



*Применение уравнений Боголюбова в
современной физике сверхпроводимости:
Андреевское отражение в сверхпроводящих
гибридных структурах*

- ◆ Андреевское отражение на границе нормальный металл - сверхпроводник.
- ◆ Транспорт заряда. Кондактанс границы нормальный металл – сверхпроводник.
- ◆ Транспорт тепла.
- ◆ Андреевские ямы, волноводы, интерферометры.
- ◆ Джозефсоновские системы. Связанные состояния. Ток.

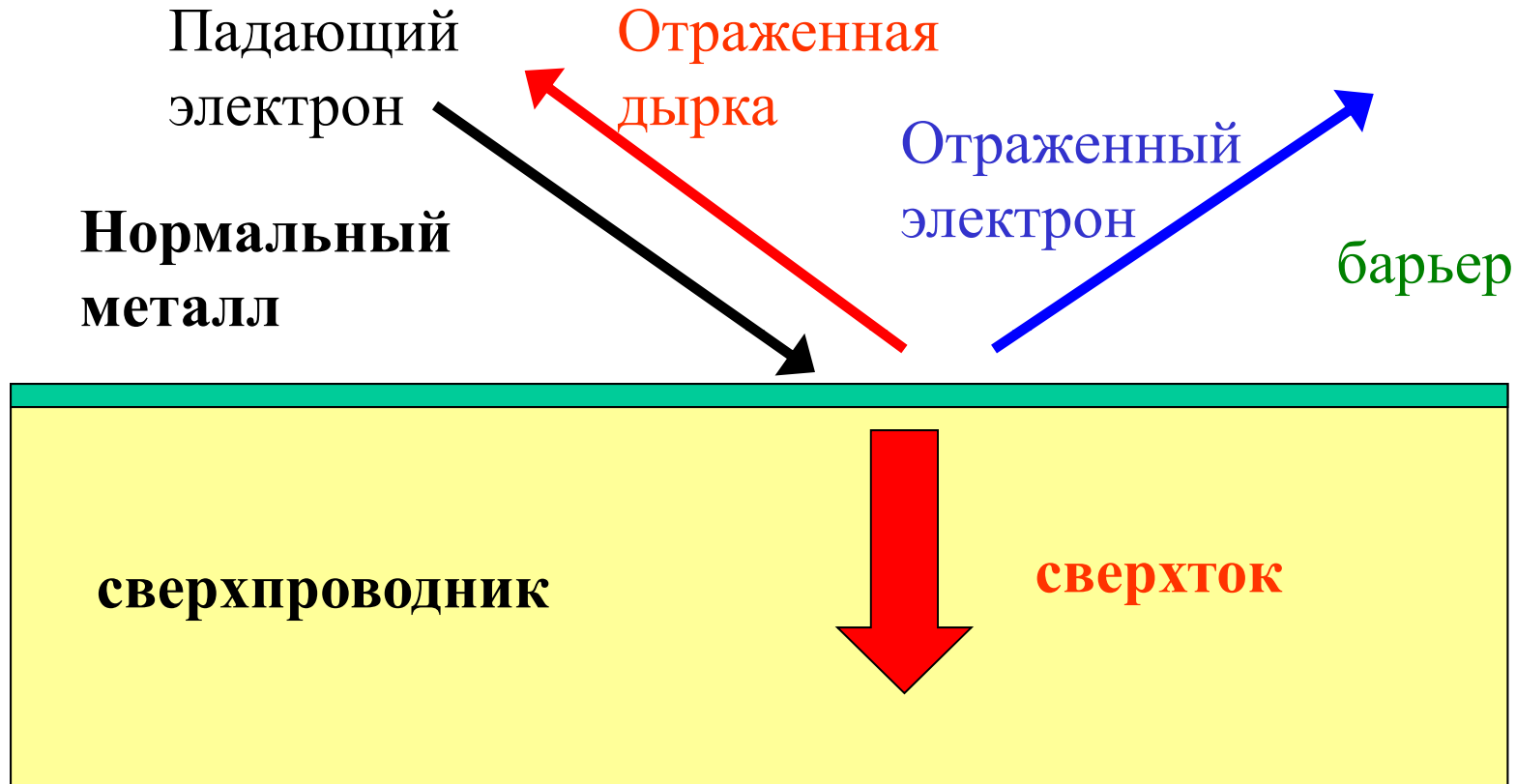
Основные уравнения


$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$
$$\left(\frac{\hbar^2 \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$

Квазиклассическое приближение. Уравнения Андреева (1964).

