

*Физика вихревых состояний в
сверхпроводниках.*

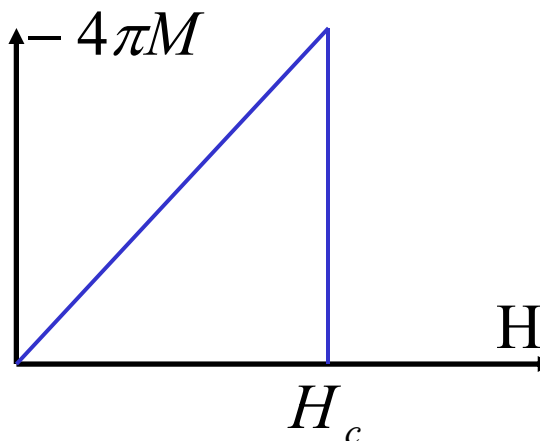
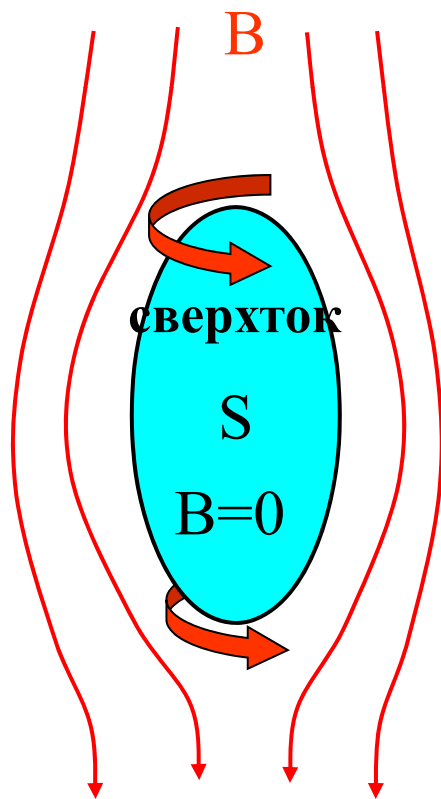
*Еще один пример применения уравнений Боголюбова в
современной физике сверхпроводимости.*

План

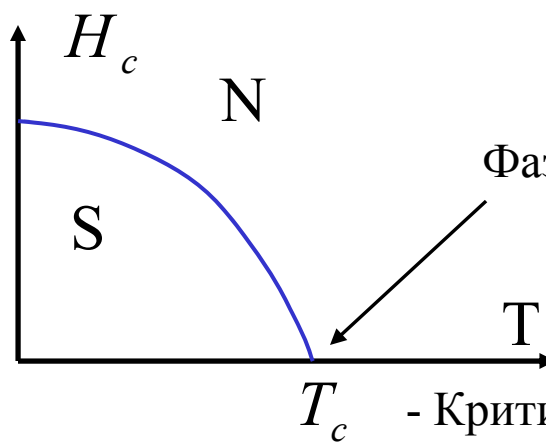
- ◆ **Сверхпроводники в магнитном поле.
Сверхпроводимость I и II рода.**
- ◆ **Феноменологическая теория сверхпроводимости
Гинзбурга-Ландау**
- ◆ **Изолированный вихрь.**
- ◆ **Вихревая решетка.**
- ◆ **Свойства вихревого состояния.**
- ◆ **Микроскопическая теория вихревого состояния.
Андреевские уровни в коре вихря.**

Сверхпроводники в магнитном поле.

Эффект
Мейсснера –
Оксенфельда
(1933)



Фазовый переход 1-ого рода

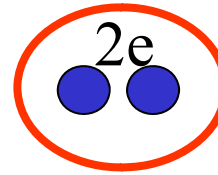


T_c - Критическая температура
сверхпроводящего перехода

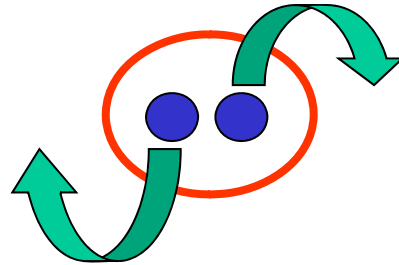
Сверхпроводимость I рода.

Почему магнитное поле разрушает сверхпроводимость?

Механизмы взаимодействия магнитного поля с куперовской парой

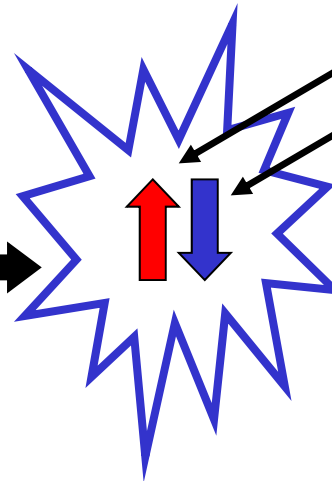


✿ орбитальный (электромагнитный) механизм



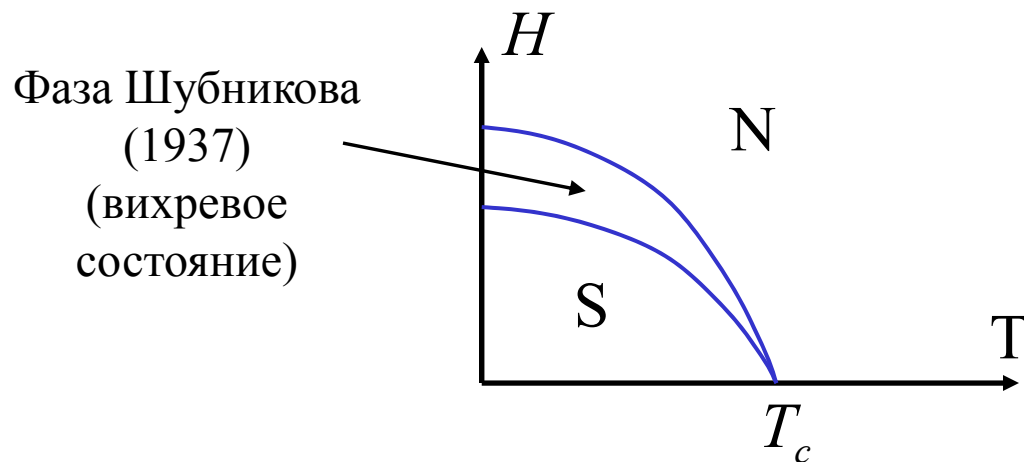
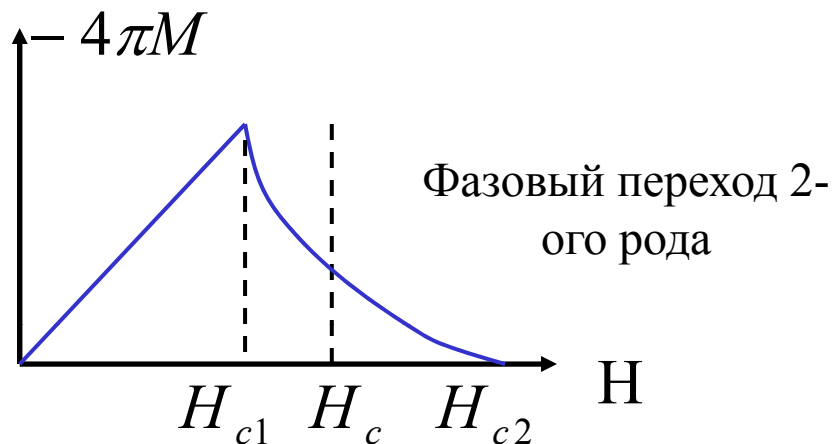
✿ взаимодействие с электронными спинами

B



Спины электронов в паре

Сверхпроводимость II рода.



