РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ В РАМКАХ CCJJ+DC МОДЕЛИ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

29 октября 2014 г.

В случае системы связанных джозефсоновских переходов (ДП) соотношение Джозефсона обобщается и принимает следующий вид:

$$\frac{\hbar}{2e}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i)$$

где $\alpha = \dfrac{\varepsilon r_D^2}{d_I d_s}$ – параметр емкостной связи между ДП.

$$I^i_{disp} = C_j \frac{\partial V_i}{\partial t}; \qquad I^i_{qp} = \frac{V_i}{R_j}; \qquad I^i_s = I_c \sin\varphi_i; \qquad I^i_{dif} = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{R_j} = \frac{1}{R_j}\left(\frac{\hbar}{2e}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - V_i\right).$$

$$I = I^i_{disp} + I^i_{qp} + I^i_s + I^i_{dif}$$

$$I = C_j \frac{\partial V_i}{\partial t} + I_c \sin\varphi_i + \frac{\hbar}{2eR_j}\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\hbar}{2e}\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i) \\ I = C_j \dfrac{\partial V_i}{\partial t} + I_c \sin\varphi_i + \dfrac{\hbar}{2eR_j}\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t} \end{cases}$$

Теперь обезразмерим величины входящие в вышеприведенных выражений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} = \dfrac{V_i}{V_0} - \alpha\left(\dfrac{V_{i+1}}{V_0} + \dfrac{V_{i-1}}{V_0} - 2\dfrac{V_i}{V_0}\right) \\ \dfrac{I}{I_c} = \dfrac{C_j V_0 \omega_p}{I_c}\dfrac{\partial}{\partial \tau}\left(\dfrac{V_i}{V_0}\right) + \sin\varphi_i + \dfrac{\hbar\omega_p}{2eI_cR_j}\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} \end{cases}$$

$$V_0 = \tfrac{\hbar\omega_p}{2e};\ \tau = \omega_p t;\ \beta = \tfrac{1}{R_j}\sqrt{\tfrac{\hbar}{2eI_cC_j}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i) \\ \dfrac{\partial V_i}{\partial t} = I - \sin\varphi_i - \beta\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t} \end{cases}$$

Системы уравнений в безразмерных единицах

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i) \\ I = \dfrac{\partial V_i}{\partial t} + \sin\varphi_i + \beta\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i) \\ \dfrac{\partial V_i}{\partial t} = I - \sin\varphi_i - \beta\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} \end{cases}$$

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_i^{j+1} = \varphi_i^j + \Delta\varphi_i^j \\ V_i^{j+1} = V_i^j + \Delta V_i^j \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta\varphi_i^j = \dfrac{1}{6}(P_i^{(1)j} + 2P_i^{(2)j} + 2P_i^{(3)j} + P_i^{(4)j}) \\ \Delta V_i^j = \dfrac{1}{6}(K_i^{(1)j} + 2K_i^{(2)j} + 2K_i^{(3)j} + K_i^{(4)j}) \end{cases}$$

Первые коеффициенты Рунге-Кутта

$$\begin{cases} P_i^{(1)} = \{V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i)\}h_t \\ K_i^{(1)} = \{I - \sin\varphi_i\}h_t - \beta P_i^{(1)} \end{cases}$$

Вторые коэффициенты Рунге-Кутта

$$\begin{cases} P_i^{(2)} = \left\{\left(V_i + \dfrac{K_i^{(1)}}{2}\right) - \alpha\left[\left(V_{i+1} + \dfrac{K_{i+1}^{(1)}}{2}\right) + \left(V_{i-1} + \dfrac{K_{i-1}^{(1)}}{2}\right) - 2\left(V_i + \dfrac{K_i^{(1)}}{2}\right)\right]\right\}h_t \\ K_i^{(2)} = \left\{I - \sin\left(\varphi_i + \dfrac{P_i^{(1)}}{2}\right)\right\}h_t - \beta P_i^{(2)} \end{cases}$$

Третьи коэффициенты Рунге-Кутта

$$\begin{cases} P_i^{(3)} = \left\{\left(V_i + \dfrac{K_i^{(2)}}{2}\right) - \alpha\left[\left(V_{i+1} + \dfrac{K_{i+1}^{(2)}}{2}\right) + \left(V_{i-1} + \dfrac{K_{i-1}^{(2)}}{2}\right) - 2\left(V_i + \dfrac{K_i^{(2)}}{2}\right)\right]\right\}h_t \\ K_i^{(3)} = \left\{I - \sin\left(\varphi_i + \dfrac{P_i^{(2)}}{2}\right)\right\}h_t - \beta P_i^{(3)} \end{cases}$$