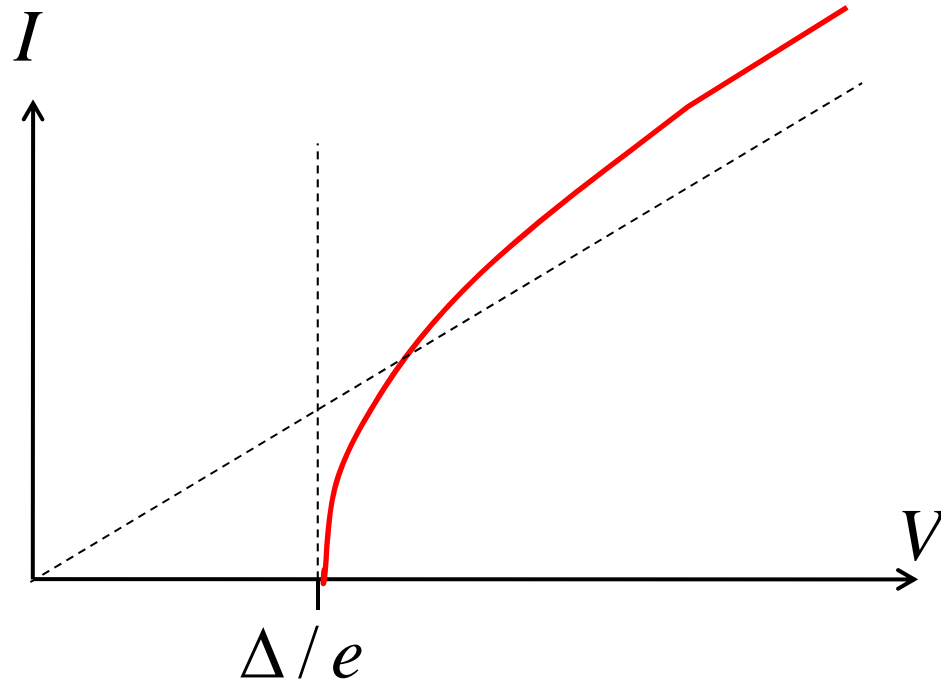
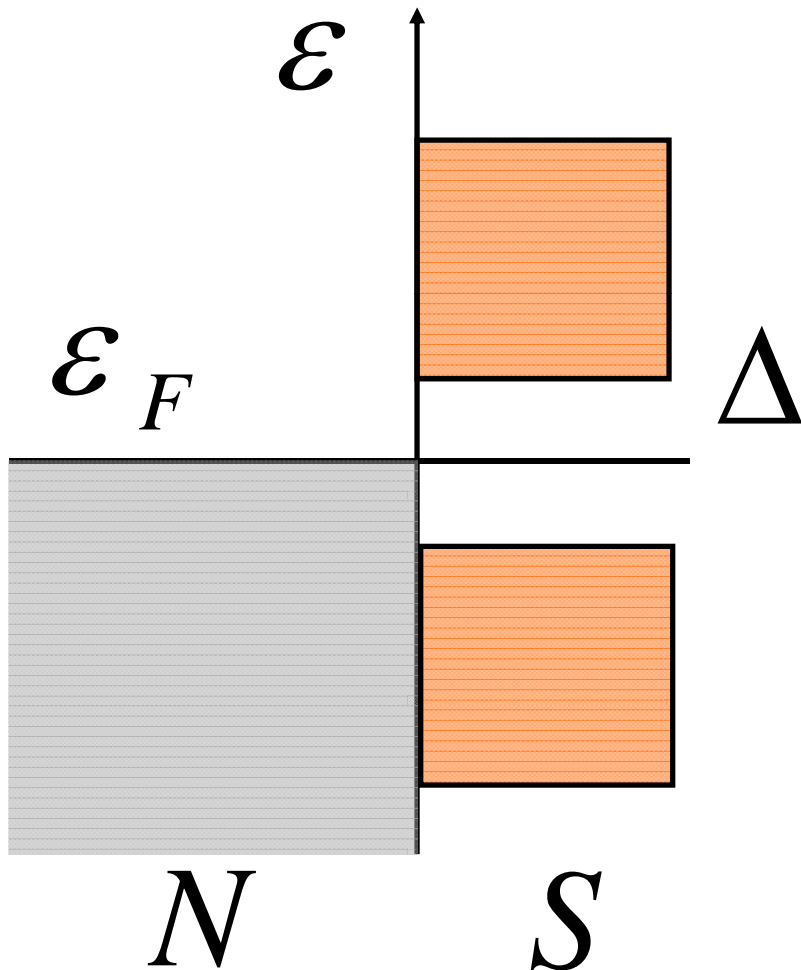

$$\left(-i\hbar\vec{V}_F\left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right) + U \right)u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H)u$$
$$\left(i\hbar\vec{V}_F\left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right) - U \right)v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H)v$$

Андреевское отражение. Картинки.



Транспорт тепла. SNSNS структуры – промежуточное состояние (А.Ф.Андреев)

**Транспорт заряда. SIN граница.
Полупроводниковая модель. Вопросы.**



- 1. Есть ли подщелевой ток?**
- 2. Избыточный ток (excess current)**

Транспорт заряда. SIN граница.

