}\sin\Theta/2\\\cos\Theta/2\end{pmatrix} \text{ при } \lambda'={}^1/_2 \text{ и } -{}^1/_2, \qquad (2.14б)$$

где $\Theta$ —угол рассеяния, причем

$$\left.\begin{aligned}\cos\Theta/2&=\sqrt{1-\Delta^2/4p^2}\to 1\\ \sin\Theta/2&=\Delta/2p\to 0\end{aligned}\right\} \text{ при } p\to\infty. \qquad (2.15)$$

Таким образом, величины $a$ и $b$, определяемые формулами (2.12) и (2.13), совпадают в пределе $p \to \infty$ при фиксированных переданных импульсах $\Delta$ с амплитудами рассеяния без переворота спина и с переворотом спина, соответственно.

## 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЛАУБЕРОВСКОГО ТИПА ДЛЯ РАССЕЯНИЯ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ

Рассмотрим теперь задачу о рассеянии быстрой спинорной частицы на гладком скалярном потенциале в рамках уравнения Дирака

$$(E + i\alpha\nabla - \beta m - \beta V(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r}) = 0. \tag{3.1}$$

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ipz}F^{(+)}(\mathbf{r}) + e^{-ipz}F^{(-)}(\mathbf{r}), \tag{3.2}$$

причем $E = \sqrt{m^2 + p^2} \approx p_z = p$.

Подставляя выражение (3.2) в уравнение (3.1) и требуя, чтобы члены, содержащие в качестве множителя большой параметр $p$, обращались в нуль, получим

$$\alpha_z F^{(\pm)} = \pm F^{(\pm)}. \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что

$$F^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sigma_z \end{pmatrix}\varphi^{(\pm)}(\mathbf{r}), \tag{3.4}$$

где $\varphi^{(\pm)}(\mathbf{r})$ — двухкомпонентные спиноры.

Из формул (3.2), (3.3) и (3.4) нетрудно видеть, что два члена в формуле (3.2) описывают соответственно распространение вдоль оси $z$ падающей и отраженной волн. При этом выполняются граничные условия

$$\varphi^{(+)}(\mathbf{r})\,|_{z\to-\infty} = \varphi_0, \quad \varphi^{(-)}(\mathbf{r})\,|_{z\to-\infty} = 0, \tag{3.5}$$

где $\varphi_0$ — постоянный двухкомпонентный спинор налетающей частицы. При выполнении условий (3.3) спиноры $\varphi^{(\pm)}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$i\,\frac{\partial\varphi^{(+)}}{\partial z} = e^{-2ipz}\,(W - [\sigma\times\nabla]_z)\,\varphi^{(-)}, \tag{3.6а}$$

$$i\,\frac{\partial\varphi^{(-)}}{\partial z} = -e^{2ipz}\,(W + [\sigma\times\nabla]_z)\,\varphi^{(+)}, \tag{3.6б}$$

где

$$W = m + V(\mathbf{r}).$$

Дифференциальные уравнения (3.6) с граничными условиями (3.5) эквивалентны паре интегральных уравнений вида

$$\varphi^{(+)}(z, \rho) = \varphi_0 - i\int_{-\infty}^{z} dz' e^{-2ipz'}(W(z', \rho) - [\sigma\times\nabla_\perp]_z)\,\varphi^{(-)}(z', \rho), \tag{3.7а}$$

$$\varphi^{(-)}(z', \rho) = i\int_{-\infty}^{z'} dz'' e^{2ipz''}(W(z'', \rho) + [\sigma\times\nabla_\perp]_z)\,\varphi^{(+)}(z'', \rho), \tag{3.7б}$$

где

$$\mathbf{r} = (z, \rho), \quad \nabla_\perp = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

Анализ уравнений (3.7) в пределе больших импульсов $p$ при условии гладкости потенциала $V(\mathbf{r})$ показывает, что спинор $\varphi^{(+)}$ является медленно меняющейся функцией $z$, тогда как $\varphi^{(-)}$ быстро осциллирует с изменением $z$.