Феноменологическая теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау

Параметр порядка

$$\Psi = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\varphi}$$

Плотность
сверхпроводящих
электронов

Для медленных изменений параметра порядка в пространстве:

Свободная энергия

$$F = F_n + \int \left(\frac{\hbar^2}{4m} |\nabla \Psi|^2 + a |\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 \right) dV$$

Свободная энергия
нормального состояния

$a = \alpha(T - T_c)$

Равновесный параметр порядка в
однородном сверхпроводнике

$$|\Psi|^2 = \frac{\alpha(T_c - T)}{b}$$

Включаем магнитное поле:

Требование калибровочной инвариантности

$$\nabla\Psi \rightarrow \nabla\Psi - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A}\Psi$$

← ?

$$\tilde{F} = F_n + \int \left(\frac{\hbar^2}{4m} \left| \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 + a|\Psi|^2 + \frac{b}{2} |\Psi|^4 + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} - \frac{\vec{B}\vec{H}}{4\pi} \right) dV$$

Энергия магнитного поля При заданном поле \vec{H}

Вариация функционала

по Ψ^* 

Уравнение Гинзбурга-Ландау

по \vec{A} 

Уравнение Максвелла

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2 \Psi + a\Psi + b|\Psi|^2\Psi = 0$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{j} = -\frac{ie\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \vec{A}$$

$$\vec{j} = \frac{e\hbar}{m} |\Psi|^2 \left(-\frac{2e}{\hbar c} \vec{A} + \nabla \varphi \right)$$

$$\vec{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \vec{A}$$

Уравнение Лондонов

Граничные условия

I-S

$$\vec{n} \left(\nabla \Psi - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \Psi \right) = 0$$

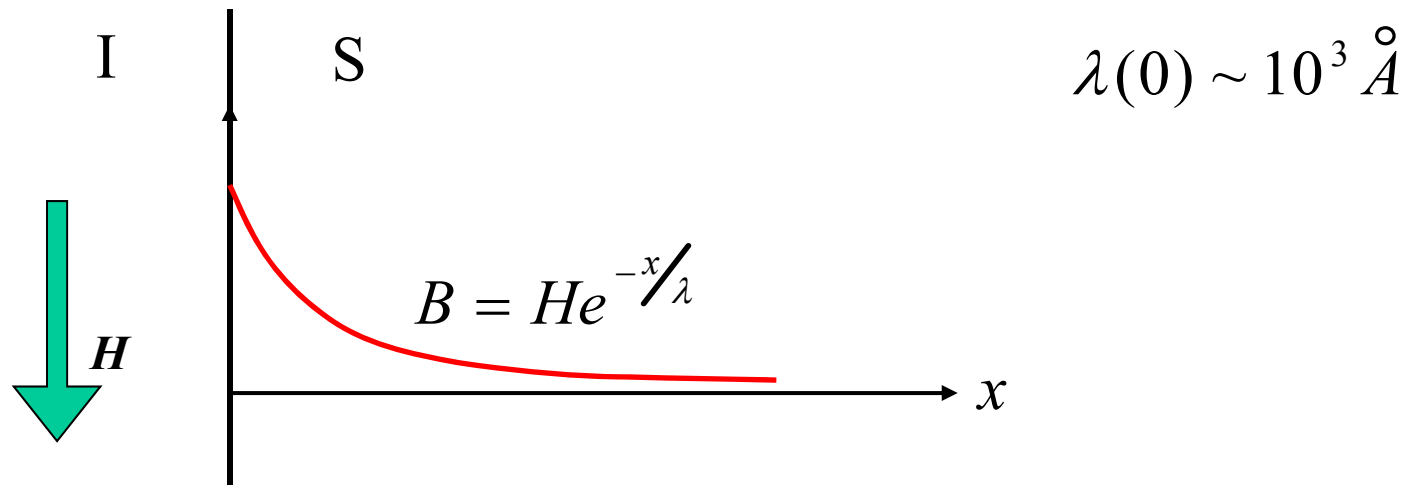
N-S

$$\Psi = 0$$

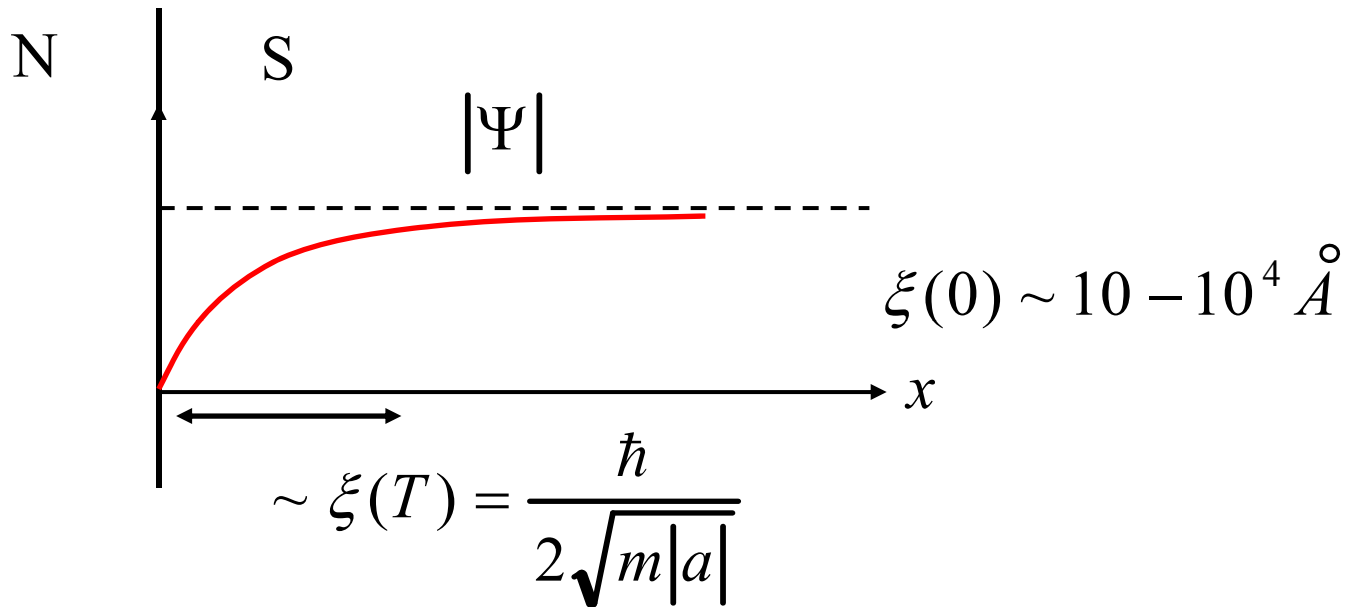
Характерные длины в теории Гинзбурга - Ландау

Глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник = Лондоновская глубина проникновения

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{mc^2 b}{8\pi e^2 |a|}} = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}}$$

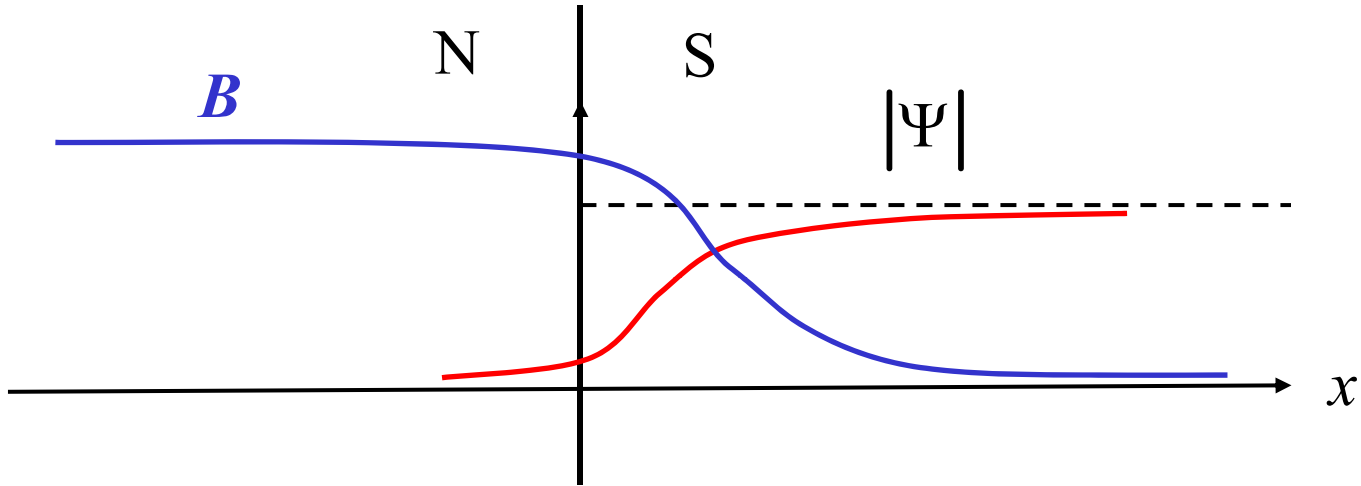


Корреляционная длина = характерный масштаб изменения параметра порядка



Параметр Гинзбурга-Ландау = $\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}$

Энергия границы раздела N-S




$$\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Коэффициент поверхностного натяжения > 0

$$\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

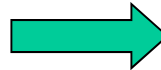
Коэффициент поверхностного натяжения < 0

$$\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$$


SN границы энергетически выгодны

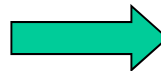
Что такое вихри и зачем они нужны ?