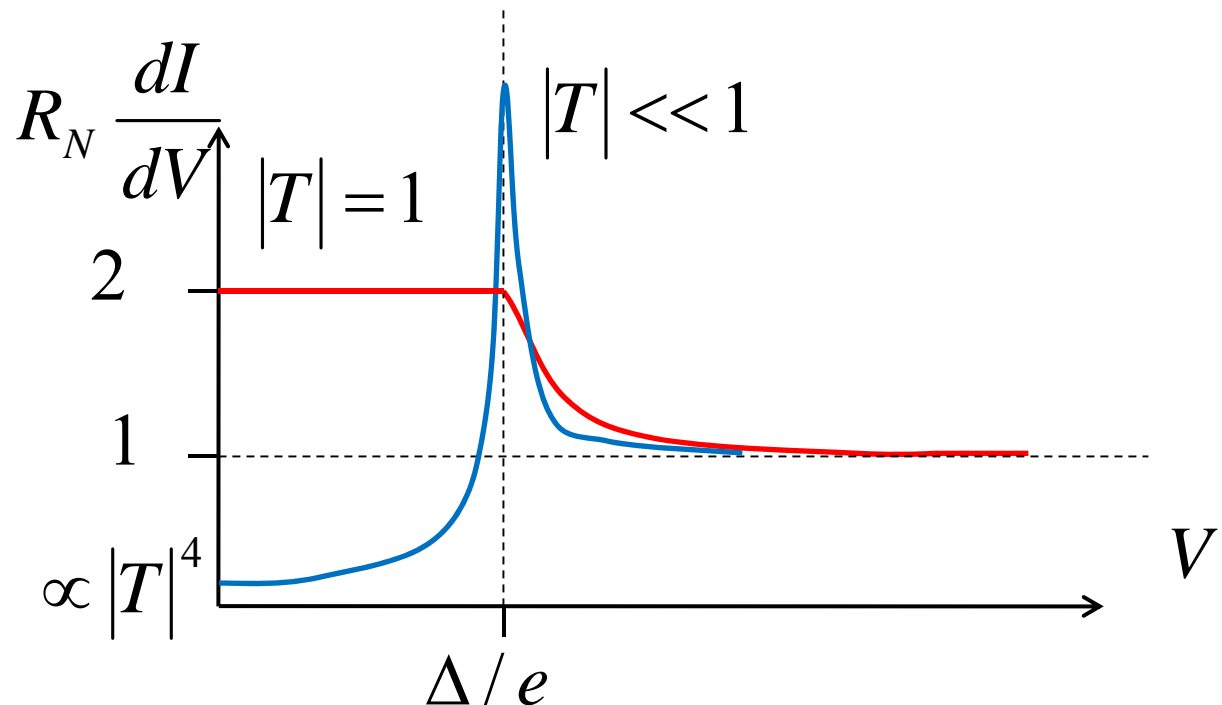
А. Шеланков (1980,1984). Blonder-Tinkham-Klapwijk (1982).

Вопрос: Ток определяется
плотностью состояний?

$$I_{NS}^{qp} = \frac{1}{eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} [f_0(E - eV) - f_0(E)]$$

$$\times N_s(E) dE, \quad Z^2 \gg 1.$$

Ответ: только для малой прозрачности границы

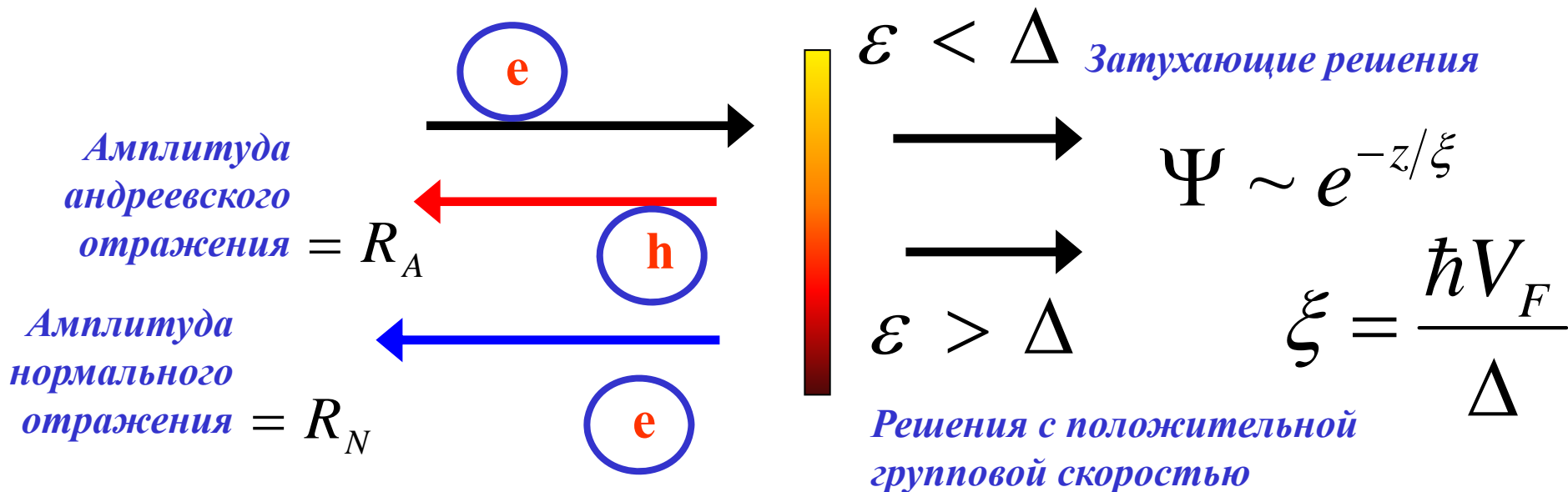


SIN граница. Постановка задачи.