Так, например, уравнение (3.7б) в пределе $p\to\infty$ дает

$$\varphi^{(-)}(z,\rho)=\frac{1}{2p}e^{2ipz}(W(z,\rho)+[\sigma\times\nabla_\perp]_z)\varphi^{(+)}(z,\rho)+O(1/p^2). \quad (3.8)$$

Подставляя выражение (3.8) в формулу (3.7а), получим следующее интегральное уравнение для спинора $\varphi^{(+)}$:

$$\varphi^{(+)}(z,\rho)=\varphi_0+\frac{1}{2ip}\int_{-\infty}^{z}dz'\left(W^2(z',\rho)-\nabla_\perp^2-[\sigma\times\mathbf{n}]_z\frac{dW}{d\rho}\right)\varphi^{(+)}(z',\rho). \quad (3.9)$$

В уравнении (3.9) следует отбросить член, содержащий $\dfrac{m^2-\nabla_\perp^2}{2p}$, подобный тому, которым мы пренебрегли при получении уравнения (3.6) [1]. В результате получим решение следующего вида:

$$\varphi^{(+)}(z,\rho)=\varphi_0\exp\left\{\frac{1}{2ip}\int_{-\infty}^{z}dz'\left(V^2+2mV-[\sigma\times\mathbf{n}]_z\frac{dV}{d\rho}\right)\right\}. \quad (3.10)$$

Выражение для амплитуды рассеяния удобно искать, квадрируя уравнение Дирака (3.1)

$$(p^2+\nabla^2-W^2+m^2-i\gamma\nabla W)\psi(\mathbf{r})=0, \quad (3.11)$$

откуда следует, что

$$f(p,\Delta)=-\frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\,\psi_{\mathbf{p}'}^{(0)*}(\mathbf{r})(V^2+2mV+i\gamma\nabla V)\psi(\mathbf{r}). \quad (3.12)$$

Здесь спинор

$$\psi_{\mathbf{p}'}^{(0)}(\mathbf{r})=e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \sigma_z\end{pmatrix}\varphi_0' \quad (3.13)$$

описывает рассеянную частицу с большой компонентой импульса вдоль оси $z$. Используя формулы (3.2), (3.4) и (3.10), получим для амплитуды рассеяния дираковских частиц выражение типа (2.12), причем

$$\chi_0(\rho)=\frac{1}{2ip}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\,(V^2(z,\rho)+2mV(z,\rho)), \quad (3.14а)$$

$$\chi_1(\rho)=-\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\,\frac{dV(z,\rho)}{d\rho}. \quad (3.14б)$$

Нетрудно видеть, что спин-флиповая часть амплитуды рассеяния быстрых дираковских частиц на скалярном потенциале обусловлена релятивистскими кинематическими эффектами. Интересно отметить, что в выражении (3.14а) для функции эйконала входит как линейная, так и квадратная

[1] Это есть ничто иное, как второй член разложения энергии частицы по степеням большого импульса $p_z$

$$E=p_z+\frac{m^2+p_\perp^2}{2p_z}+O(1/p_z^2).$$

степени потенциала. В нерелятивистском пределе, когда $|V| \ll m$, членом, содержащим квадрат потенциала, можно пренебречь, и выражение (3.14а) примет вид

$$\chi_0(\rho) = -\frac{i}{v}\int_{-\infty}^{+\infty} V(z, \rho)\,dz, \left(v = \frac{p_z}{m}\right), \tag{3.15}$$

что совпадает с известным результатом квантовой механики [6], полученным на основе уравнения Шредингера с потенциалом $V(\mathbf{r})$. В противоположном ультрарелятивистском случае, когда $|V| \gg m$, в формуле (3.14а) следует учитывать квадрат потенциала. Развитый метод позволяет получить эйкональное представление при рассеянии быстрых дираковских частиц на потенциалах других типов. Например, для псевдоскалярного потенциала из уравнения

$$(E + i\alpha\nabla - \beta m - \beta\gamma_5 V(\mathbf{r}))\,\psi(\mathbf{r}) = 0 \tag{3.16}$$