*Частичное проникновение
магнитного поля в
сверхпроводник
(неполная экранировка)*



Уравнение Лондонов

$$\vec{j} = -\frac{e^2 n_s}{mc} \vec{A}$$

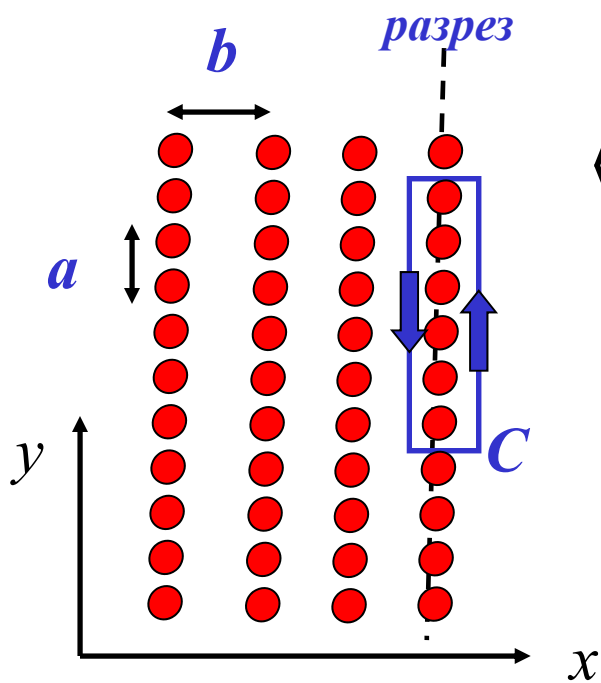
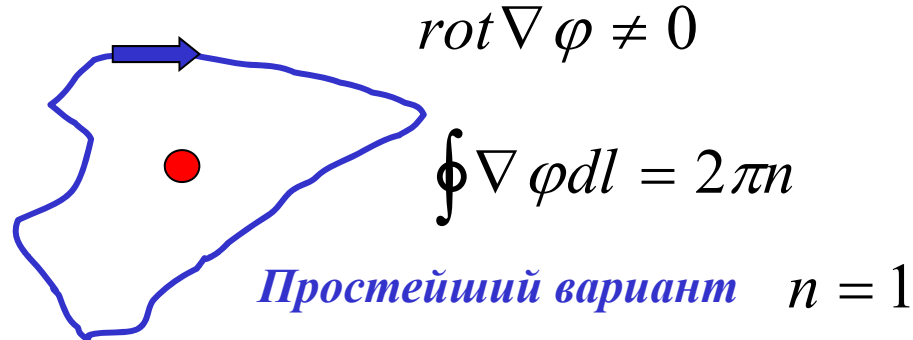


*Линейно растущий с
координатой член в токе*

Противоречие ?

Ответ: необходимо учесть особенности фазы параметра порядка чтобы устранить расходимость сверхтока

$$\vec{j} = \frac{e\hbar}{m} |\Psi|^2 \left(-\frac{2e}{\hbar c} \vec{A} + \nabla \varphi \right)$$



$$\langle \Delta(\nabla \varphi) \rangle_y = \frac{1}{Na} \oint_C \nabla \varphi dl = \frac{2\pi N}{Na} = \frac{2\pi}{a}$$

$$\vec{A} = \vec{y}_0 \overline{B}_z x + \vec{\tilde{A}}$$

$$\frac{2e}{\hbar c} \overline{B}_z b = \frac{2\pi}{a} \quad \text{- компенсация}$$

$$\overline{B}_z S = \int B_z ds = \frac{\pi \hbar c}{e} = \phi_0$$

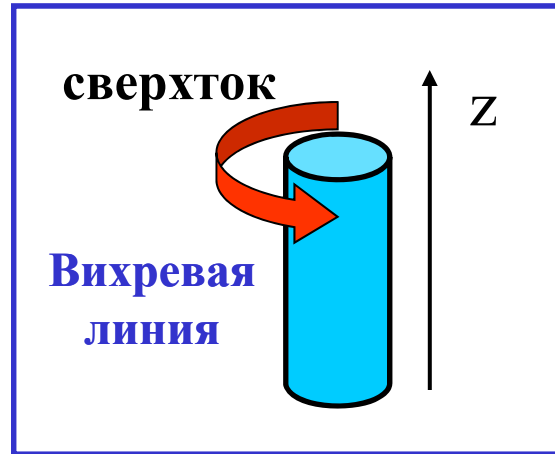
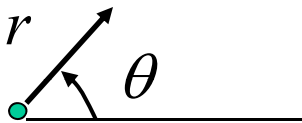
*квант
магнитного
потока*

Изолированный вихрь. Слабые магнитные поля.

$$\text{rot} \nabla \varphi = 2\pi \delta(\vec{r}) \vec{z}_0$$

Структура параметра
порядка

$$\Psi = f(r) e^{i\theta}$$

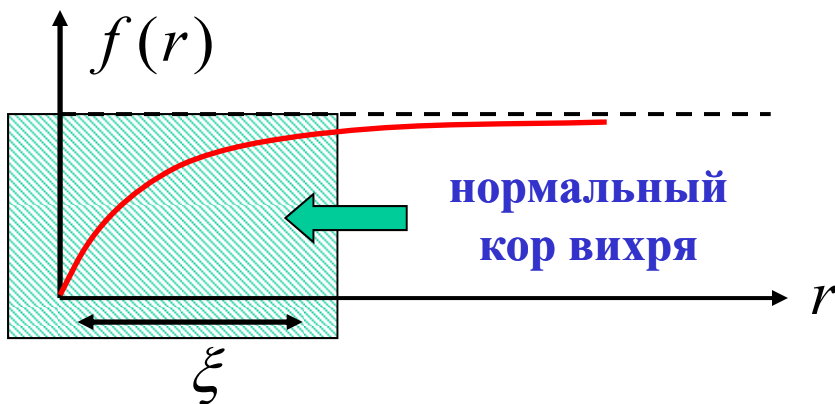


Структура магнитного
поля

$$\kappa \gg 1 \quad r \gg \xi$$

$$-\Delta \vec{B} + \vec{B} = \phi_0 \delta(\vec{r}) \vec{z}_0$$

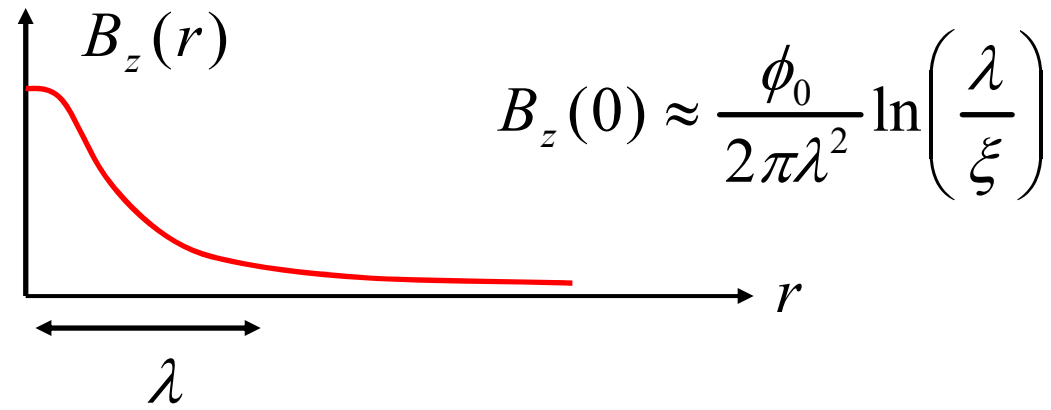
$f(0) = 0$ ← однозначность Ψ



$$\vec{B} = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda) \vec{z}_0 \quad \text{Ф.Макдональда}$$

$$r \gg \lambda \quad \vec{B} \approx \frac{\phi_0 \vec{z}_0}{\sqrt{8\pi r} \lambda^3} e^{-r/\lambda}$$

$$\xi \ll r \ll \lambda \quad \vec{B} \approx \frac{\phi_0 \vec{z}_0}{2\pi\lambda^2} \ln\left(\frac{\lambda}{r}\right)$$