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + \hbar V_F Z \delta(z) \right) u + \Delta v = \varepsilon u$$

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \hbar V_F Z \delta(z) \right) v + \Delta^* u = \varepsilon v$$

$$T = \frac{1}{1 + Z^2} = \text{вероятность прохождения электрона через барьер}$$



SIN граница. Коэффициенты прохождения и отражения.

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_F z} + R_N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_F z} + R_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_F z}$$

$$Z = 0$$

$$\varepsilon < \Delta$$

$$R_A = -e^{i \arccos(\varepsilon/\Delta) + i\varphi}$$

$$\varepsilon > \Delta$$

$$R_A = -e^{i\varphi} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)^2 - 1} \right)$$

$$Z \gg 1$$

$$\varepsilon < \Delta$$

$$R_A^2 \sim Z^{-4} = T^2 \ll 1$$

Двухчастичный процесс туннелирования.

SIN граница. Коэффициенты прохождения и отражения.

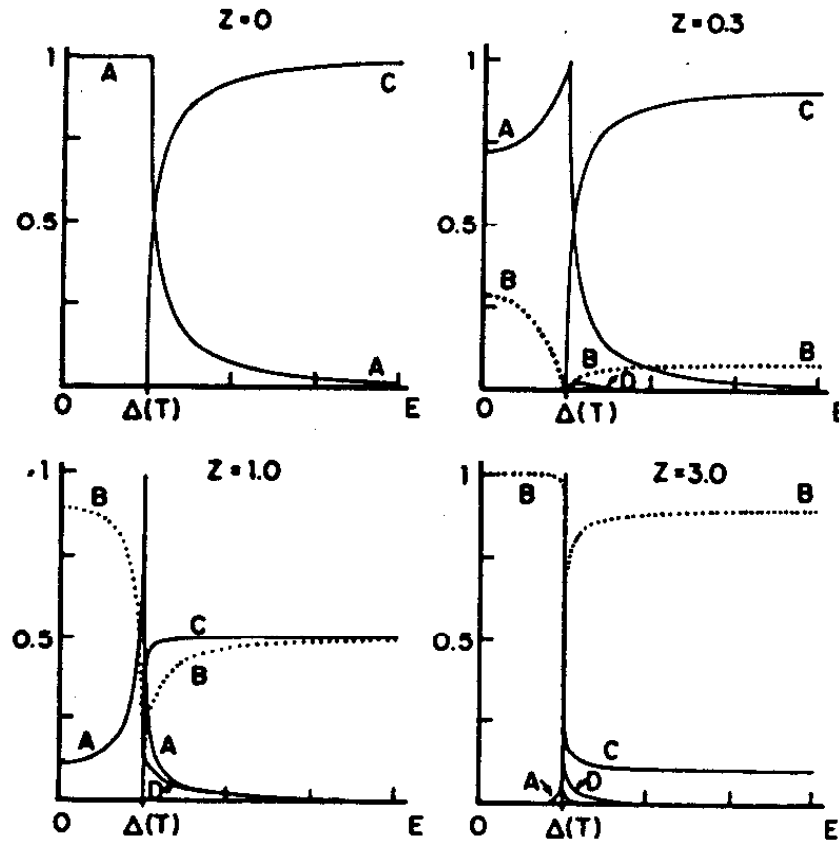
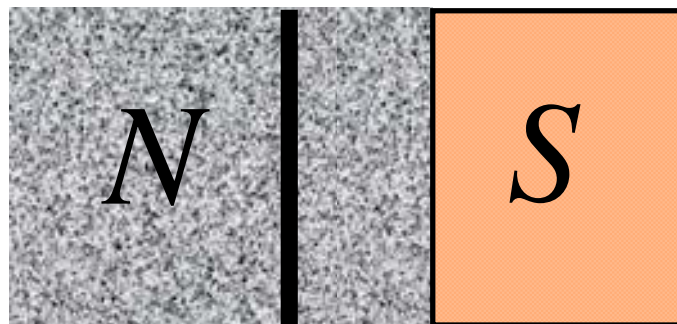


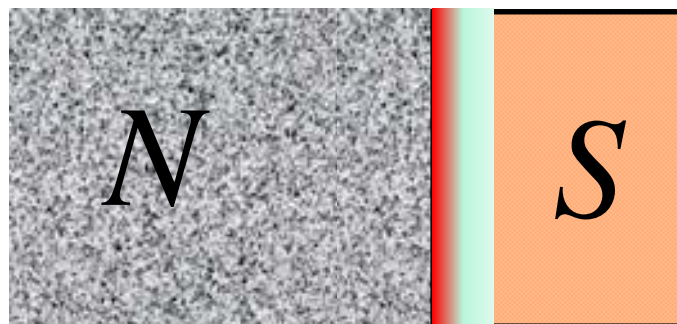
Figure 3. BTK result for a tunnel barrier, for several values of the barrier strength parameter Z . A gives the probability for Andreev reflection, B the probability for normal reflection, C the probability for transmission as a electron-like quasiparticle, and D the probability for transmission as a hole-like quasiparticle (from ref. 24)

Локализованные состояния на SIN границе.
Резонансное андреевское отражение.

