Резонанс в динамике спина под действием кноидального магнитного поля

Юлия Безвершенко, П.И. Голод

Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Киев
Национальный университет "Киево-Могилянская Академия"

Дубна, 01-02-2011

План доклада

1. Спин 1/2 в зависимых от времени магнитных полях
   - задача Раби - резонанс в поле вращающейся волны
   - предложение:
     $\vec{B} = \{2Nk\nu \mathrm{cn}(\nu t, k) \cos \omega t, 2Nk\nu \mathrm{cn}(\nu t, k) \sin \omega t, \omega_0\}$
   - формулировка задачи
2. Решение задачи
   - частные случаи
   - схема решения в общем случае
   - явные выражения для $N = 1,\ 2$
3. Интерпретация результатов
   - резонанс в нелинейно модулированном поле Раби
   - резонанс в поле, приближающемуся к "линейно поляризованной волне" с малой амплитудой
   - роль параметров внешнего поля в резонансе

Универсальная задача:

- **двухуровневая квантовая система + внешнее поле, индуцирующее динамику**

Этапы решения

- выбор поля (возможности для вычислений vs сопоставимость с экспериментом, предполагаемый результат)
- нахождение динамики (нетривиальное в общем случае!)
- анализ динамики (в зависимости от конкретных целей)

Спин 1/2 + магнитное поле

- **магнитный (спиновый) резонанс**: переход между состояниями "спин вверх" и "спин вниз"
- **управление квантовой динамикой (quantum control)**: перевод системы с одного состояния в другое (или в их суперпозицию)

Спин 1/2 + магнитное поле

Выбор поля

- поле задачи Раби $\vec{B}(t) = \{2a\cos\omega t, 2a\sin\omega t, \omega_0\}$
- последовательности магнитных импульсов $\vec{B}(t) = \{B_1 \mathrm{sech}\,\omega t, 0, \omega_0\}$

Поле Раби

используется как приближение к реальной экспериментальной ситуации **линейно поляризованной волны** $\vec{B}(t) = \{2a\cos\omega t, 0, \omega_0\}$

- если $a << \omega_0$, работает приближение вращающейся волны (RWA), резонанс при $\omega_0 = \omega$
- поправки к условию резонанса: $\omega_0 = \omega(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{5a^4}{64} - \ldots)$ - сдвиг Блоха-Зигерта

Нелинейно модулированное поле Раби

$$\vec{B} = \{2Nk\nu\,\mathrm{cn}(\nu t, k)\cos\omega t, 2Nk\nu\,\mathrm{cn}(\nu t, k)\sin\omega t, \omega_0\}, \quad N \in \mathbb{Z}$$

- При $\omega = 0$; $N \to \infty$, $k \to 0, Nk = const$ – линейно поляризованная волна: $\vec{B} \sim \{\cos(\nu t), 0, \omega_0\}$.
- При $k \to 1$ – N-солитонное возбуждение: $\Omega_- = \frac{2N\nu e^{-\imath\omega t}}{\cosh(\nu t)}$.

- В уравнения входит величина $\Omega_-(t) \equiv B_1(t) - \imath B_2(t)$,

$$\Omega_-(t) = 2Nk\nu\,\mathrm{cn}(\nu t|k)e^{-\imath\omega t}$$

- При $N = 1$ является решением "стационарного" нелинейного уравнения Шредингера ($x \leftrightarrow t$)

$$\Omega_-'' + 2\imath\Omega_-' + 2|\Omega|^2\Omega_- - \left[\omega^2 + \nu^2(2k^2 - 1)\right]\Omega_- = 0,$$

а при $N \geq 2$ – высших его аналогов.

Спин $1/2$ + переменное магнитное поле

Гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = (\vec{B}(t), \hat{\vec{\sigma}}),$$

$\vec{B}(t) = \{B_1(t), B_2(t), B_3(t)\}$ - произвольное магнитное поле,
$\hat{\vec{\sigma}} = \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}$ - оператор спинового момента.

