Свойства голографической ренормализационной группы матричной скалярной теории.

Ахмедов Э.Т.[†], Гахраманов И.Б.[*], Мусаев Э.Т.[†]

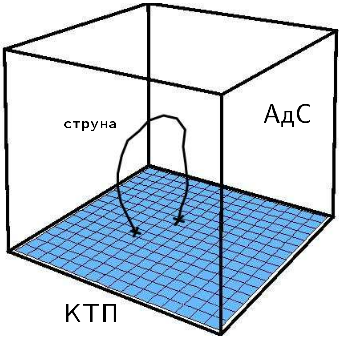
[†]Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, ИТЭФ
[*]Национальный Университет Науки и Технологий, МИСиС

Объединенный Институт Ядерной Физики
2 февраля 2011

Взгляд сверху.

- Мотивация. АдС/КТП соответствие;
- Вильсоновская ренормгруппа и уравнение Полчинского;
- Гамильтонова форма уравнения Полчинского для матричной скалярной теории;
- Интегрируемость полученного гамильтониана;
- Соответствие Ренормгруппа $\leftrightarrow$ Матричные Модели $\leftrightarrow$ Струны.

АдС/КТП соответствие



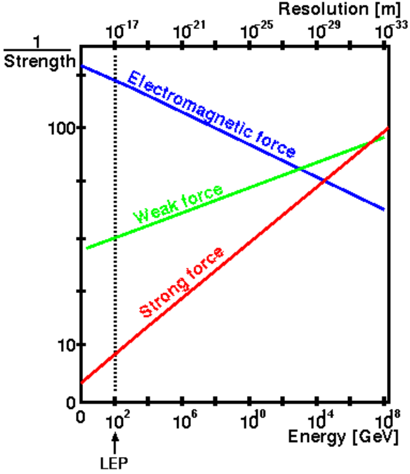
0. АдС/КТП соответствие заключается в дуальности между $\mathcal{N} = 4$ SYM в размерности 4 и теорией струн в пространстве $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$.

5+5=4+6

1. При перенормировании возникает дополнительный параметр в теории — шкала энергии Λ, где мы измеряем нашу физику.

2. Этот параметр можно рассматривать как дополнительное измерение, вдоль которого идет ренормгрупповая эволюция (“время”).

Ренормгруппа



Бегущие константы связи.

Константа взаимодействия зависит от масштаба энергий:

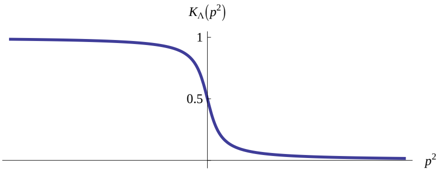
$$\Lambda \frac{dg}{d\Lambda} = \beta(g)$$

Ренормгруппа — это набор уравнений, описывающих изменение констант связи с изменением масштаба.

Модель скалярного эрмитового поля.

Действие модели:

$$\mathcal{S}[\phi] = -\frac{N}{2}\int_p \mathrm{Tr}\left[\phi(p)\,(p^2+m^2)\;\;K_\Lambda^{-1}(p^2)\,\phi(-p)\right] + N\mathcal{S}_I[\phi].$$

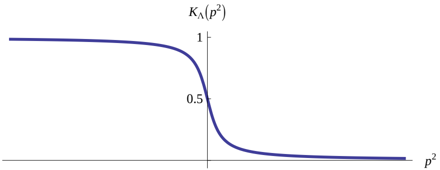


$K_\Lambda(p^2)$ подавляет высокоэнергетические моды в производящем функционале.

Модель скалярного эрмитового поля.

Действие модели:

$$\mathcal{S}[\phi] = -\frac{N}{2}\int_p \mathrm{Tr}\left[\phi(p)\,(p^2+m^2)\;\; K_\Lambda^{-1}(p^2)\,\phi(-p)\right] + N\mathcal{S}_I[\phi].$$



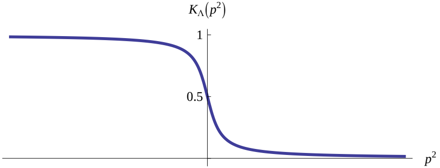
$K_\Lambda(p^2)$ подавляет высокоэнергетические моды в производящем функционале.

- Уравнения ренормгруппы (Полчинского) для некоторого подмножества операторов теории можно записать в виде гамильтонова потока при $N \to \infty$.

Модель скалярного эрмитового поля.

