

Численный анализ
пространственно локализованных решений
нелинейного уравнения Шредингера с
диссипацией и накачкой:
многосолитонные комплексы,
движущиеся солитоны

Е.В.Земляная

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 141980, Russia

9th Winter School on Theoretical Physics,
Dubna, JINR, 30 January - 6 February 2011

Roadmap

- Многосолитонные комплексы NLS с диссипацией и с накачкой (случаи прямой и параметрической накачки)
- Движущиеся солитоны с параметрической накачкой и диссипацией (случай нулевой и ненулевой диссипации)
- Темные солитоны с параметрической накачкой и диссипацией

Нелинейное уравнение Шредингера (NLS)

Нелинейное уравнение Шредингера с диссипацией и параметрической накачкой

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi - \Psi = h\bar{\Psi} - i\gamma\Psi; \quad (1)$$

Нелинейное уравнение Шредингера с диссипацией и прямой (внешней) накачкой

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi - \Psi = -h - i\gamma\Psi. \quad (2)$$

γ – коэффициент диссипации, h – амплитуда накачки,
 $\bar{\Psi}$ в (1) означает комплексное сопряжение Ψ

Формулировка стационарной задачи

Стационарные решения уравнений (1) и (2) удовлетворяют, соответственно, уравнению

$$\Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi - \Psi = h\bar{\Psi} - i\gamma\Psi \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\Psi(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (4)$$

и уравнению

$$\Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi - \Psi = -h - i\gamma\Psi \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\Psi_x(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Анализ устойчивости стационарных решений

Выбор малого возмущения в форме $(\delta u, \delta v)^T = e^{\lambda t} y(x)$, где

- $u + iv \equiv \Psi(x)e^{i\theta_+}$ в случае параметрической накачки;
- $u + iv \equiv \Psi(x)$ в случае внешней накачки

Вспомогательная задача для линеаризованного оператора:

$$\mathcal{H}y = \mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y, \quad \lambda = \mu - \gamma. \quad (7)$$

Оператор \mathcal{H} для случаев параметрической и внешней накачки:

$$\mathcal{H} = -\partial_x^2 + \begin{pmatrix} A_+^2 - 6u^2 - 2v^2 & \gamma - 4uv \\ \gamma - 4uv & A_-^2 - 6v^2 - 2u^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathcal{H} = -\partial_x^2 + \begin{pmatrix} 1 - 6u^2 - 2v^2 & \gamma - 4uv \\ \gamma - 4uv & 1 - 6v^2 - 2u^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Стационарные решения устойчивы при $\text{Re}\lambda \leq 0$ для всех λ

Аналитические решения и интегралы энергии

Стационарные односолитонные решения NLS с параметрической накачкой:

$$\Psi_{\pm}(x) = A_{\pm} e^{-i\theta_{\pm}} \operatorname{sech}(A_{\pm} x); \quad (10)$$

$$A_{\pm} = \sqrt{1 + h \cos 2\theta_{\pm}}; \quad \cos 2\theta_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{h^2}}.$$

Интеграл энергии для NLS с параметрической накачкой:

$$E = \operatorname{Re} \int \{ |\Psi_x|^2 + |\Psi|^2 - |\Psi|^4 + h\Psi^2 \} dx, \quad (11)$$

Интеграл энергии для NLS с прямой накачкой:

$$E = \int \{ |\Psi_x|^2 + |\Psi|^2 - |\Psi|^4 - h(\Psi + \bar{\Psi}) - |\Psi_0|^2 + |\Psi_0|^4 + h(\Psi_0 + \bar{\Psi}_0) \} dx. \quad (12)$$

Ψ_0 – асимптотическое значение решения при $|x| \rightarrow \infty$.

Ньютоновская схема (NLS с параметрической накачкой)

$$\psi_{s+1} = \psi_s + \tau_s \phi_s \quad (13)$$

s – номер итерации, $0 < \tau_s \leq 1$ – ньютоновский параметр, итерационная поправка ϕ_s есть решение линейной краевой задачи:

$$\Phi_\psi \phi_s = -\Phi \psi_s \quad \phi_s(\pm\infty) \rightarrow 0, \quad (14)$$

где Φ_ψ – производная Фреше оператора

$$\Phi \equiv \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi - \psi - h\bar{\psi} + i\gamma\psi. \quad (15)$$

Условие выхода из итерационного процесса: $\|\Phi\| < \varepsilon$; $\varepsilon > 0$.
Интервал $[-100, 100]$; шаг дискретной сетки по x $5 \cdot 10^{-3}$;
невязка $\epsilon = 10^{-10}$; нумеровская конечно-разностная
аппроксимация 4го порядка.