Свободная энергия вихревой нити (на ед. длины)

$$\varepsilon \approx \left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \left(\ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right) + \gamma\right)$$

Нижнее критическое поле

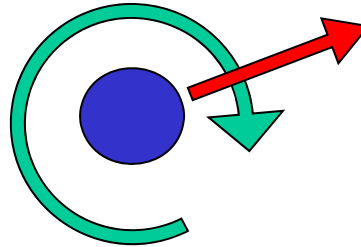
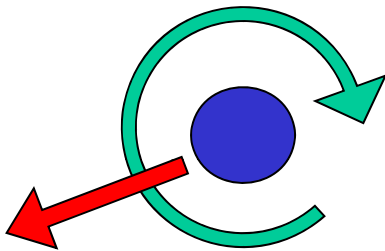
$$H_{c1} = \frac{4\pi\varepsilon}{\phi_0}$$

Вихри энергетически выгодны при

$$H > H_{c1}$$

(в бесконечном цилиндре в продольном поле)

Взаимодействие вихрей.



$$\vec{f} = \frac{\phi_0}{c} [\vec{j}, \vec{z}_0]$$

Сила, действующая на вихрь
при обтекании его сторонним
током \vec{j}
(сила Лоренца)

Энергия взаимодействия
вихрей

$$F_{12} = \frac{\phi_0^2}{8\pi\lambda^2} K_0(r_{12}/\lambda) \vec{z}_0$$

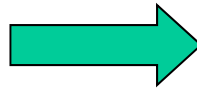
**Сильные магнитные поля.
Задача о верхнем критическом поле.**

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2 \Psi = -a \Psi$$

↑
Энергия E

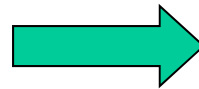
$$\vec{A} = -\vec{x}_0 H_z y$$

Min E



Max критической T (H)

$$E_0 = \frac{e\hbar H}{2mc}$$



$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2}$$

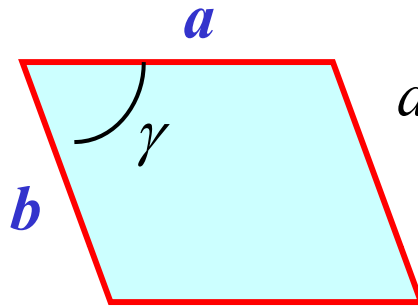
**Сверхпроводящий
зародыш**

$$\Psi = A \exp \left(ikx - \frac{(y - kL_H^2)^2}{2L_H^2} \right)$$

Магнитная длина $L_H = \sqrt{\frac{\hbar c}{2eH}}$

Вихревая решетка. Задача Абрикосова (1957)

Элементарная ячейка:



$$ab \sin \gamma = 2\pi L_H^2$$

$$\rho = \frac{b \cos \gamma}{a} \quad \sigma = \frac{b \sin \gamma}{a}$$

$$\Psi = A \sum_n \exp \left(i\pi \rho n(n-1) + \frac{i2\pi n x}{a} - \frac{(y - n\sigma a)^2}{2L_H^2} \right)$$

Квадратная решетка:

$$\rho = 0 \quad \sigma = 1$$

Седловая точка

$$\min_{\rho, \sigma} \frac{\langle |\Psi|^4 \rangle}{\langle |\Psi|^2 \rangle^2} = ?$$

**Правильная треугольная
решетка:**

$$\rho = \frac{1}{2} \quad \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

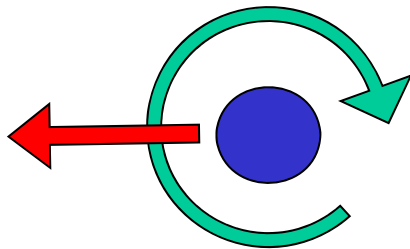
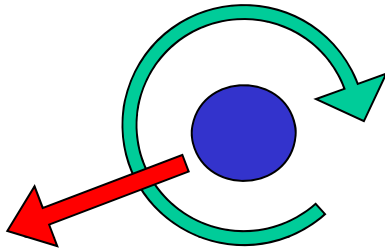
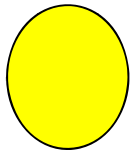
Точка минимума

Транспортные свойства вихревого состояния. Vortex matter.

Пиннинг вихрей.

Полость или
дефект с
пониженной

T_c



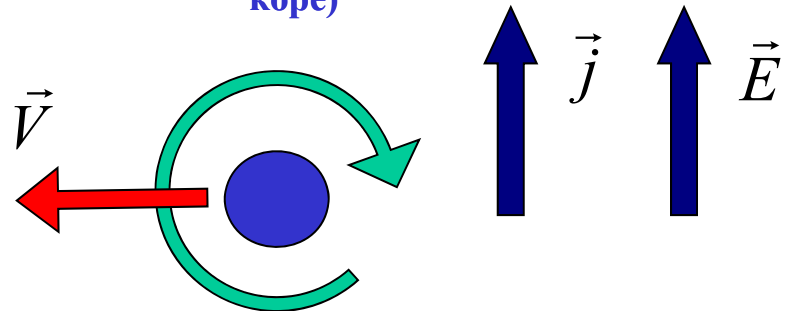
Граница с
изолятором

Вязкое течение потока.

$$\eta \vec{V} = \frac{\phi_0}{c} [\vec{j}, \vec{z}_0] + \vec{F}$$

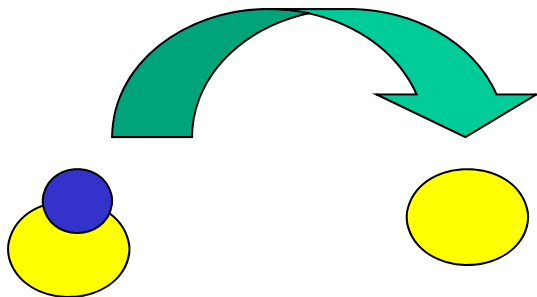
Вязкость

(диссипация – за счет нормальных токов в
коре)

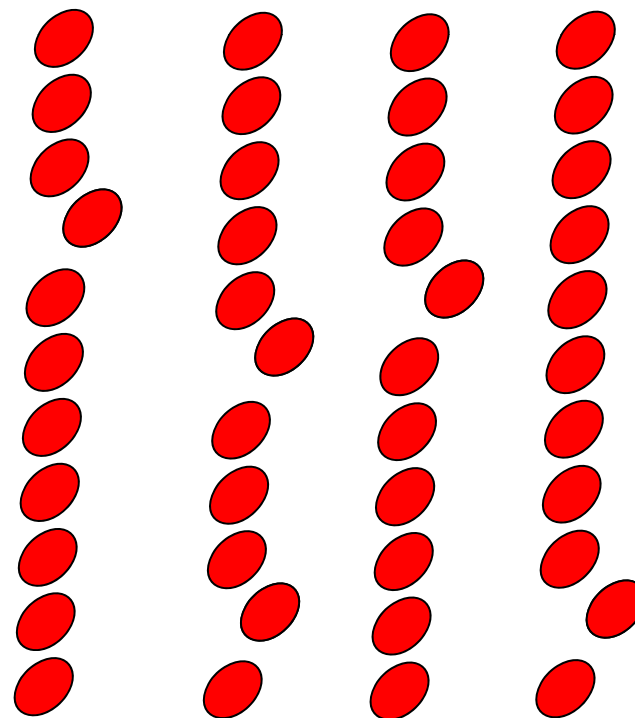


$$\rho = \rho_n \frac{H}{H_{c2}}$$

Крип вихрей.