Стандартное представление в виде матриц Паули

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

тогда гамильтониан системы можно подать в матричной форме

$$\hat{\mathcal{H}}(t) = \begin{pmatrix} B_3(t) & B_1(t) - \imath B_2(t) \\ B_1(t) + \imath B_2(t) & -B_3(t) \end{pmatrix}.$$

Спин $1/2$ + переменное магнитное поле

Состояние системы

$$\hat{\sigma}_3|\pm\rangle = \pm 1|\pm\rangle \qquad \Rightarrow \qquad |\Psi(t)\rangle = C_+(t)|+\rangle + C_-(t)|-\rangle,$$

$$|C_+(t)|^2 + |C_-(t)|^2 = 1$$

Эволюция состояния описывается

уравнением Шредингера

$$\imath\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t)|\Psi(t)\rangle,$$

или, явно,

$$\imath\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} C_+(t) \\ C_-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_3(t) & \Omega_-(t) \\ \Omega_+(t) & -\Omega_3(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_+(t) \\ C_-(t) \end{bmatrix}$$

где $\Omega_\pm(t) \equiv B_1(t) \pm \imath B_2(t)$, $\Omega_3(t) \equiv B_3(t)$.

Если $B_3 \equiv \Omega_3 = const$, тогда:

$$\frac{d^2 C_\pm}{dt^2} - \frac{d\Omega_\mp}{dt}\frac{1}{\Omega_\mp}\frac{dC_\pm}{dt} + \left(\Omega_3^2 + |\Omega_-|^2 - \imath\Omega_3 \frac{d\Omega_-}{dt}\frac{1}{\Omega_-}\right) = 0$$

В случае $\Omega_- = 2Nk\nu \mathrm{cn}(\nu t, k) e^{-\imath\omega t}$

уравнение, определяющее спиновую динамику:

$$\frac{d^2 C_\pm}{dt^2} + \left[\frac{\nu \mathrm{sn}(\nu t, k)\mathrm{dn}(\nu t, k)}{\mathrm{cn}(\nu t, k)} \pm \imath(\omega_0 - \omega)\right]\frac{dC_\pm}{dt} + \\ + N^2\nu^2 k^2 \mathrm{cn}^2(\nu t, k) C_\pm = 0$$

$$\frac{d^2 C_\pm}{d\tau^2} + \left[\frac{\mathrm{sn}(\tau, k)\mathrm{dn}(\tau, k)}{\mathrm{cn}(\tau, k)} \pm \imath\Delta\right]\frac{dC_\pm}{d\tau} + N^2 k^2 \mathrm{cn}^2(\tau, k) C_\pm = 0,$$

$$\Delta = \frac{(\omega_0 - \omega)}{\nu}, \qquad \tau = \nu t$$

Центральное уравнение

$$\frac{d^2C_\pm}{d\tau^2} + \left[\frac{\mathrm{sn}(\tau,k)\mathrm{dn}(\tau,k)}{\mathrm{cn}(\tau,k)} \pm \imath\Delta\right]\frac{dC_\pm}{d\tau} + N^2k^2\mathrm{cn}^2(\tau,k)C_\pm = 0,$$

$$\Delta = \frac{(\omega_0-\omega)}{\nu}, \qquad \tau = \nu t$$

Замена $\tau \to s = \mathrm{sn}(\tau,k) \;\to$

$$\frac{d^2C_\pm}{ds^2} - \left[\frac{k^2 s}{1-k^2s^2} \pm \frac{\imath\Delta}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}\right]\frac{dC_\pm}{ds} + \frac{N^2k^2}{1-k^2s^2}C_\pm = 0$$

уравнение типа Фукса на римановой поверхности, которая отвечает кривой

$$w^2 = (1-s^2)(1-k^2s^2)$$

Анализ частных случаев

$$\frac{d^2 C_\pm}{ds^2} - \left[\frac{k^2 s}{1-k^2 s^2} \pm \frac{\imath\Delta}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}\right]\frac{dC_\pm}{ds} + \frac{N^2 k^2}{1-k^2 s^2} C_\pm = 0$$

$$\downarrow$$

$\Delta = 0$

$$\frac{d^2 C_\pm}{ds^2} - \frac{k^2 s}{1-k^2 s^2}\frac{dC_\pm}{ds} + \frac{N^2 k^2}{1-k^2 s^2} C_\pm = 0$$

$k = 1$

$$\frac{d^2 C_\pm}{ds^2} - \frac{s \pm \imath\Delta}{1-s^2}\frac{dC_\pm}{ds} + \frac{N^2}{1-s^2} C_\pm = 0$$

Анализ частных случаев: $\Delta = 0$

$$\frac{d^2 C_\pm}{ds^2} - \frac{k^2 s}{1-k^2s^2}\frac{dC_\pm}{ds} + \frac{N^2k^2}{1-k^2s^2}C_\pm = 0$$

- имеет три особенные точки:
  $-\frac{1}{k},\ \frac{1}{k},\ \infty\ \rightarrow$ уравнение гипергеометрического типа
- $$C_+ = \alpha \mathrm{F}(N, -N, \frac{1}{2}, \frac{1-ks}{2})$$
- $N \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$C_+ = \mathrm{T}_N(-ks), \qquad C_- = -\imath\sqrt{1-k^2s^2}\,\mathrm{U}_{N-1}(-ks),$$

где $\mathrm{T}_N(x)$ и $\mathrm{U}_N(x)$ – полиномы Чебышева первого и второго родов, соответственно.