<http://www.jinr.ru/programs/jinrlib/contin-nlin>

<http://www.jinr.ru/programs/jinrlib/progs2h4>

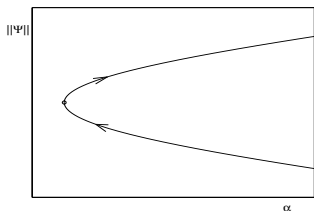
Схема продолжения по параметру.

При продолжении по параметру α решения $\Psi(x)$ стационарной граничной задачи

$$F(\Psi, \alpha) = 0 \quad (16)$$

(F – нелинейный оператор) выбирается скалярная характеристика $\|\Psi\|$ (бифуркационная мера) и строится ее зависимость от параметра $\|\Psi(\alpha)\|$.

- (1) алгоритм выбора начального приближения (предиктор)
- (2) алгоритм численного решения задачи задачи при заданном значении параметра (корректор)
- (3) алгоритм выбора следующего значения параметра.



Используется факт, что в точке поворота $d\alpha/d\|\Psi\| = 0$.

Е.В.Земляная, И.В.Барашенков

Матем. моделирование 16

№.10 (2004) 3-14

Схема продолжения по параметру. Продолжение

$$\Delta\alpha_j/\Delta\|\Psi\|_j < \epsilon, \quad (17)$$

$\epsilon > 0$ – заданное малое число, $\Delta\alpha_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ – шаг по параметру, $\Delta\|\Psi\|_j = \|\Psi(\alpha_j)\| - \|\Psi(\alpha_{j-1})\|$.

- При выполнении (17) шаг по параметру меняет знак.
- Формула для вычисления шага по параметру.

$$\Delta\alpha_{j+1} = \Delta\alpha_j \cdot \frac{\Delta\|\Psi(\alpha_{j-1})\|}{\Delta\|\Psi(\alpha_j)\|}. \quad (18)$$

- Численное решение нелинейной задачи при фиксированном значении параметров осуществляется на базе ньютоновской итерационной схемы с нумеровской конечно-разностной аппроксимации 4го порядка точности.
- Начальное приближение для ньютоновских итераций строится на основе эйлеровской схемы по результатам, полученным на двух предыдущих шагах по параметру.

Численное решение задачи на собственные значения (7)

- Фурье-разложение собственных функций u, v ($\omega_m = \frac{2\pi m}{L}$)

$$u(x) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} u^m \exp(-i\omega_m x), \quad v(x) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} v^m \exp(-i\omega_m x)$$

- Подстановка разложений в (7) и использование свертки.
- Полученная задача на собственные значения для заполненной матрицы решается численно с использованием стандартной программы из пакета EISPACK.
- Линеаризованные операторы (8) и (9) имеют в дискретном спектре пару вещественных собственных значений $\mu_{1,2} = \pm\gamma$. ($\mu_1 = \lambda_1 + \gamma$ связано с трансляционной инвариантностью исходного уравнения в частных производных.) Точность, с которой они вычисляются, служит показателем адекватности выбора N и L .
- При $L = 50$, $N = 500$ “тестовые” значения $\mu_{1,2}$ воспроизводились с точностью $5 \cdot 10^{-8}$

Численные результаты. NLS с параметрической накачкой.

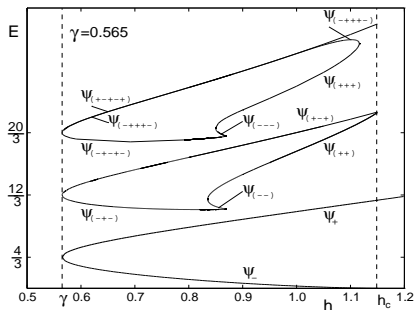


Рис.: Диаграмма существования и устойчивости одно-, двух- и трехсолитонных стационарных решений уравнения (3). Жирными линиями показаны устойчивые состояния.