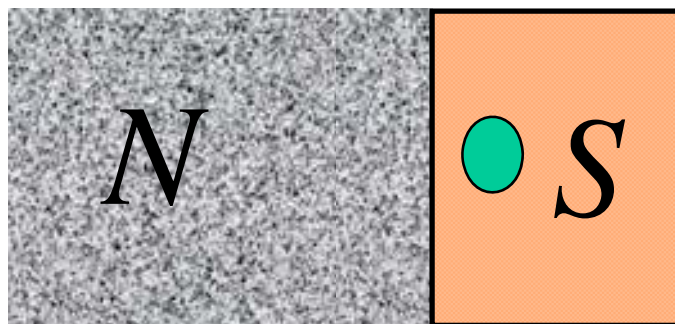


Double barriers

$$R_A^2 \sim T$$



Midgap states



vortex states

SIN граница. Кондактанс.

Удвоение кондактанса баллистического контакта.

Landauer formula $G_N = 2e^2/h \sum_n T_n$

$$G_A = \frac{4e^2}{h} \sum_n \frac{T_n^2}{(2 - T_n)^2}$$

SIN граница. ВАХ.

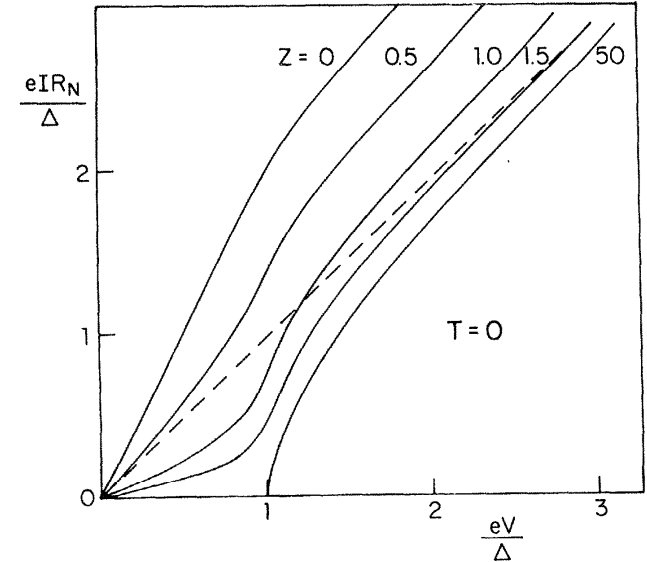
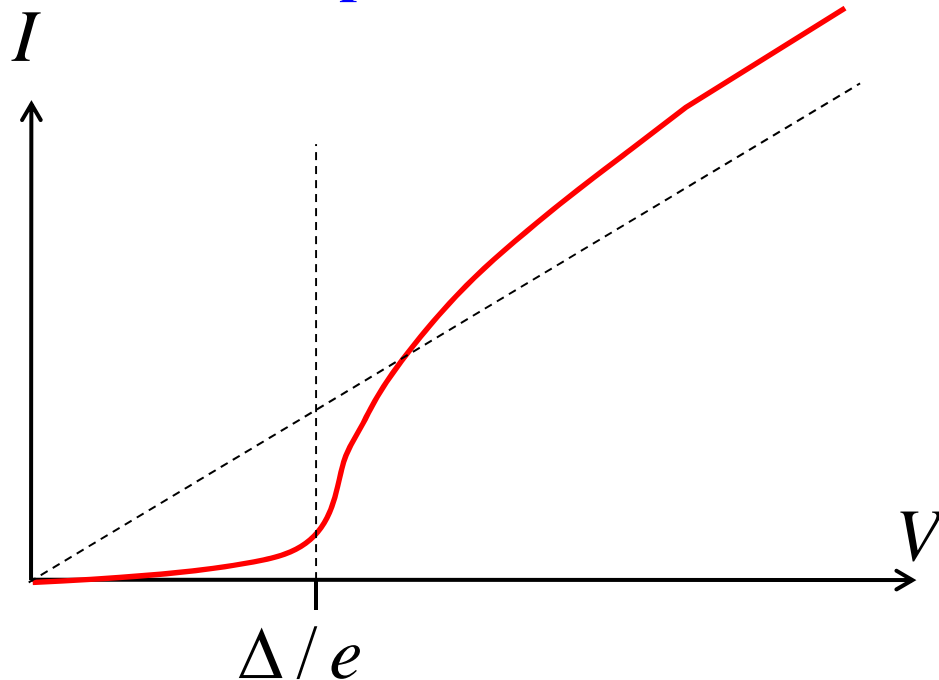


FIG. 6. Current vs voltage for various barrier strengths Z at $T=0$. These curves attain their asymptotic limits only for very high voltages. For example, the tunnel junction ($Z=50$) curve will be within 1% of the normal-state curve (dotted line) only when $eV \geq 7\Delta$.