Важно:

при $\Delta = 0$ величина $|C_+|$ является полиномом степени N.

Анализ частных случаев: $k = 1$

$$\frac{d^2 C_\pm}{ds^2} - \frac{s \pm \imath\Delta}{1 - s^2}\frac{dC_\pm}{ds} + \frac{N^2}{1 - s^2} C_\pm = 0$$

- имеет три особенные точки:
  $-1,\ 1,\ \infty\ \rightarrow$ уравнение гипергеометрического типа
- $$C_+ = \alpha \mathrm{F}(N, -N, \frac{1}{2}(1 + \imath\Delta), \frac{1 - s}{2}),$$
- $N \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
  $$C_+ = P_N^{(-\frac{1}{2}\{1-\imath\Delta\}, -\frac{1}{2}\{1+\imath\Delta\})}(s)$$

где $P_N^{(a,b)}$ – полином Якоби.

Важно:

при $\Delta \neq 0$ величина $|C_+|$ остаётся полиномом степени N.

Метод решения

$$\frac{d^2 C_+}{ds^2} - \left[\frac{k^2 s}{1-k^2 s^2} + \frac{\imath\Delta}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}\right]\frac{dC_+}{ds} + \frac{N^2 k^2}{1-k^2 s^2} C_+ = 0$$

Будем искать решение в виде

$$C_+ = \exp \int_0^t \chi(\tau) d\tau,$$

тогда $\chi(t) = \frac{C'_+}{C_+}$, а соответствующее уравнение

$$\chi' + \chi^2 + p(s)\chi + q(s) = 0,$$

где $p(s) = -\left[\frac{k^2 s}{1-k^2 s^2} + \frac{\imath\Delta}{w}\right]$, $q(s) = \frac{N^2 k^2}{1-k^2 s^2}$,
$w = \sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}$ является уравнения Риккати.

Метод решения

- $\chi(s)$ можна представить в виде

$$\chi(s) = \mathcal{R}_0(s) + \frac{\widetilde{\mathcal{R}}_1}{w}$$

(согласовано и со структурой уравнения, и с разбиением $C_+ = |C_+|e^{\imath\varphi}$)

- в терминах модуля и фазы:

$$\mathcal{R}_0(s) = \frac{1}{2}\frac{|C_+|^{2'}}{|C_+|^2}, \qquad \mathcal{R}_1(s) = w\varphi'$$

$$C_+ = \exp\left(\int_0^s \left[\mathcal{R}_0(s') + \imath\frac{\mathcal{R}_1(s')}{w}\right] ds'\right)$$

Метод решения

Исходное уравнение превращается в систему уравнений Риккати

$$\mathcal{R}_0' + \mathcal{R}_0^2 - \frac{k^2 s}{1-k^2s^2}\mathcal{R}_0 + \frac{1}{w^2}(\Delta\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_1^2) + \frac{N^2k^2}{1-k^2s^2} = 0,$$

$$\mathcal{R}_1' + \mathcal{R}_1(2\mathcal{R}_0 - \frac{s}{s^2-1}) = \Delta\mathcal{R}_0.$$

- по известной $\mathcal{R}_0(s)$, функция $\mathcal{R}_1(s)$ определяется однозначно

$$\mathcal{R}_1(s) = \Delta\int_0^s \exp\left(-\int_y^s \left[2\mathcal{R}_0(s') - \frac{s'}{s^{2'}-1}\right]ds'\right)\mathcal{R}_0(y)dy$$

- предположение о полиномиальной структуре $|C_+|$ дает структуру $\mathcal{R}_0$
- тогда основная задача – решение уравнения на корни полинома, которое возникает как условие совместности системы уравнений на $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{R}_1$