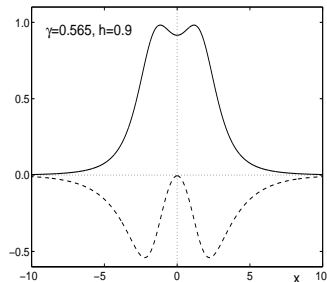


Рис.: Двухсолитонный комплекс Ψ_{++} уравнения (3). Сплошная – $\text{Re}\Psi_{++}$, штрихи – $\text{Im}\Psi_{++}$.

Barashenkov I.V.,
Zemlyanaya E.V. Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 2568-2571

Численные результаты.

NLS с параметрической накачкой. Продолжение

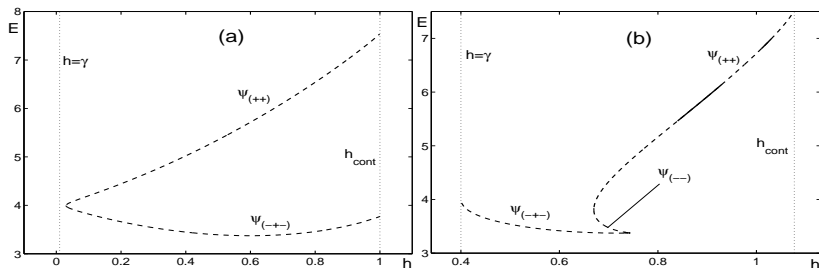


Рис.: Результаты продолжения двухсолитонного комплекса по параметру h для $\gamma = 0.01$ (a) и $\gamma = 0.4$ (b).

E.V.Zemlyanaya, I.V.Barashenkov, N.V.Alexeeva. Lect. Notes in Comp. Sciences **5434** (2009) 139-150

Численные результаты.

NLS с параметрической накачкой. Продолжение

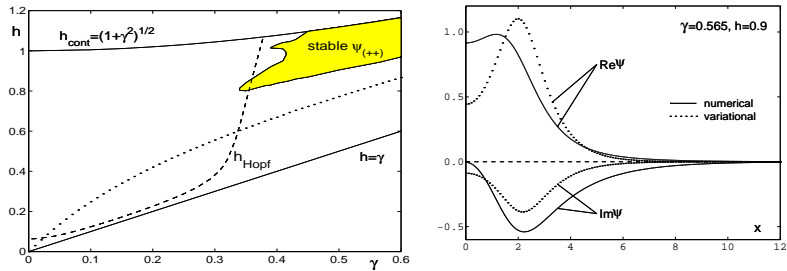


Рис.: Слева: диаграмма существования и устойчивости двухсолитонных комплексов $\Psi_{(++)}$ уравнения (3) на плоскости параметров (h, γ) .

Справа: Вариационная аппроксимация двухсолитонного комплекса.

Численные результаты. NLS с прямой накачкой

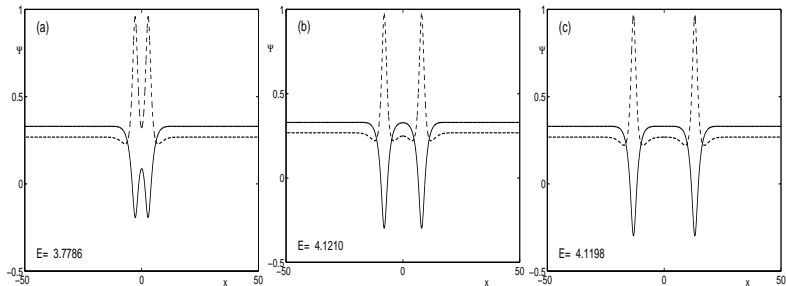


Рис.: Двухсолитонные решения уравнения (5). Сплошные линии – вещественная часть; штрихи – мнимая часть. (a): $\Psi_{(-,-)}^1$; (b): $\Psi_{(-,-)}^2$; (c): $\Psi_{(-,-)}^3$.

Численные результаты.

NLS с прямой накачкой. Продолжение

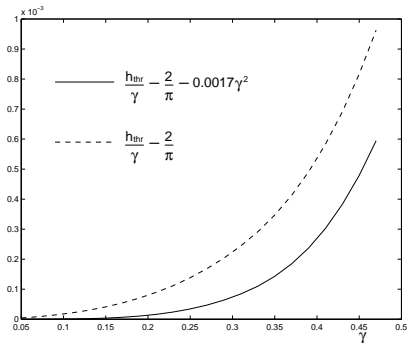


Рис.: Сравнение рассчитанной границы существования диссипативных солитонов с прямой накачкой с результатом теоретического исследования.