Действие модели:

$$\mathcal{S}[\phi] = -\frac{N}{2}\int_p \mathrm{Tr}\left[\phi(p)\,(p^2+m^2)\;\; K_\Lambda^{-1}(p^2)\,\phi(-p)\right] + N\mathcal{S}_I[\phi].$$

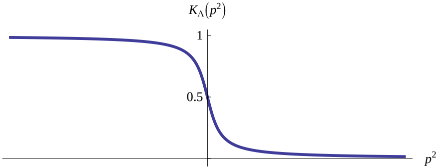


$K_\Lambda(p^2)$ подавляет высокоэнергетические моды в производящем функционале.

- Уравнения ренормгруппы (Полчинского) для некоторого подмножества операторов теории можно записать в виде гамильтонова потока при $N \to \infty$.
- Есть серьезные основания полагать, что этот гамильтонов поток является интегрируемым.

Действие модели:

$$\mathcal{S}[\phi] = -\frac{N}{2}\int_p \mathrm{Tr}\left[\phi(p)\,(p^2+m^2)\ \ K_\Lambda^{-1}(p^2)\,\phi(-p)\right] + N\mathcal{S}_I[\phi].$$



$K_\Lambda(p^2)$ подавляет высокоэнергетические моды в производящем функционале.

$$\mathcal{S}_I[\phi] = \sum_{l=0}^{\infty}\int_{k_1\ldots k_l} \mathrm{Tr}\left[\phi(k_1)\ \ \ldots\ \phi(k_l)\right]\ J_l(-k_1-\ldots-k_l),$$

Немного формул.

Уравнение Полчинского (J.Polchinski, Nucl.Phys. **B231** (1984) 269):

$$\frac{d\mathcal{S}_I[\phi]}{d\Lambda} = -\frac{1}{2}\int_p \frac{dG_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\,\mathrm{Tr}\left[N^{-1}\frac{\delta^2\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)} + \frac{\delta\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(p)}\frac{\delta\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(-p)}\right],$$

где $G_\Lambda(p^2) = K_\Lambda(p^2)(p^2+m^2)^{-1}$ — обрезанный на больших импульсах пропагатор.

Немного формул.

Уравнение Полчинского (J.Polchinski, Nucl.Phys. **B231** (1984) 269):

$$\frac{d\mathcal{S}_I[\phi]}{d\Lambda} = -\frac{1}{2}\int_p \frac{dG_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\,\mathrm{Tr}\left[N^{-1}\frac{\delta^2\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)} + \frac{\delta\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(p)}\frac{\delta\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(-p)}\right],$$

где $G_\Lambda(p^2) = K_\Lambda(p^2)(p^2+m^2)^{-1}$ — обрезанный на больших импульсах пропагатор.

Естественным требованием к теории с УФ обрезанием Λ является независимость физики от Λ.

От Λ ничего не зависит:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi\, e^{\mathcal{S}[\phi,\Lambda,\{J\}]}, \qquad \Lambda\frac{d\mathcal{Z}}{d\Lambda} = 0.$$

Переходим к физике на масштабе низких энергий.

После усреднения по высокоэнергетическим гармоникам получается уравнение определяющее динамику источников J_l в зависимости от масштаба:

Среднее с весом $\exp S_0[\varphi]$ (свободное действие).

$$\left\langle \frac{d\mathcal{S}_I[\phi]}{d\Lambda} \right\rangle = -\frac{1}{2}\int_p \frac{dG_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\,\mathrm{Tr}\left\langle N^{-1}\frac{\delta^2\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)} + \frac{\delta\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(p)}\frac{\delta\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(-p)}\right\rangle .$$

Здесь $\phi = \phi_0 + \varphi$ — сумма высоко- и низкоэнергетических гармоник. Это уравнение оказывается замкнутым для нашего выбора $\mathcal{S}_I$:

$$\mathcal{S}_I[\phi] = \sum_{l=0}^{\infty}\int_{k_1\ldots k_l} \mathrm{Tr}\left[\phi(k_1)\ \ \ldots\ \phi(k_l)\right]\ J_l(-k_1-\ldots-k_l).$$

Большие N (классический предел).

Известно, что пределе больших N верно следующее:

Факторизация средних.

$$\left\langle \prod_n \mathrm{Tr} O_n \right\rangle = \prod_n \langle \mathrm{Tr} O_n \rangle .$$

На самом деле, это допущение не стоит считать неким приближением в рамках поставленной задачи, поскольку АдС/КТП соответствие формулируется также для SU(N) SYM в пределе $N \to \infty$.