Метод решения: общая схема

1. предлагается $|C_+|^2 \sim \mathcal{P}_{2N}(s, e_i)$
2. вычисляется $\mathcal{R}_0$: $\mathcal{R}_0(s) = \frac{1}{2}\frac{|C_+|^{2\prime}}{|C_+|^2}$
3. вычисляется $\mathcal{R}_1$:
   $\mathcal{R}_1(s) = \Delta \int_0^s \exp\left(-\int_y^s \left[2\mathcal{R}_0(s') - \frac{s'}{s^{2\prime}-1}\right] ds'\right) \mathcal{R}_0(y)dy$
4. $\mathcal{R}_0' + \mathcal{R}_0^2 - \frac{k^2 s}{1-k^2 s^2}\mathcal{R}_0 + \frac{1}{w^2}(\Delta\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_1^2) + \frac{N^2 k^2}{1-k^2 s^2} = 0 \to$ уравнение на корни e_i
5. $C_+ = \exp\left(\int_0^s \left[\mathcal{R}_0(s') + \imath\frac{\mathcal{R}_1(s')}{w}\right] ds'\right)$
6. после нахождения C_+ надо выписать оба линейно независимые решения стартового уравнения, уточнить соответсвующие C_- и составить линейные комбинации, удовлетворяющие начальным условиям:
   $$C_+(0) = 1, \qquad C_-(0) = 0$$

Решение при $N = 1$

- $|C_+|^2 = s^2 + e^2 \quad \to \quad \mathcal{R}_0(s) = \frac{s^2}{s^2+e^2} \quad \to \quad \mathcal{R}_1(s) = \Delta \frac{s^2-1}{s^2+e^2}$
- $\Rightarrow k^2 e^4 - (\Delta^2 - 1)e^2 - \Delta^2 = 0$

$$e_{1,2}^2 = \frac{(\Delta^2 - 1)}{2k^2} \pm \frac{1}{2k^2}\sqrt{(\Delta^2 - 1)^2 + 4k^2\Delta^2}$$

- $\varphi = \int_0^s \frac{\mathcal{R}_1}{w} ds' \quad \to \quad \Delta \left[\int_0^s \frac{ds'}{w} - (1 + e_i^2) \int_0^s \frac{ds'}{(s^{2\prime} + e_i^2) w} \right]$

$$\varphi_i = \Delta\tau - \Delta \frac{(1 + e_i^2)}{e_i^2} \Pi \left[-\frac{1}{e_i^2}, \mathrm{am}(\tau), k \right],$$

где $\Pi[n, \mathrm{am}(\tau), k] = \int_0^s \frac{dx}{(1-nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ – эллиптический интеграл третьего рода.

Решение при $N = 1$

Линейные комбинации, удовлетворяющие начальным условиям:

$$C_+(\tau) = \frac{\sqrt{e_1^2}}{e_1^2 - e_2^2}\left(s^2 + e_1^2\right)^{1/2} e^{-\imath\varphi_1} + \frac{\sqrt{-e_2^2}}{e_1^2 - e_2^2}\left(-s^2 - e_2^2\right)^{1/2} e^{-\imath\varphi_2}$$

$$C_-(\tau) = -\imath\frac{\sqrt{-e_2^2}}{e_1^2 - e_2^2}\left(s^2 + e_1^2\right)^{1/2} e^{\imath\varphi_1} + \imath\frac{\sqrt{e_1^2}}{e_1^2 - e_2^2}\left(-s^2 - e_2^2\right)^{1/2} e^{\imath\varphi_2}$$

$$\varphi_i = \Delta\tau - \Delta\frac{(1 + e_i^2)}{e_i^2}\,\Pi\left[-\frac{1}{e_i^2}, \mathrm{am}(\tau), k\right],$$

$$e_{1,2}^2 = \frac{(\Delta^2 - 1)}{2k^2} \pm \frac{1}{2k^2}\sqrt{(\Delta^2 - 1)^2 + 4k^2\Delta^2}, \qquad s = \mathrm{sn}(\tau, k).$$