Barashenkov I.V., Zemlyanaya E.V. *Physica D* **132** No.3 (1999) 363-373

Движущиеся солитонные решения. Постановка задачи

NLS с кубической самофокусирующей нелинейностью, линейной диссипацией и параметрической накачкой

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi - \psi = h\bar{\psi} - i\gamma\psi. \quad (19)$$

Солитоны, движущиеся с постоянной скоростью

$$\psi(x, t) = \psi(x - Vt) \equiv \psi(\xi), \quad (20)$$

где $\psi(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-iV\psi_\xi + \psi_{\xi\xi} + 2|\psi|^2\psi - \psi = h\bar{\psi} - i\gamma\psi, \quad (21)$$

в котором скорость V рассматривается как еще один параметр.
Интегралы импульса и энергии:

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\psi}_x \psi - \psi_x \bar{\psi}) dx. \quad (22)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_x|^2 + |\psi|^2 - |\psi|^4 + h \operatorname{Re} \psi^2) dx. \quad (23)$$

Анализ устойчивости к малым возмущениям

Уравнение (19) линеаризуется в движущейся системе координат. Предполагая экспоненциальную зависимость линейного возмущения от времени

$$\delta\psi(\xi, t) = e^{\lambda t} [\delta u(\xi) + i\delta v(\xi)],$$

получаем задачу на собственные значения

$$\mathcal{H}_0 \vec{y} = (\lambda + \gamma) J \vec{y}, \quad (24)$$

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} -\partial_\xi^2 + 1 + h - 6u^2 - 2v^2 & -V\partial_\xi - 4uv \\ V\partial_\xi - 4uv & -\partial_\xi^2 + 1 - h - 6v^2 - 2u^2 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{y}(\xi) = (\delta u, \delta v)^T.$$

Критерий устойчивости – отсутствие собственных значений с положительной вещественной частью.

Необходимым и достаточным условием того, что некоторое движущееся недиссипативное решение может быть продолжено в $\gamma \neq 0$, является $P = 0$.

Численные результаты. Случай $\gamma = 0$.

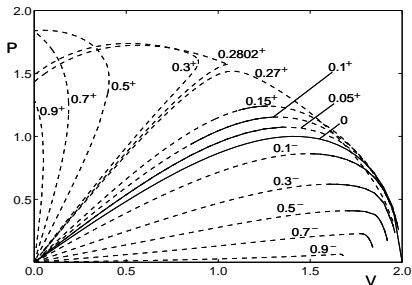


Рис.: Импульс недиссипативных движущихся односолитонных волн как функция V . Сплошными линиями помечены участки кривых, соответствующие устойчивым решениям.

Barashenkov I.V., Zemlyanaya E.V., Bär M. *Phys. Rev. E* **64** (2001)

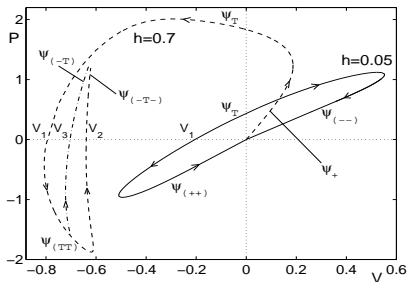


Рис.: Импульс недиссипативных движущихся волн как функция скорости. Штрихи и штрихпунктирные кривые относятся к случаю $h = 0.7$.

Движущиеся волны при $\gamma \neq 0$. Численная схема.

Дополнительное условие: $\text{Re}\psi(x_0) = \chi$.

Ньютоновская итерационная схема для одновременного вычисления функции ψ и неизвестного значения скорости V при заданном значении γ :

$$\psi_{s+1} = \psi_s + \tau_s \phi_s \quad V_{s+1} = V_s + \tau_s \mu_s \quad \phi_s = \phi_s^{(1)} + \mu_s \phi_s^{(2)} \quad (25)$$

s – номер итерации, $0 < \tau_s \leq 1$ – итерационный параметр $\phi_s^{(1)}$ и $\phi_s^{(2)}$ – решения двух краевых задач:

$$\Phi_\psi \phi_s^{(1)} = -\Phi \psi_s \quad \phi_s^{(1)}(\pm\infty) \rightarrow 0 \quad (26)$$

$$\Phi_V \phi_s^{(2)} = -\Phi_V \psi_s, \quad \phi_s^{(2)}(\pm\infty) \rightarrow 0 \quad (27)$$