SIN граница. Кондактанс. Влияние примесей. Zero-bias anomaly.

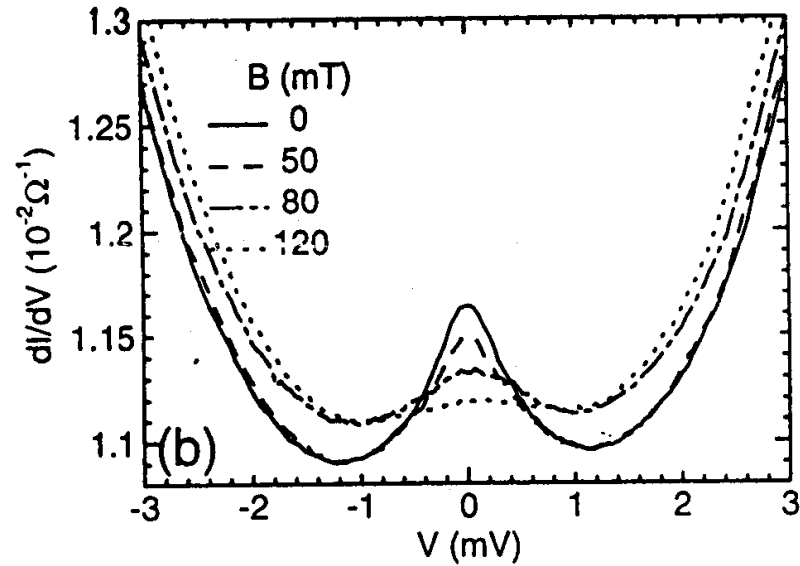
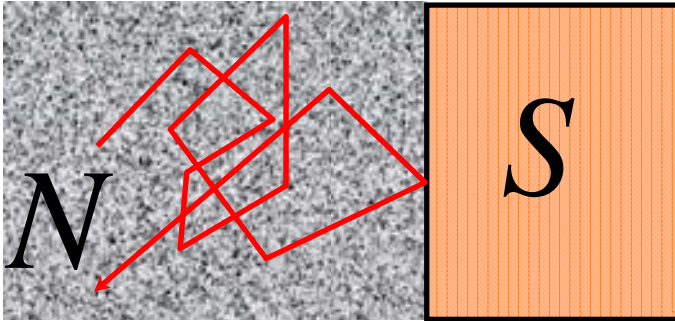


Figure 6. Destruction of the zero-bias conductance anomaly in a W/I/Nb junction at $T=100$ mK by an applied magnetic field and voltage (from ref.31).