Решение при $N = 2$

- $|C_+|^2 = (s^2 - e_1)(s^2 - e_2) \quad \rightarrow$
- $\mathcal{R}_0(s) = \frac{[2s^2-(e_1+e_2)]s}{(s^2-e_1)(s^2-e_2)} \quad \rightarrow \quad \mathcal{R}_1(s) = \Delta\frac{(s^2-1)(2/3s^2+4/3-(e1+e2))}{(s^2-e_1)(s^2-e_2)}$
- $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}s^6 - e_s s^4 + 2e_1e_2s^2\right)\left(9k^2e_s + \Delta^2 - 9\right) - 4k^2(e_1e_2)^2 + \frac{1}{9}(4-3e_s)^2\Delta^2 + e_1e_2\left(e_s(1-\Delta^2) + \frac{4\Delta^2}{3}\right) = 0, \quad e_s = e_1 + e_2$

- $e_{1,2} = -\frac{\Delta^2-9}{9k^2} \pm \frac{\sqrt{2}}{36k^2}\sqrt{9\left(9+\sqrt{D}\right) + 54\left(1-2k^2\right)\Delta^2 - 7\Delta^4}$
- $e'_{1,2} = -\frac{\Delta^2-9}{9k^2} \pm \frac{\sqrt{2}}{36k^2}\sqrt{9\left(9-\sqrt{D}\right) + 54\left(1-2k^2\right)\Delta^2 - 7\Delta^4}$
- $D = \left[\left(\Delta^2-9\right)\left(\Delta^2-1\right) + 12\Delta^2k^2\right]^2 + (4\Delta k)^2\left(\Delta^2 - 9 + 48k^2\right)^2$

Решение при $N = 2$

Линейные комбинации, удовлетворяющие НУ:

$$C_+(\tau) = \frac{\sqrt{(-e_1 e_2)}}{e_1' e_2' - e_1 e_2} \left[(-s^2 + e_1)(s^2 - e_2)\right]^{1/2} e^{\imath\varphi(e_1, e_2, \Delta)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(e_1' e_2')}}{e_1' e_2' - e_1 e_2} \left[(-s^2 + e_1')(-s^2 + e_2')\right]^{1/2} e^{\imath\varphi(e_1', e_2', \Delta)}$$

$$C_-(\tau) = \imath \frac{\sqrt{(e_1' e_2')}}{e_1' e_2' - e_1 e_2} \left[(-s^2 + e_1)(s^2 - e_2)\right]^{1/2} e^{\imath\varphi(e_1, e_2, -\Delta)} -$$

$$-\imath \frac{\sqrt{(-e_1 e_2)}}{e_1' e_2' - e_1 e_2} \left[(-s^2 + e_1')(-s^2 + e_2')\right]^{1/2} e^{\imath\varphi(e_1', e_2', -\Delta)}$$

- $\varphi(e_1, e_2, \Delta) = \Delta 2/3\tau - \Delta \frac{(e_1 - 1)(-4 + e_1 + 3e_2)}{3e_1(e_1 - e_2)} \Pi\left[\frac{1}{e_1}, \mathrm{am}(\tau), k\right] +$

$$+\Delta \frac{(e_2 - 1)(-4 + 3e_1 + e_2)}{3e_2(e_1 - e_2)} \Pi\left[\frac{1}{e_2}, \mathrm{am}(\tau), k\right]$$

Форма представления решений

Матрица оператора эволюции $\hat{\mathrm{U}}(t) \in \mathrm{SU}(2)$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathrm{C}}_+(t) \\ \widetilde{\mathrm{C}}_-(t) \end{bmatrix} = \hat{\mathrm{U}}(t) \begin{bmatrix} \widetilde{\mathrm{C}}_+(0) \\ \widetilde{\mathrm{C}}_-(0) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathrm{U}}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ -\beta^*(t) & \alpha^*(t) \end{bmatrix}.$$

Средние значения спиновых операторов $\Rightarrow$ вектор Блоха

$$\mathrm{S}_i(t) = \langle \Psi(0) | \hat{\mathrm{U}}^{-1}(t) \hat{\sigma}_i \hat{\mathrm{U}}(t) | \Psi(0) \rangle \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\mathrm{S}} = \{\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3\}$$

$$\mathrm{S}_1^2 + \mathrm{S}_2^2 + \mathrm{S}_3^2 = 1$$

Эволюция вектора Блоха для $S_3(0) = \pm 1$

$$\mathrm{S}_1(t) = -(\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)\mathrm{S}_3(0), \;\; \mathrm{S}_2(t) = \imath(\alpha^*\beta^* - \alpha\beta)\mathrm{S}_3(0),$$

$$\mathrm{S}_3(t) = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)\mathrm{S}_3(0)$$