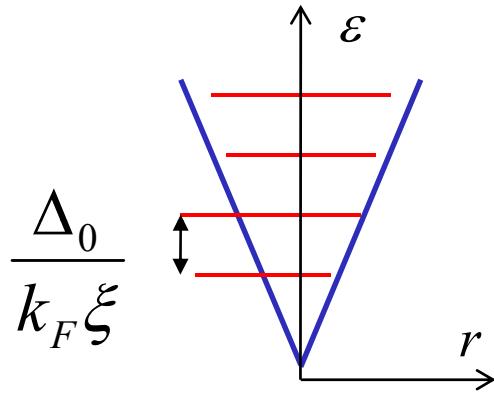
*Плавление решетки
вихрей.*



Электронная структура вихревого состояния

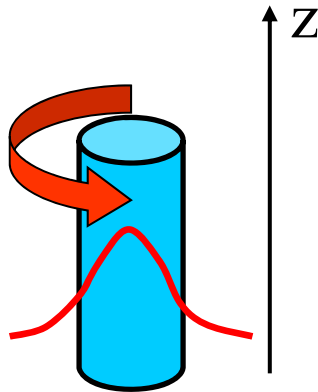
Связанные состояния фермионных возбуждений в коре вихря

Профиль сверхпроводящей щели: потенциальная яма для электронов



Оценка минищели в спектре возбуждений

$$\varepsilon_{\min} \sim \frac{\hbar^2}{m \xi^2} \sim \frac{\hbar^2 \Delta_0}{m \hbar v_F \xi} \sim \frac{\Delta_0}{k_F \xi}$$

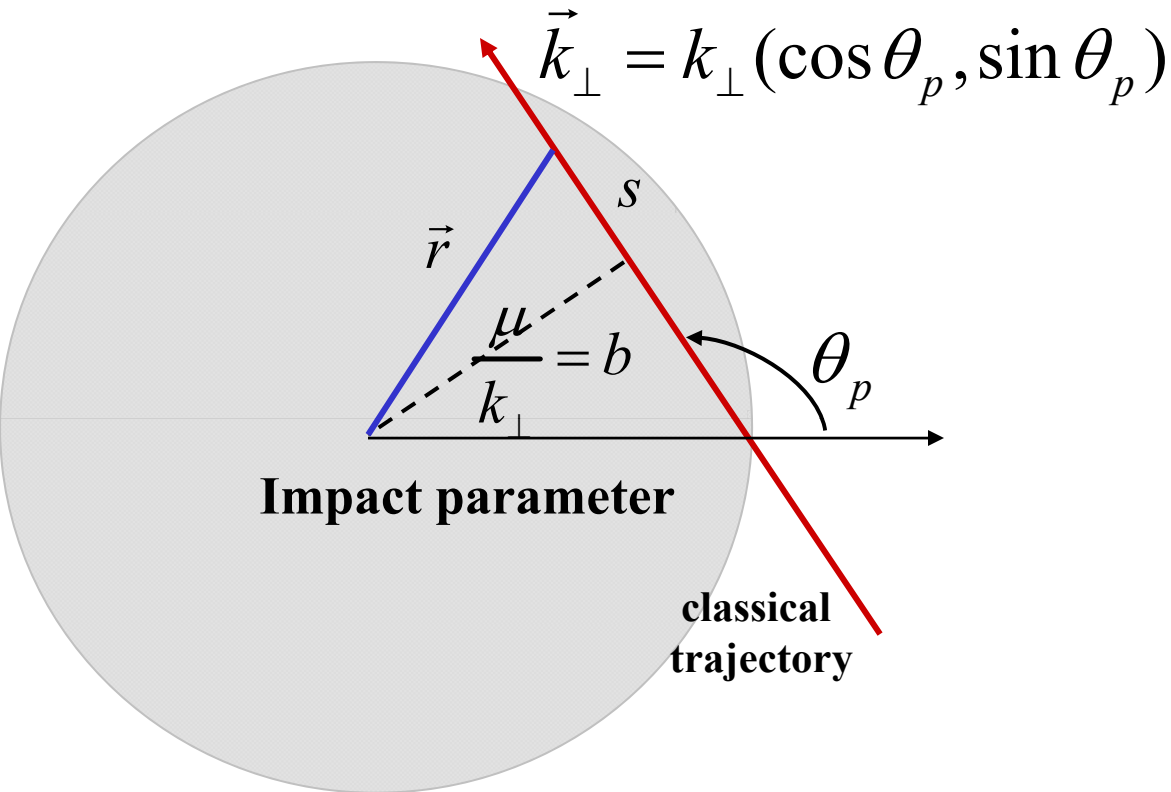


C.Caroli, P.G.de Gennes,
J.Matricon (1964)

$$\varepsilon_{\mu}(k_r) \approx \frac{\mu \Delta}{k_r \xi}$$

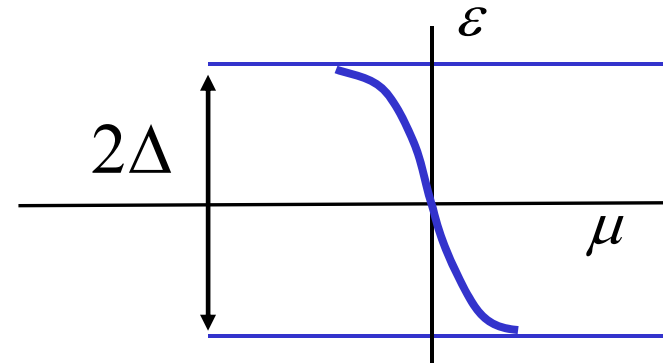
$$k_r = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$$

Андреевские уровни квазичастиц в вихрях



$$k_\perp = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$$

Fermi level

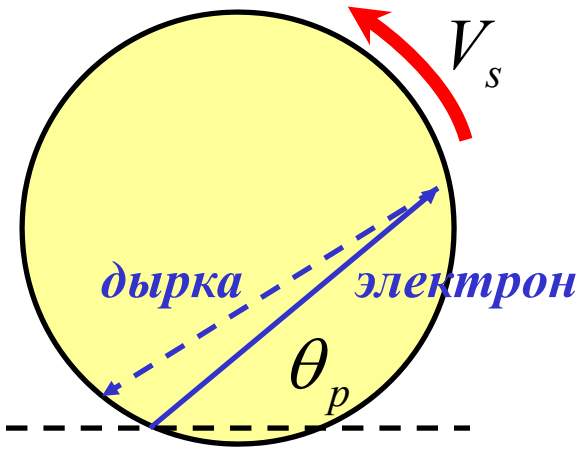


$$\varepsilon_\mu(k_\perp) = -\omega\mu \approx -\frac{\mu\Delta_0}{k_\perp\xi}$$

C.Caroli,
P.G.de Gennes,
J.Matricon
(1964)

Прецессия классической траектории

Отклонение от точного
рассеяния назад при
андреевском отражении в
коре вихря



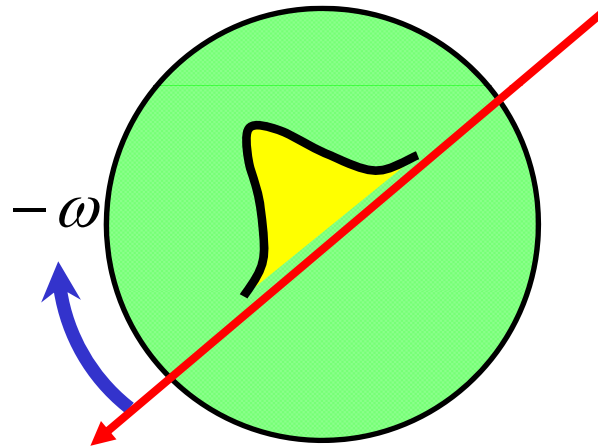
$$\delta\theta_p \sim \frac{V_s}{V_\perp} \quad \delta t \sim \frac{\xi}{V_F}$$

$$\frac{\delta\theta_p}{\delta t} \sim \frac{V_s V_F}{\xi V_\perp} \sim \frac{V_s k_F}{\xi k_\perp} \sim \frac{\Delta_0}{k_\perp \xi \hbar} \sim \frac{\omega}{\hbar}$$