Тепловой транспорт

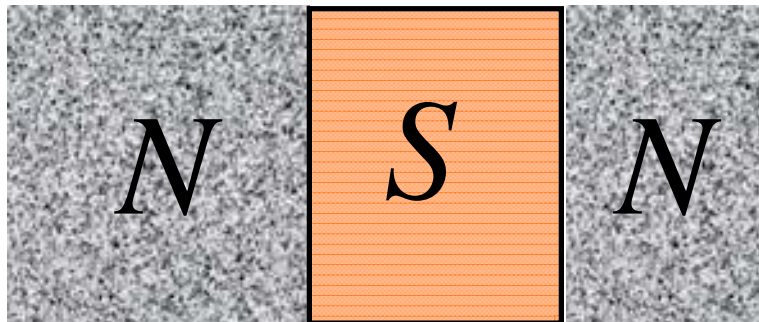
*Формула
Ландауэра*

$$\kappa_v = \frac{\pi T}{3\hbar} N_{eff} = \kappa_0 N_{eff}$$

Число поперечных мод



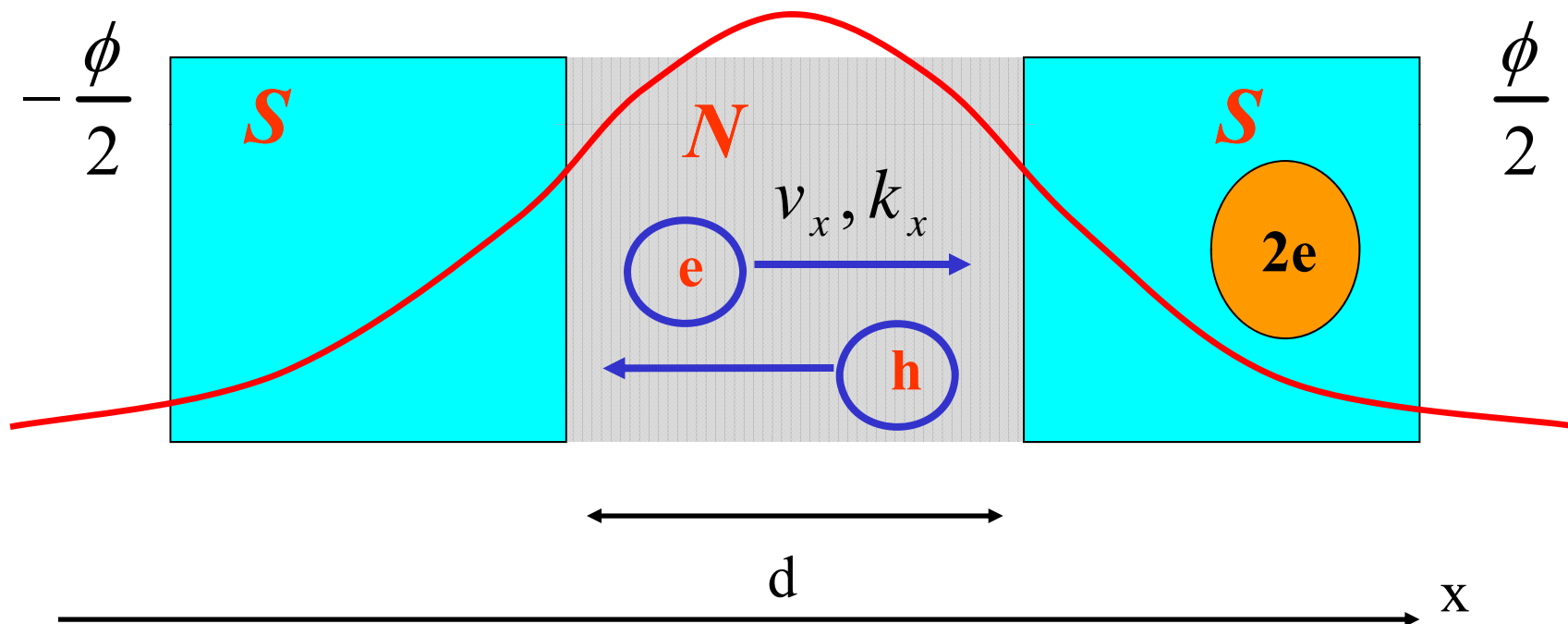
*Дополнительное рассеяние на
NS границах для надщелевых
квазичастиц*



*Туннелирование через слой
сверхпроводника для
подщелевых квазичастиц*

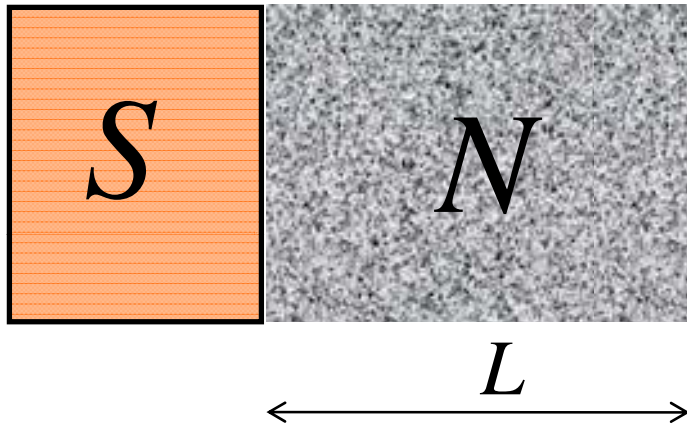
$$\kappa \sim e^{-d/\xi}$$

Андреевские связанные состояния



Эффект близости.

Длина когерентности в нормальном металле.



$$\delta\varepsilon \sim \frac{\hbar V_F}{L}$$
$$\xi_N \sim \frac{\hbar V_F}{T}$$

*Баллистический
предел*

*Диффузионный
предел*

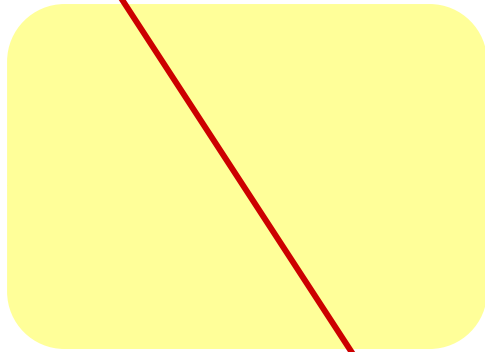
$$D = \frac{1}{3} V_F \ell$$

$$\delta\varepsilon \sim \frac{\hbar D}{L^2}$$
$$\xi_N \sim \sqrt{\frac{\hbar D}{T}}$$