Каноническим импульсом для $J_k(x)$ оказывается среднее от оператора $\mathrm{Tr}[\phi(x)^k]$:

$$\Pi_k(p) = \int_{p_1 \dots p_k} \delta(p - p_1 - \dots - p_k) \langle \mathrm{Tr}[\phi(p_1) \dots \phi(p_k)] \rangle$$

В этих переменных уравнение Полчинского приобретает гамильтонову форму:

Уравнения РГ

$$\frac{d\, J_l(-q)}{dT} = \frac{\delta H}{\delta \Pi_l(q)}, \qquad \frac{d\, \Pi_l(q)}{dT} = -\frac{\delta H}{\delta J_l(-q)}, \qquad dT = d\log\Lambda \int_p \dot{G}_\Lambda(p^2).$$

Гамильтонова форма уравнения Полчинского.

С довольно простым Гамильтонианом:

Гамильтониан.

$$H = -\frac{1}{2}\int_{q_1 q_2}\sum_{l,s=0}^{\infty}\left[(l+s+2)\Pi_l(q_1)\Pi_s(q_2)J_{l+s+2}(-q_1-q_2)\ \right].$$

Если сделать обратное Фурье преобразование по индексам (и сделать несколько переопределений), то получим теорию с одним компактным измерением σ:

$$H = \int d^D x d\sigma\left[\Pi^2\partial_\sigma J\right].$$

Усредненное уравнение Полчинского (и еще такое же для корреляторов)

Среднее с весом $\exp S_0[\varphi]$ (свободное действие).

$$\left\langle \frac{d\mathcal{S}_I[\phi]}{d\Lambda} \right\rangle = -\frac{1}{2}\int_p \frac{dG_\Lambda(p^2)}{d\Lambda}\,\mathrm{Tr}\left\langle N^{-1}\frac{\delta^2\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)} + \frac{\delta\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(p)}\frac{\delta\mathcal{S}_I[\phi]}{\delta\phi(-p)} \right\rangle .$$

Это уравнение оказывается замкнутым для нашего выбора $\mathcal{S}_I$:

$$\mathcal{S}_I[\phi] = \sum_{l=0}^{\infty}\int_{k_1\ldots k_l} \mathrm{Tr}\left[\phi(k_1)\ \ldots\ \phi(k_l)\right] J_l(-k_1-\ldots-k_l) =$$

$$= \sum_{l=0}\int_x J(x)\mathrm{Tr}[\phi(x)^l].$$

J_k можно понимать как константы связи.

Уравнения движения

Ренормгрупповая эволюция некоторого подмножества операторов в теории описывается Гамильтоновой системой

$$H = \int d^D x d\sigma \left[\Pi^2 \partial_\sigma J\right].$$

Уравнения движения оказываются очень интересными:

$$-\partial_t P(t,\sigma) + P(t,\sigma)\partial_\sigma P(t,\sigma) = 0, \quad P(t,\sigma) = \frac{\dot{J}(t,\sigma)}{J(t,\sigma)'}.$$

- ☑ Это известное уравнение Бюргерса (Burgers), описывающее нелинейные процессы в среде.
- ☑ При этом “время” t связано с масштабом энергий Λ, а σ в некотором смысле нумерует источники $J_k(t)$:

$$J(t,\sigma) = \sum_k J_k(t)\sigma^k.$$

Перескалирование

Чтобы увидеть соответствие с матричными моделями и с теорией струн, следует перескалировать источники и операторы:

$$J_k(x) = \Lambda^{k(2-D)/2} g_k;$$
$$\Pi_k(x) = \Lambda^{k(D-2/2)} \pi_k.$$

В новых переменных гамильтониан становиться похитрее:

Гамильтониан

$$H = \int_{s,x} \left[\pi^2 g' + s\pi g'\right].$$

Уравнения движения и Матричная Модель

Уравнение движения на источники $g(x)$ выглядит совсем просто (хоть и нелинейное):

$$\dot{p} = p\partial_s p - s.$$

Здесь $p = \dot{g}/g'$.
Это уравнение совпадает с уравнением на поверхность ферми–уровня в теории с Гамильтонианом

$$H_F = \int dx \left[\frac{1}{2}\partial_x\psi^\dagger\partial_x\psi - \frac{x^2}{2}\psi^\dagger\psi + \bar{\mu}\psi^\dagger\psi\right].$$