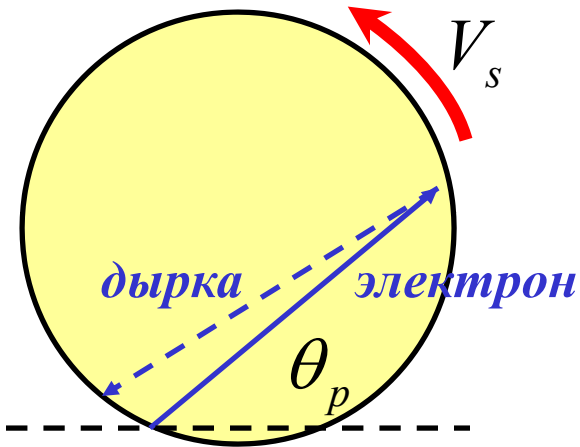
$$\hbar \frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = -\omega$$

Частота
прецессии



Прецессия классической траектории

Отклонение от точного
рассеяния назад при
андреевском отражении в
коре вихря



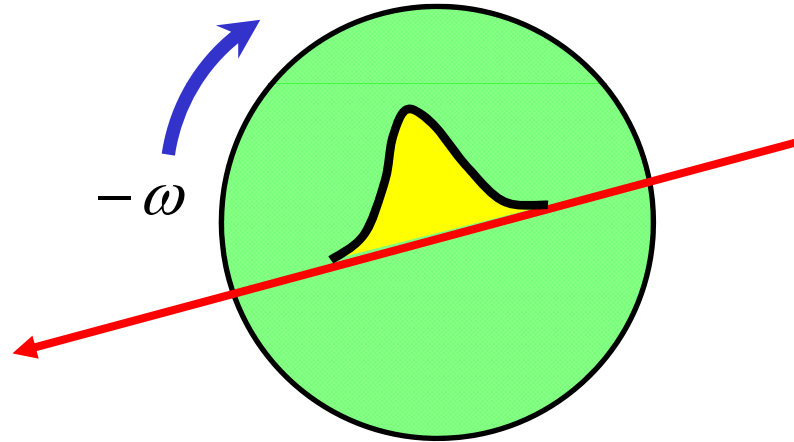
$$\delta\theta_p \sim \frac{V_s}{V_\perp} \quad \delta t \sim \frac{\xi}{V_F}$$

$$\frac{\delta\theta_p}{\delta t} \sim \frac{V_s V_F}{\xi V_\perp} \sim \frac{V_s k_F}{\xi k_\perp} \sim \frac{\Delta_0}{k_\perp \xi \hbar} \sim \frac{\omega}{\hbar}$$



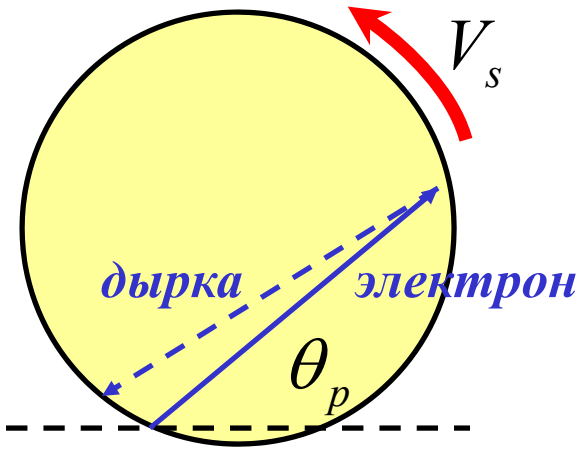
$$\hbar \frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = -\omega$$

Частота
прецессии



Прецессия классической траектории

Отклонение от точного
рассеяния назад при
андреевском отражении в
коре вихря



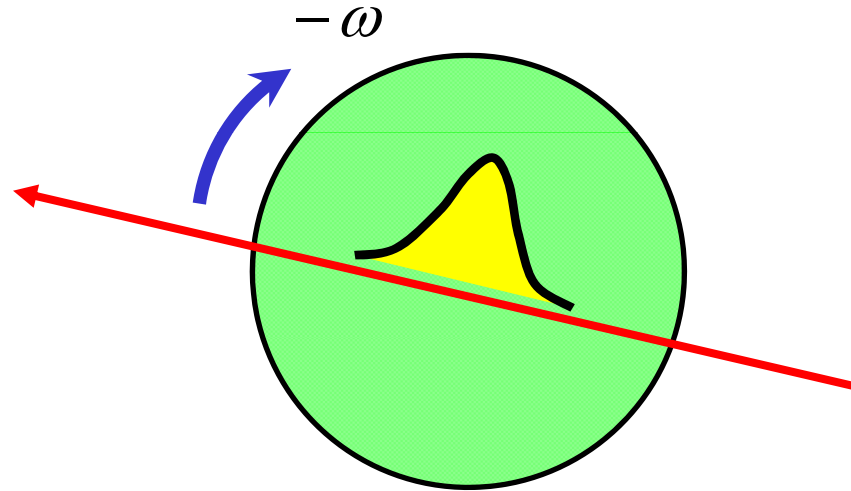
$$\delta\theta_p \sim \frac{V_s}{V_\perp} \quad \delta t \sim \frac{\xi}{V_F}$$

$$\frac{\delta\theta_p}{\delta t} \sim \frac{V_s V_F}{\xi V_\perp} \sim \frac{V_s k_F}{\xi k_\perp} \sim \frac{\Delta_0}{k_\perp \xi \hbar} \sim \frac{\omega}{\hbar}$$