где Φ_ψ – производная Фреше оператора

$$\Phi \equiv -iV\psi_\xi + \psi_{\xi\xi} + 2|\psi|^2\psi - \psi - h\bar{\psi} + i\gamma\psi. \quad (28)$$

Итерационная поправка μ_s вычисляется по формуле

$$\mu_s = [-(\text{Re}\psi_s(x_0) - \chi) - \text{Re}\phi_s^{(1)}(x_0)] / \text{Re}\phi_s^{(2)}(x_0).$$

Численные результаты.

Продолжение движущихся волн в $\gamma \neq 0$.

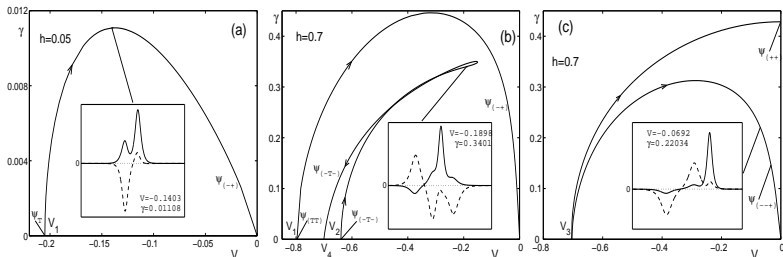


Рис.: Результаты численного продолжения недиссипативных движущихся солитонов. (а): малое h ; (б), (с): большое h . Вставки иллюстрируют решение на одной из внутренних точек кривой. (Сплошная: вещественная часть; штриховая: мнимая часть.) Каждая кривая имеет свой аналог с положительной скоростью, который является зеркальным отражением $V \rightarrow -V$ диаграммы. Barashenkov I.V., Zemlyanaya E.V. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **64** No.3 (2004) 800-818; Е.В.Земляная, И.В.Барашенков. Матем. моделирование **17** No.1 (2005) 65-78

Продолжение диссипативных решений в $V \neq 0$. I

Необходимое условие продолжения в $V \neq 0$ некоторого четного неподвижного диссипативного солитонного решения $\psi(x, h_0, \gamma_0) = u_0 + iv_0$ сводится к выполнению равенства

$$I(h) = 0, \quad I(h) \equiv \int (yv'_0 - wu'_0) dx \quad (29)$$

где интеграл $I(h)$ есть непрерывная функция от h , штрихи над u_0 и v_0 означают производные по x , $(y, w)^T = \vec{y}(x)$ – собственный вектор оператора \mathcal{L}^\dagger , соответствующий нулевому собственному значению $\mathcal{L}^\dagger \vec{y} = 0$, оператор \mathcal{L} имеет форму

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 + h_0 \cos 2\theta - 6u_0^2 - 2v_0^2 & \gamma_0 + h_0 \sin 2\theta - 4u_0 v_0 \\ -\gamma_0 + h_0 \sin 2\theta - 4u_0 v_0 & -\partial_x^2 + 1 - h_0 \cos 2\theta - 2u_0^2 - 6v_0^2 \end{pmatrix}$$

Численные результаты.

Продолжение диссипативных решений в $V \neq 0$

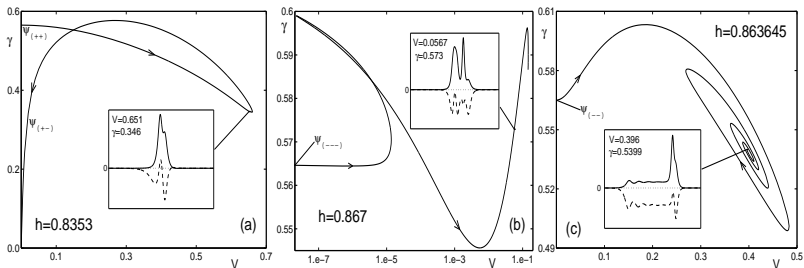


Рис.: Бифуркационные кривые, ответвляющиеся в точках (1),(2),(3). Кривые иллюстрируют соотношение между значением диссипации γ и скоростью V , с которой волна может двигаться для данного γ . Каждая кривая начинается в точке $\gamma = 0.565$ на вертикальной оси. Вставки показывают, как выглядит решение в определенных точках каждой ветви. (сплошная линия – вещественная часть; штрихи – мнимая часть.) В (b) используется логарифмическая шкала по V . Стрелки указывают направление численного продолжения.