Резонанс в нелинейно модулированном поле Раби

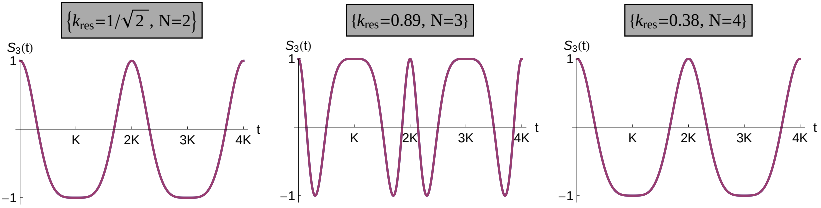
$$\vec{B} = \{2Nk\nu \mathrm{cn}(\nu t, k)\cos\omega t, 2Nk\nu \mathrm{cn}(\nu t, k)\sin\omega t, \omega_0\}$$

$$C_+ = \mathrm{T}_N(-ks), \quad C_- = -\imath\sqrt{1-k^2s^2}\,\mathrm{U}_{N-1}(-ks) \quad \rightarrow$$

$$S_3(\tau) = 2\mathrm{T}_N(-ks)^2 - 1$$

Условия резонанса:

- $\omega_0 = \omega$
- $S_3(\tau_{min}) = -1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{T}_N(-k_{res})^2 = 0$



Резонанс в поле $\vec{B} = \{2Nk\mathrm{cn}(\tau, k), 0, \omega_0\}$

Частоты

- постоянное поле – ω_0
- поперечное поле – $\frac{\pi}{2K(k)}\nu$

Предполагаемый резонанс

- $\omega_0 = \frac{\pi}{2K(k)}\nu$

При малых k

- $\omega_0 = \nu(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{5k^4}{64} - \ldots)$ – сдвиг Блоха-Зигерта!
- при $k \to 0$: $\omega_0 = \nu \;\Leftrightarrow\; \Delta = 1$

Резонанс в поле $\vec{B} = \{2k\mathrm{cn}(\tau, k), 0, \omega_0\} \rightarrow \Delta = 1$

При $N = 1$, $\Delta = 1 \Leftrightarrow \omega_0 = \nu$

$$S_3(\tau) = \{1 - k^2\mathrm{sn}^4(\tau, k)\}^{1/2} \times$$

$$\times \cos\left(k\tau + \frac{\imath}{2}\ln\left[\frac{\mathrm{dn}(\tau, k) - \imath k\mathrm{sn}(\tau, k)\mathrm{cn}(\tau, k)}{\mathrm{dn}(\tau, k) + \imath k\mathrm{sn}(\tau, k)\mathrm{cn}(\tau, k)}\right]\right)$$

В поле Раби $\vec{B}_R = \{2k\cos\omega_0 t, 2k\sin\omega_0 t, \omega_0\}$: $S_3(\tau) = \cos k\tau$

Условия резонанса

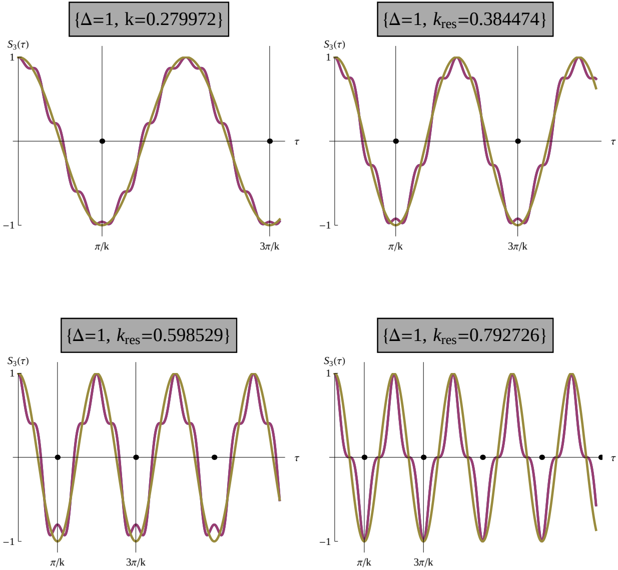
$S_3(\tau_{min}) = -1$

$$\mathrm{sn}(\tau_{min}, k) = 0 \;\Rightarrow\; \tau_{min} = 2mK(k),\; m \in \mathbb{Z}$$