$$\hbar \frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu} = -\omega$$

Частота
прецессии



Квантовая механика прецессирующих траекторий

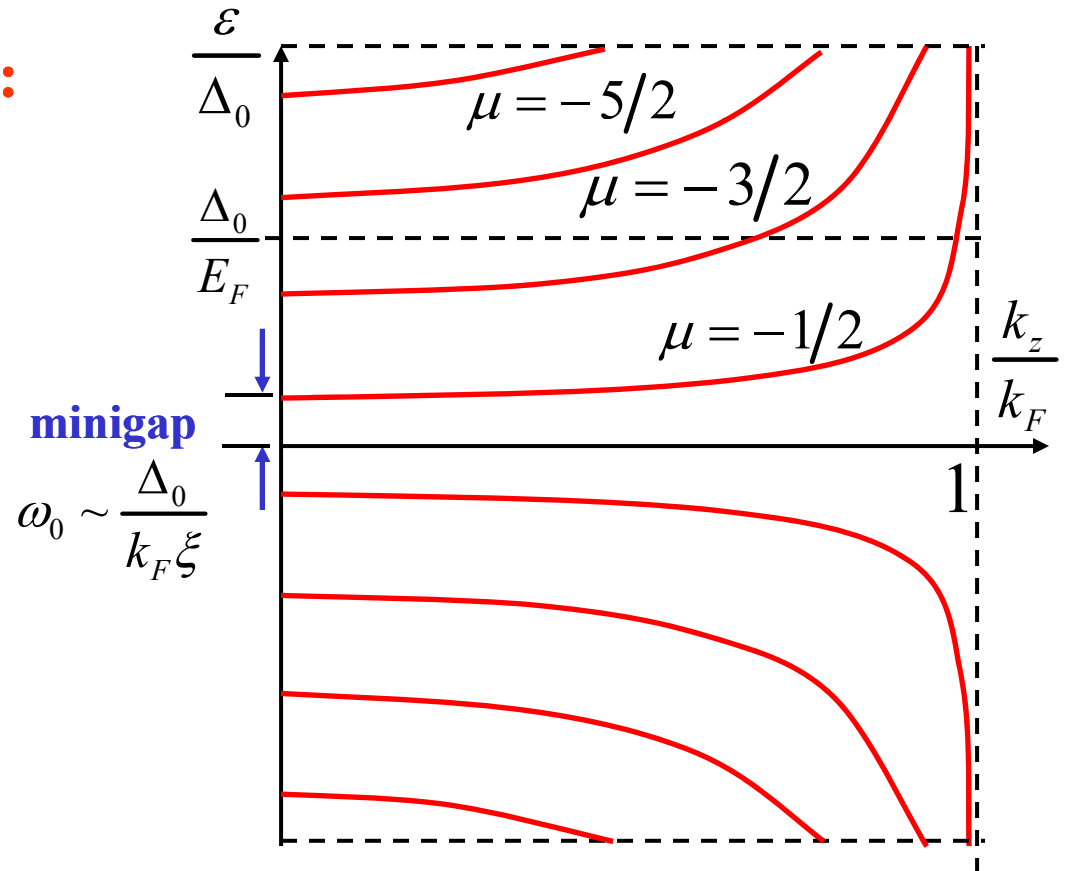
$$[\theta_p, \hat{\mu}] = i$$

Спектр квазичастиц в вихре:
правило квантования Бора-
Зоммерфельда

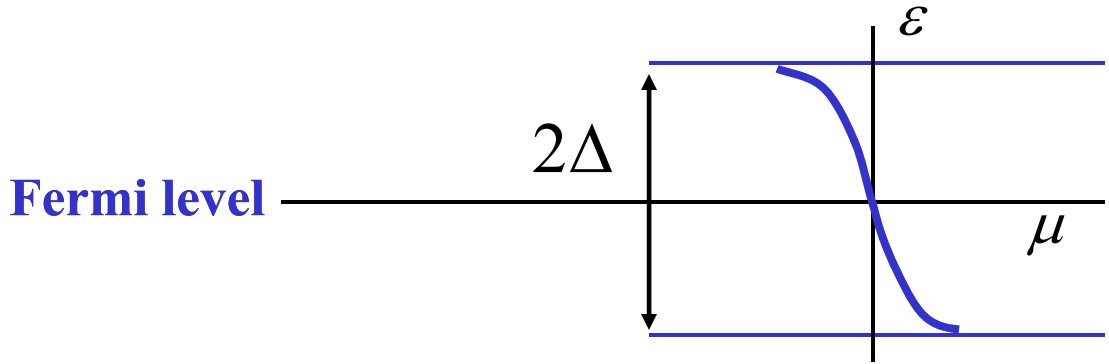
$$\int_0^{2\pi} \mu(\theta_p) d\theta_p = 2\pi(n + \beta)$$

$$\varepsilon_n(k_z) \approx \frac{\Delta_0}{\xi} \left(\frac{n + \beta}{k_{\perp}} + b \right)$$

Spectrum as a function of the momentum component along the vortex axis



Аномальная спектральная ветвь. Почему она важна?



Strong dependence on the mean free path.
Difference between clean and dirty systems

Local DOS

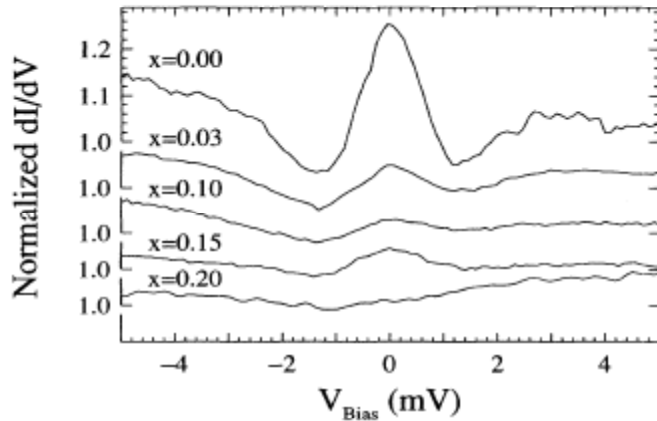
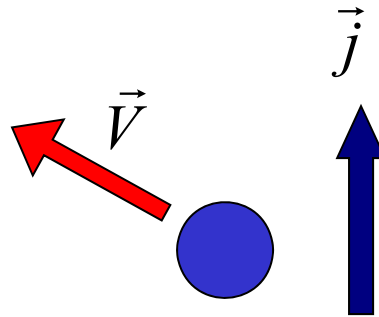


FIG. 3. Spectra taken at the center of a vortex core for various Ta substitutions at 1.3 K and 0.3 T. The spectra are normalized to the differential conductance at high bias.

Ch.Renner et al (1991)

Vortex dynamics



Thermal transport

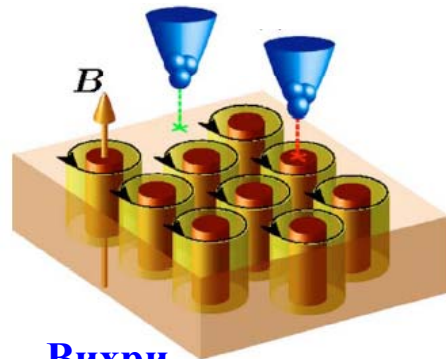
Thermal conductivity along magnetic field:

$$\kappa(B) = n\kappa_v \propto \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

Experiment:

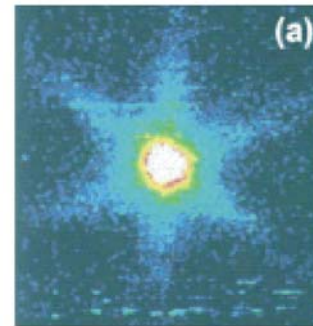
$$\kappa(B) \ll \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

**Сканирующая туннельная микроскопия/спектроскопия.
Эффективный метод исследования природы сверхпроводящего спаривания.**



Вихри

$dI/dV(x,y)$



Пик плотности состояний в центре вихря

STM наблюдения вихрей. DOS

$$LDOS = \sum_{\lambda} |u_{\lambda}(\vec{r})|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\lambda})$$

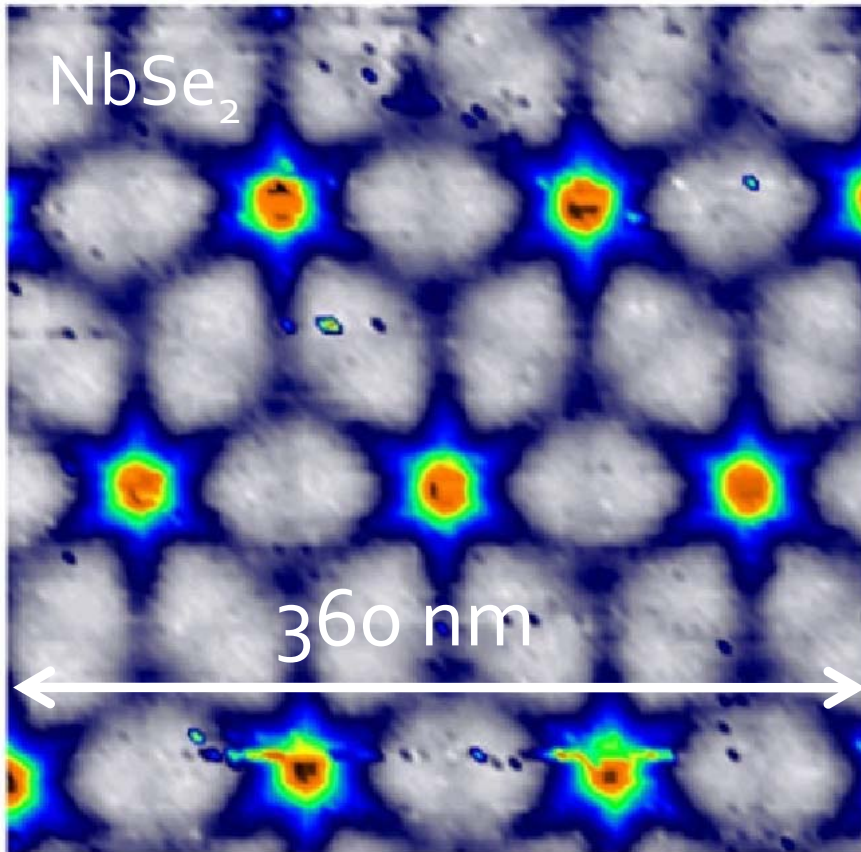
PRL **101**, 166407 (2008)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
17 OCTOBER 2008

Superconducting Density of States and Vortex Cores of 2H-NbS₂

I. Guillamón,¹ H. Suderow,¹ S. Vieira,¹ L. Cario,² P. Diener,³ and P. Rodière³



PRL, **101**, 166407 (2008)