Темные солитоны NLS с параметрической накачкой

NLS с нелинейностью **дефокусирующего** типа:

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi + \psi = h\bar{\psi} - i\gamma\psi. \quad (30)$$

γ – коэффициент линейной диссипации, h – амплитуда накачки, черта над ψ означает комплексное сопряжение. Движущиеся по закону $\psi(x - Vt)$ темные солитоны удовлетворяют ОДУ, скорость V рассматривается как параметр:

$$\frac{1}{2}\psi_{xx} - iV\psi_x - |\psi|^2\psi + \psi = h\psi^*, \quad (31)$$

Интеграл импульса

$$P = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x \psi^* dx, \quad (32)$$

Интеграл энергии

$$E = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|\psi_x|^2}{2} + \frac{|\psi|^4}{2} - |\psi|^2 + h\psi^2 + \frac{A^4}{2} \right) dx, \quad A^2 = 1 + h$$

Анализ устойчивости темных солитонов

- Устойчивость движущихся стенок проверялась численно, путем анализа собственных значений λ задачи

$$\mathcal{H}\vec{\varphi} = \lambda J\vec{\varphi}, \quad \vec{\varphi} = (u, v)^T, \quad (33)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{I}{2}\partial_x^2 + \begin{pmatrix} 3\mathcal{R}^2 + \mathcal{I}^2 + h & 2\mathcal{R}\mathcal{I} - V\partial_x + \gamma \\ 2\mathcal{R}\mathcal{I} + V\partial_x - \gamma & \mathcal{R}^2 + 3\mathcal{I}^2 - h \end{pmatrix},$$

J есть антисимметричная матрица с $J_{21} = -J_{12} = 1$.

- Уравнение (33) получается в результате линеаризации уравнения (30) по $\psi = \mathcal{R} + i\mathcal{I}$ в движущейся системе координат, в предположении, что $\delta\psi = (u + iv)e^{\lambda t}$.
- Критерий устойчивости – отсутствие собственных значений с $\text{Re}\lambda > 0$.

Известные аналитические решения

- Существует пара однородных ("плоских") решений, одно из которых всегда неустойчиво, в то время как другое устойчиво при всех $h \geq \gamma \geq 0$ и имеет вид

$$\psi^{(0)} = iAe^{i\theta}, \quad A = \sqrt{1 + \sqrt{h^2 - \gamma^2}}, \quad \theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\gamma}{h}. \quad (34)$$

- "Неелевская стенка" (Néel wall) или "стенка Изинга" (Ising wall):

$$\psi_N(x) = iA \tanh(Ax) e^{-i\theta}.$$

Можно аналитически показать, что при $\gamma \neq 0$ стенка (35) всегда устойчива.

- В случае $\gamma = 0$ решение (35) сосуществует с другим решением, известным в литературе как "блоховская стенка" (Bloch wall):

$$\psi_B(x) = -iA \tanh(2\sqrt{h}x) \pm \sqrt{1 - 3h} \operatorname{sech}(2\sqrt{h}x) \quad A^2 = 1 + h,$$

Численные результаты; $\gamma = 0$

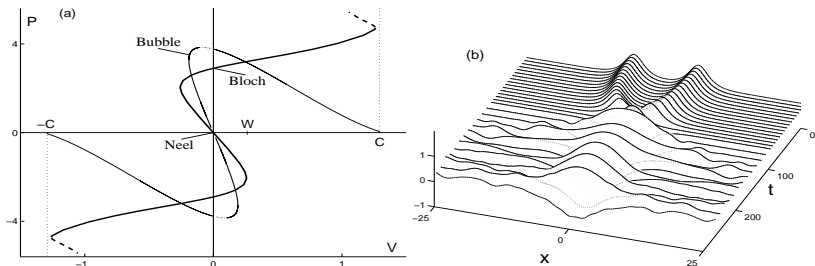


Рис.: (a) Импульс движущихся блоховской и неелевской стенок (жирная линия) и их неосциллирующего комплекса (тонкая линия). Для $|V|$ близких, но слегка меньших $c = (1 + 2h + \sqrt{4h(1+h)})^{1/2}$ к стенке присоединяются малоамплитудные bubble-комплексы с каждой стороны; Это происходит в точке поворота вблизи $|V| = c$. Точечные сегменты сплошных кривых показывают неустойчивые решения. (b) Формирование осциллирующего комплекса двух стенок типа бризера. (изображена только вещественная часть ψ). На (a) $h = 1/15$; на (b) $h = 0.1$. Barashenkov I.V., Woodford S.R., Zemlyanaya E.V. Phys. Rev. Lett. **90** No.5 (2003) 054103