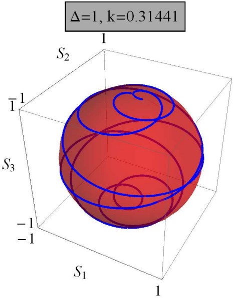
$$\cos(k\tau_{min}) = 1 \;\Rightarrow\; \tau_{min} = (2n+1)\frac{\pi}{k},\; n \in \mathbb{Z}$$

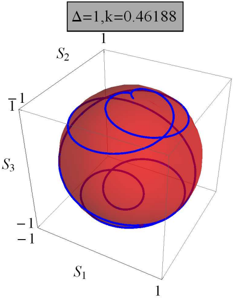
$$2mK(k) = (2n+1)\frac{\pi}{k}$$

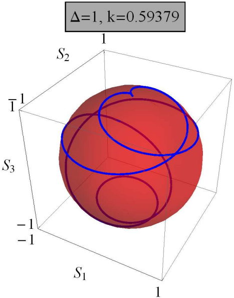
Резонанс в поле $\vec{B} = \{2k\mathrm{cn}(\omega_0 t, k), 0, \omega_0\} \rightarrow \Delta = 1$

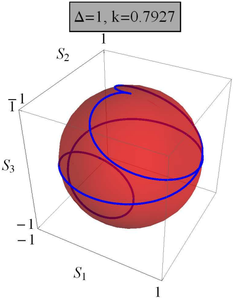


Резонанс в поле $\vec{B} = \{2k\,\mathrm{cn}(\omega_0 t, k), 0, \omega_0\} \;\rightarrow\; \Delta = 1$





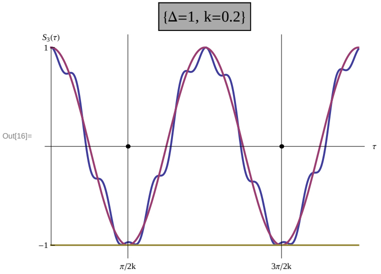




Резонанс в поле $\vec{B} = \{4k\,\mathrm{cn}(\omega_0 t, k), 0, \omega_0\} \;\rightarrow\; \Delta = 1,\;\; N = 2$

Условия резонанса:

- $\omega_0 = \omega$
- $2mK(k) = (2n+1)\frac{\pi}{2k}$



Вектор Блоха для произвольного спина j:

$$\mathrm{S}_i^{[j]}(t) = \langle\Psi(0)|\hat{\mathrm{U}}^{-1}(t)\ \hat{S}_i^{[j]}\ \hat{\mathrm{U}}(t)|\Psi(0)\rangle,$$

где $\hat{S}_i^{[j]}$ - оператор спина j. Если $|\Psi(0)\rangle = (1\ 0\ \dots\ 0) \Rightarrow,$

$$S_3^{[j]}(t) = \sum_{m=-j}^{j} m\ |\mathrm{U}_{mj}^{[j]}|^2$$

Матричные элементы неприводимых представлений группы SU(2)

$$\mathrm{U}_{nm}^{[j]} = \alpha^{j-m}(\alpha^*)^{j+m}(-\beta^*)^{m-n}\times$$

$$\times\sum_{l=M}^{N}\frac{\sqrt{(j-m)!(j-n)!(j+m)!(j+n)!}}{l!(j-m-l)!(j+n-l)!(m-n+l)!}\left(-\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}\right)^l,$$

$M = \max\,(0, n-m)$, $N = \min\,(j-m, j+m)$, $j = 0,\ 1/2,\ 1,\ \dots,$
$n, m = -j, \dots, j.$

Выводы

- исследована динамика спина 1/2 в поле $\vec{B} = (2Nk\nu \mathrm{cn}(\nu t|k)\cos\omega t, 2Nk\nu \mathrm{cn}(\nu t|k)\sin\omega t, \omega_0)$
- предложена общая схема поиска точного решения
- показано, что в нелинейно модулированном поле Раби резонанс возможен при $\omega_0 = \omega$ и k_{res}, определяемых из условия: $\mathrm{T}_N(-k_{res})^2 = 0$
- показано, что в поле $\vec{B} = \{2Nk\mathrm{cn}(\tau, k), 0, \omega_0\}$ условиями для резонанса являются $\omega_0 = \nu$ и $2mK(k) = (2n+1)\frac{\pi}{Nk}$
- непертурбативно получен сдвиг Блоха-Зигерта $\omega_0 = \nu(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{5k^4}{64} - ...)$
- полученные формулы по известному алгоритму могут быть обобщены на произвольный спин j

Спасибо за внимание.