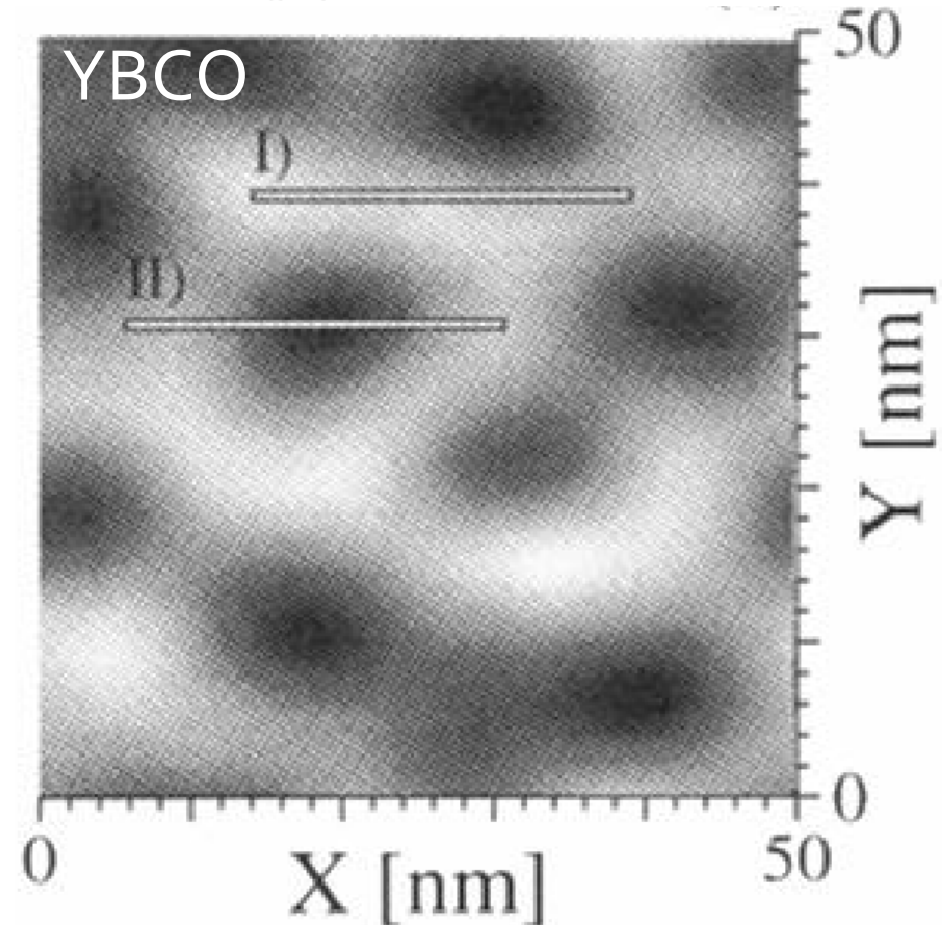
VOLUME 75, NUMBER 14

PHYSICAL REVIEW LETTERS

2 OCTOBER 1995

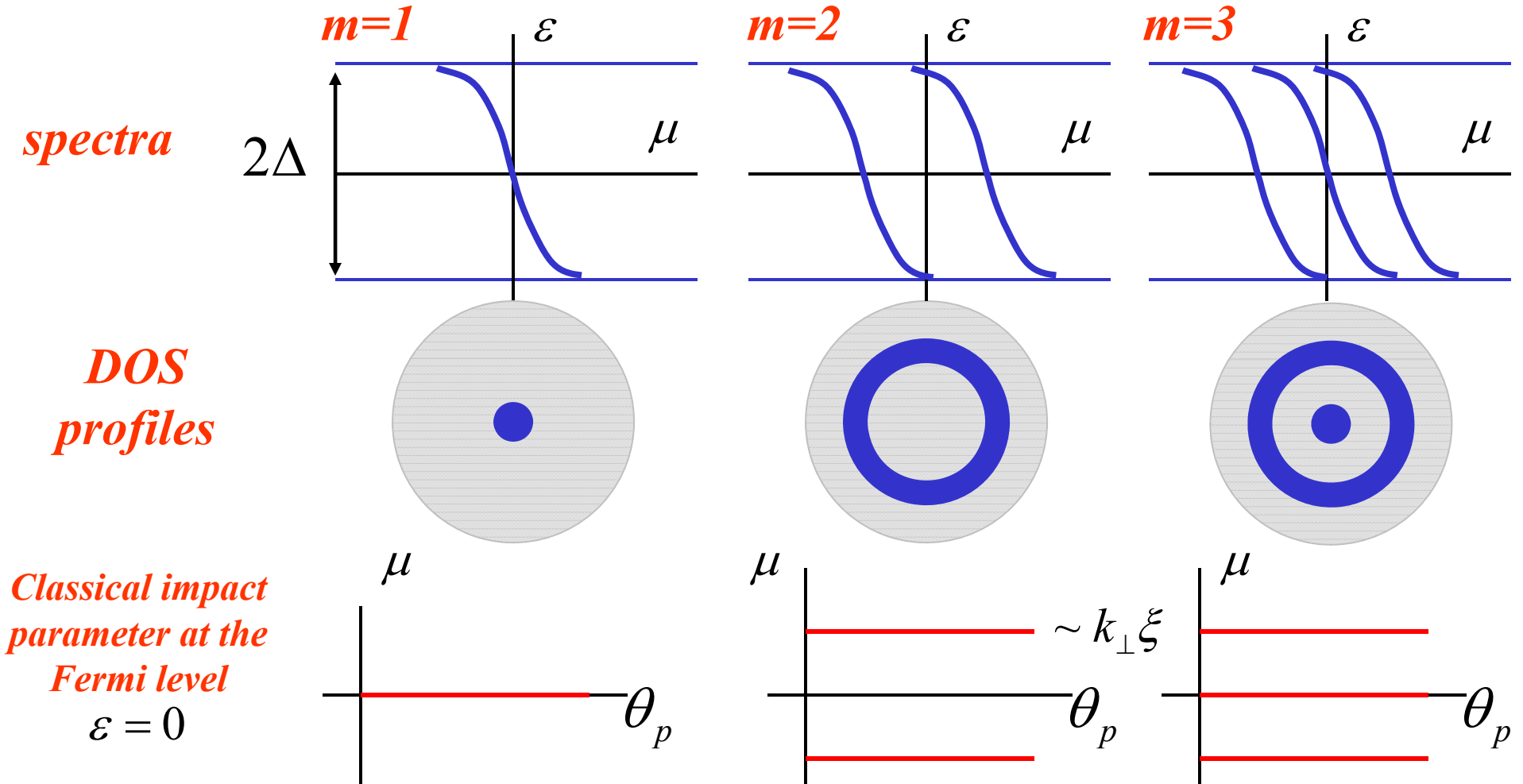
Direct Vortex Lattice Imaging and Tunneling Spectroscopy of Flux Lines on YBa₂Cu₃O_{7-δ}

I. Maggio-Aprile, Ch. Renner, A. Erb, E. Walker, and Ø. Fischer



PRL, **75**, 2754 (1995)

Аномальные ветви спектра в многоквантовых вихрях. Теорема о числе нулевых мод.



G.E.Volovik (1993)

D.Rainer, J.A.Sauls, and D.Waxman (1996); Y.Tanaka et al. (1993,1995); S.M.M.Virtanen and M.M.Salomaa (1999); ASM and V.Vinokur (2002); K.Tanaka, I.Robel, B.Janko (2002)

1. Найти нижнее критическое поле в сверхпроводнике 2ого рода
2. Найти верхнее критическое поле в сверхпроводнике 2ого рода
3. Найти барьер на вход вихря в сверхпроводник
4. Найти нижнее критическое поле в сверхпроводнике 2ого рода с анизотропным тензором эффективных масс
5. Найти верхнее критическое поле в сверхпроводнике 2ого рода с анизотропным тензором эффективных масс
6. Найти коэффициент вязкости вихря
7. Найти распределение магнитного поля вокруг вихря в тонкой пленке толщиной $<$ лондоновской длины
8. Показать что вихрям энергетически выгодно образовать правильную треугольную решетку.
9. Найти энергию границы раздела NS
10. Найти верхнее критическое поле для тонкой пленки при разных ориентациях поля
11. Найти спектр квазичастиц в вихре