получим для амплитуды рассеяния частиц высоких энергий на малые углы выражение

$$f(p, \Delta) = \varphi_0^*(\mathbf{p}')\,[a + i\sigma_x b]\,\varphi_0(\mathbf{p}). \tag{3.17}$$

Здесь амплитуды $a$ и $b$ определяются формулами (2.13), в которых следует положить

$$\chi_0(\rho) = -\frac{1}{2ip}\int_{-\infty}^{\infty} V^2(z, \rho)\,dz, \tag{3.18а}$$

$$\chi_1(\rho) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV(z, \rho)}{d\rho}\,dz. \tag{3.18б}$$

Полученные результаты могут быть использованы при описании рассеяния быстрых спиновых частиц на тяжелых ядрах, а также при феноменологическом анализе пион-нуклонного рассеяния при высоких энергиях.

Авторы глубоко благодарны Н. Н. Боголюбову и А. Н. Тавхелидзе за постоянный интерес к работе и ценные замечания, Б. М. Барбашову, М. К. Поливанову, Ю. С. Полю, В. И. Саврину, Н. Е. Тюрину, О. А. Хрусталёву за полезные обсуждения.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
4 августа 1969 г.

### Литература

[1] В. Р. Гарсеванишвили, В. А. Матвеев, Л. А. Слепченко, А. Н. Тавхелидзе, Phys. Lett., 29B, 191, 1969. Доклад на конференции в Корал Гебелс, Майами, 1969.

[2] В. Р. Гарсеванишвили, С. В. Голоскоков, В. А. Матвеев, Л. А. Слепченко. Препринт, Е2 — 4361, ОИЯИ, 1969.

[3] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidse. Nuovo Cim., 29, 380, 1963.

[4] A. N. Tavkhelidse. Lectures on Quasipotential Methods in Field Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.

В. Г. Кадышевский, А. Н. Тавхелидзе. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел. Труды Международного семинара по теории элементарных частиц, Варна, 1969.

[5] S. P. Alliluyev, S. S. Gershtein, A. A. Logunov. Phys. Lett., 18, 195, 1965.
[6] R. I. Glauber. Lectures in Theoretical Physics, N. Y., 1, 315, 1959.
[7] В. И. Саврин, О. А. Хрусталев. ЯФ, 8, 1016, 1968. В. И. Саврин, Н. Е. Тюрин, О. А. Хрусталев, Препринт СТФ 69—23, ИФВЭ, Серпухов, 1969; В. И. Саврин, Н. Е. Тюрин, О. А. Хрусталев. Сообщения ОИЯИ, Е2—4479, 1969.
[8] L. I. Schiff. Phys. Rev., 103, 443, 1956.
[9] D. S. Saxon. Phys. Rev., 107, 871, 1957. A. Baker. Phys. Rev., B134, 240, 1964. D. R. Yennie, F. L. Boos, D. C. Rovenhall. Phys. Rev., B137, 882, 1965.
[10] А. С. Давыдов. Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
[11] С. П. Кулешов, В. А. Матвеев, А. Н. Сисакян. Сообщения ОИЯИ. Р2—4455, 1969.

---

## THE GLAUBER-TYPE REPRESENTATION FOR THE AMPLITUDE OF THE SCATTERING OF HIGH-ENERGY DIRAC PARTICLES ON SMOOTH POTENTIALS

**S. P. Kuleshov, V. A. Matveev, A. N. Sissakian**

The Glauber-type representation is deduced for the amplitude of the scattering of spin 1/2 particles on smooth potentials in the region of high energy of incident particles. The consideration is carried out in the two-component formalism and also with the aid of Dirac equation.

---