Четвертые коэффициенты Рунге-Кутта

$$\begin{cases} P_i^{(4)} = \{(V_i + K_i^{(3)}) - \alpha[(V_{i+1} + K_{i+1}^{(3)}) + (V_{i-1} + K_{i-1}^{(3)}) - 2(V_i + K_i^{(3)})]\}h_t \\ K_i^{(4)} = \{I - \sin(\varphi_i + P_i^{(3)})\}h_t - \beta P_i^{(4)} \end{cases}$$

Граничные условия

В случии периодических граничных условиях

$$\begin{cases} \varphi_{i-1} = \varphi_N;\ \text{при } i = 1 \\ V_{i-1} = V_N;\ \text{при } i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{i-1}^{(1)} = P_N^{(1)};\ \ P_{i-1}^{(2)} = P_N^{(2)};\ \ P_{i-1}^{(3)} = P_N^{(3)};\ \ P_{i-1}^{(4)} = P_N^{(4)};\ \text{при } i = 1 \\ K_{i-1}^{(1)} = K_N^{(1)};\ \ K_{i-1}^{(2)} = K_N^{(2)};\ \ K_{i-1}^{(3)} = K_N^{(3)};\ \ K_{i-1}^{(4)} = K_N^{(4)};\ \text{при } i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{i+1} = \varphi_1;\ \text{при } i = N \\ V_{i+1} = V_1; \text{при }\ i = N \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{i+1}^{(1)} = P_1^{(1)};\;\; P_{i+1}^{(2)} = P_1^{(2)};\;\; P_{i+1}^{(3)} = P_1^{(3)};\;\; P_{i+1}^{(4)} = P_1^{(4)};\; \text{при } i = N \\ K_{i+1}^{(1)} = K_1^{(1)};\;\; K_{i+1}^{(2)} = K_1^{(2)};\;\; K_{i+1}^{(3)} = K_1^{(3)};\;\; K_{i+1}^{(4)} = K_1^{(4)};\; \text{при } i = N \end{cases}$$

В случии непериодических граничных условиях

$$\begin{cases} P_i^{(1)} = \{V_i - \alpha[V_{i+1} - (1+\gamma)V_i]\}h_t \\ P_i^{(2)} = \left\{\left(V_i + \dfrac{K_i^{(1)}}{2}\right) - \alpha\left[\left(V_{i+1} + \dfrac{K_{i+1}^{(1)}}{2}\right) - (1+\gamma)\left(V_i + \dfrac{K_i^{(1)}}{2}\right)\right]\right\}h_t \\ P_i^{(3)} = \left\{\left(V_i + \dfrac{K_i^{(2)}}{2}\right) - \alpha\left[\left(V_{i+1} + \dfrac{K_{i+1}^{(2)}}{2}\right) - (1+\gamma)\left(V_i + \dfrac{K_i^{(2)}}{2}\right)\right]\right\}h_t \\ P_i^{(4)} = \{(V_i + K_i^{(3)}) - \alpha[(V_{i+1} + K_{i+1}^{(3)}) - (1+\gamma)(V_i + K_i^{(3)})]\}h_t \end{cases} \quad \text{при } i = 1$$

$$\begin{cases} P_i^{(1)} = \{V_i - \alpha[V_{i-1} - (1+\gamma)V_i]\}h_t \\ P_i^{(2)} = \left\{\left(V_i + \dfrac{K_i^{(1)}}{2}\right) - \alpha\left[\left(V_{i-1} + \dfrac{K_{i-1}^{(1)}}{2}\right) - (1+\gamma)\left(V_i + \dfrac{K_i^{(1)}}{2}\right)\right]\right\}h_t \\ P_i^{(3)} = \left\{\left(V_i + \dfrac{K_i^{(2)}}{2}\right) - \alpha\left[\left(V_{i-1} + \dfrac{K_{i-1}^{(2)}}{2}\right) - (1+\gamma)\left(V_i + \dfrac{K_i^{(2)}}{2}\right)\right]\right\}h_t \\ P_i^{(4)} = \{(V_i + K_i^{(3)}) - \alpha[(V_{i-1} + K_{i-1}^{(3)}) - (1+\gamma)(V_i + K_i^{(3)})]\}h_t \end{cases} \quad \text{при } i = N$$