В свою очередь этот гамильтониан получается как гамильтониан коллективных возбуждений при $N \to \infty$ в матричной модели

$$S = \beta N \int dt \left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\dot{M}^2] + \mathrm{Tr}[V(M)]\right], \quad V(\lambda) = \lambda/4(2-\lambda).$$

Фермионный гамильтониан

Гамильтониан H_F можно записать в виде интеграла по всей области Ферми от энергии одной частицы:

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{p_-}^{p_+} \frac{1}{2}(p^2 - x^2) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{6}(p_+^3 - p_-^3) - \frac{x^2}{3}(p_+ - p_-)\right].
\end{aligned}
$$

здесь $p_\pm = \pm\sqrt{x^2 - 2\bar{\mu}}$.
Заменой переменных его можно свести к гамильтониану скалярного поля с экспоненциально растущей константой связи:

Скалярное поле со стеной

$$
H = \frac{1}{2}\int dq \left[\bar{\pi}_{\mathcal{S}}^2 + (\partial_q \mathcal{S})^2 + e^{2q} O(\mathcal{S}^3)\right]. \quad (1)
$$

Оказывается такое же поведение склярных полей возникает в струнной теории

Теория струн

$$S_{ST} = \frac{1}{2\pi}\int d^\sigma\left[\sqrt{g}g^{ab}\eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu + Q\sqrt{g}RX^1 + \mu e^{\alpha X^1}\right], \qquad (2)$$

при $D = 2$ (здесь $Q^2 = (26 - D)/3$). Причем, экспоненциально растущий потенциал (Лиувиллева стена) возникает как фон тахиона. Название “тахион” здесь означает лишь первую моду возбуждений струны. При $D = 2$ “тахион” оказывается безмассовым.

Заключение

- ☑ Таким образом, мы показали, что уравнения Полчинского для матричной скалярной теории при больших N выглядят как гамильтоновы уравнения, причем роль времени играет некоторая комбинация из шкалы энергии;

Заключение

- ☑ Таким образом, мы показали, что уравнения Полчинского для матричной скалярной теории при больших N выглядят как гамильтоновы уравнения, причем роль времени играет некоторая комбинация из шкалы энергии;
- ☑ Очень похоже на то, что полученная гамильтонова система является интегрируемой. То есть, эволюция некоторого подмножества операторов в матричной теории поля описывается интегрируемой системой.

Заключение

- ☑ Таким образом, мы показали, что уравнения Полчинского для матричной скалярной теории при больших N выглядят как гамильтоновы уравнения, причем роль времени играет некоторая комбинация из шкалы энергии;
- ☑ Очень похоже на то, что полученная гамильтонова система является интегрируемой. То есть, эволюция некоторого подмножества операторов в матричной теории поля описывается интегрируемой системой.
- ☑ Эти уравнения могут быть использованы для вычисления бега констант связи в специальных теориях, например в ϕ^4. Достаточно выбрать подходящие начальные условия для J_l.

Заключение

- ☑ Таким образом, мы показали, что уравнения Полчинского для матричной скалярной теории при больших N выглядят как гамильтоновы уравнения, причем роль времени играет некоторая комбинация из шкалы энергии;
- ☑ Очень похоже на то, что полученная гамильтонова система является интегрируемой. То есть, эволюция некоторого подмножества операторов в матричной теории поля описывается интегрируемой системой.
- ☑ Эти уравнения могут быть использованы для вычисления бега констант связи в специальных теориях, например в ϕ^4. Достаточно выбрать подходящие начальные условия для J_l.
- ☑ Обнаружено соответствие между ренормгрупповой эволюцей матричной скалярной теории, задаваемой уравнением Полчинского и теорией струн при $D = 2$. А также с теорией коллективный фермионов, возникающих в матричных моделях.

Послесловие

? Понятно, что однаследовые операторы не образуют полного базиса в матричной скалярной теории. В настоящее время мы рассматриваем операторы с производными наиболее общего вида. А также теорию n–поля

$$\mathcal{S} = \int \partial_\mu \vec{n} \partial^\mu \vec{n} d^D x, \quad (\vec{n}, \vec{n}) = 1.$$

Есть предположение, что существует соответствие между такой теорией и теорией высших спинов в пространстве AdS:

`I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, hep-th/0210114.`

Возникает задача: получить теорию с высшими спинами из ренормгруппы для модели n–поля. Кроме того, выяснить как там появляется фон АдС.

*** Спасибо за внимание! ***