Численные результаты; $\gamma \neq 0$

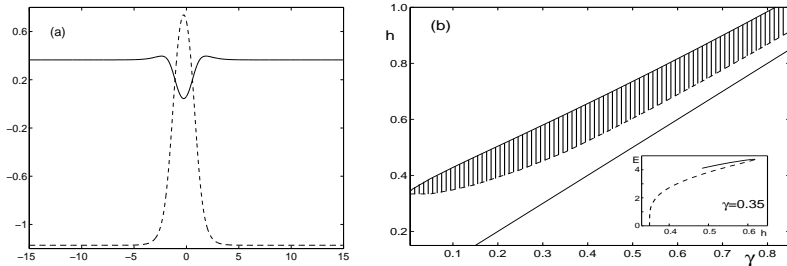
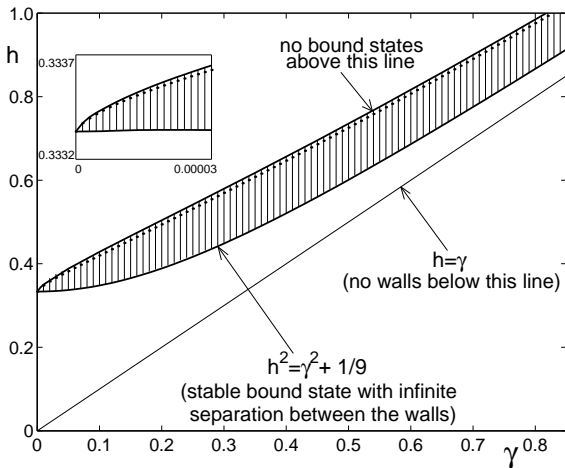


Рис.: (а) Пример устойчивого связанного состояния двух неелевских стенок при $\gamma = 0.35$, $h = 0.617$. Сплошная линия – вещественная часть, штрихи – мнимая часть. (б) Диаграмма существования этих решений (основной рисунок). Заштрихованная часть соответствует устойчивым решениям. На вставке представлена энергия как функция h для фиксированного значения γ . Сплошная и штриховая линии на вставке показывают устойчивую и неустойчивую ветки, соответственно. E.V.Zemlyanaya, I.V.Barashenkov, S.R.Woodford. Lect. Notes in Comp. Sciences, **3401** (2005) 590-597

Численные результаты; $\gamma \neq 0$. Продолжение



I.V.Barashenkov, S.R.Woodford, E.V.Zemlyanaya. Phys. Rev. E **75**
(2007) 026603

References

- Barashenkov I.V., Zemlyanaya E.V. Phys. Rev. Lett **83** (1999) 2568-2571
- Barashenkov I.V., Zemlyanaya E.V. Physica **D 132** 3 (1999) 363-373
- Е.В.Земляная, И.В.Барашенков. Матем. моделирование **16** 10 (2004) 3-14
- E.V.Zemlyanaya, I.V.Barashenkov, N.V.Alexeeva. Lect. Notes Comp. Sciences **5434** (2009) 139-150
- Barashenkov I.V., Zemlyanaya E.V., Bär M. Phys. Rev. **E 64** (2001) 016603
- Barashenkov I.V., Zemlyanaya E.V. SIAM J. Appl. Maths **64** 3 (2004) 800-818
- Е.В.Земляная, И.В.Барашенков. Матем. моделирование **17** 1 (2005) 65-78
- Barashenkov I.V., Woodford S.R., Zemlyanaya E.V. Phys. Rev. Lett. **90** 5 (2003) 054103
- E.V.Zemlyanaya, I.V.Barashenkov, S.R.Woodford. Lect. Notes in Comp. Sciences **3401** (2005) 590-597
- I.V.Barashenkov, S.R.Woodford, E.V.Zemlyanaya. Phys. Rev. **E 75** (2007) 026603