Базовая задача для описания нулевых мод квазичастиц

Разность фаз параметра порядка= π

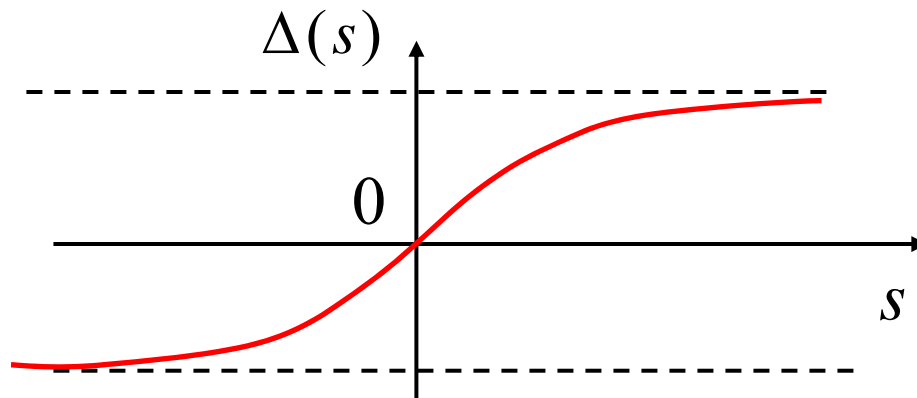
s $\theta = 0$



$\theta = \pi$

$$\hat{H} = -i\hbar V_{\perp} \hat{\sigma}_z \frac{\partial}{\partial s} + \hat{\sigma}_x \operatorname{Re} \Delta(s) - \hat{\sigma}_y \operatorname{Im} \Delta(s, b)$$

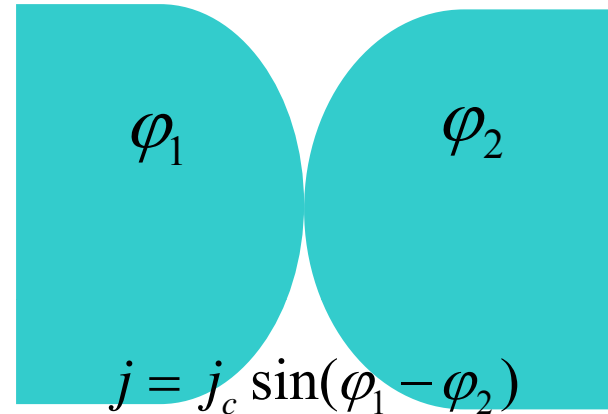
$$\hat{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{\hbar V_{\perp}} \int_0^s \operatorname{Re} \Delta(t) dt\right)$$



энергия=0

Джозефсоновский транспорт. Андреевские уровни в контактах.

Эффект Джозефсона



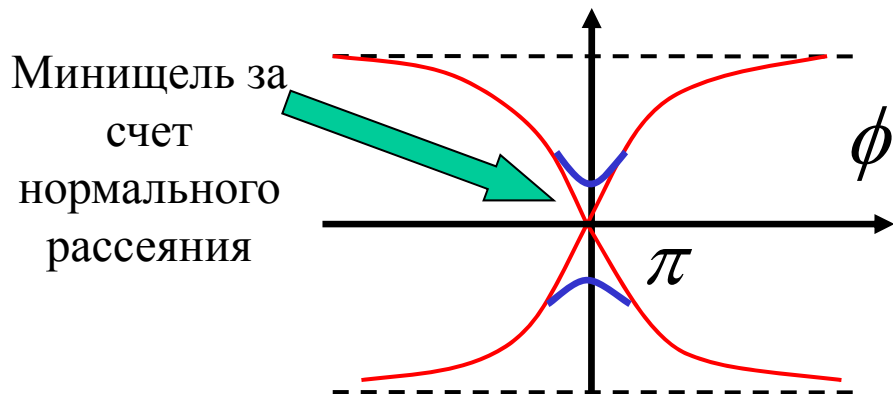
Вклад подщелевых состояний в стационарный сверхток:

$$I^{sg}(\phi) = -\frac{2e}{\hbar} \sum_{\varepsilon_n > 0} \frac{\partial \varepsilon_n(\phi)}{\partial \phi} \tanh \frac{\varepsilon_n(\phi)}{2T}$$

Вопрос: Ток определяется \sin разности фаз?

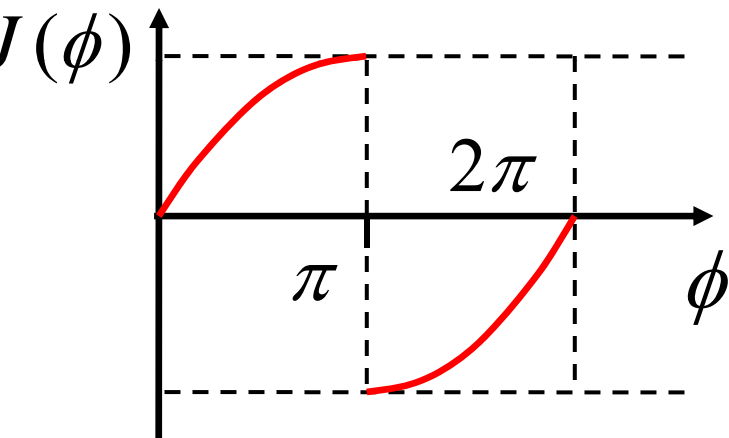
Ответ: только для малой прозрачности границы

Короткий 1-модовый контакт $d \ll \xi$



Спектр
локализованных
состояний

$$E/\Delta = \pm \cos \frac{\phi}{2}$$



- Kulik-Omel'yanchuk 1977*
- Habercorn et al 1978*
- Zaitsev 1984*
- Beenakker 1991*
- Bagwell 1992*
- Beenakker-Houten 1991*

Длинный 1-модовый контакт. Спектр.

$$d \gg \xi$$

S - N - S

Number of levels $N \sim d\Delta/\hbar v_x$

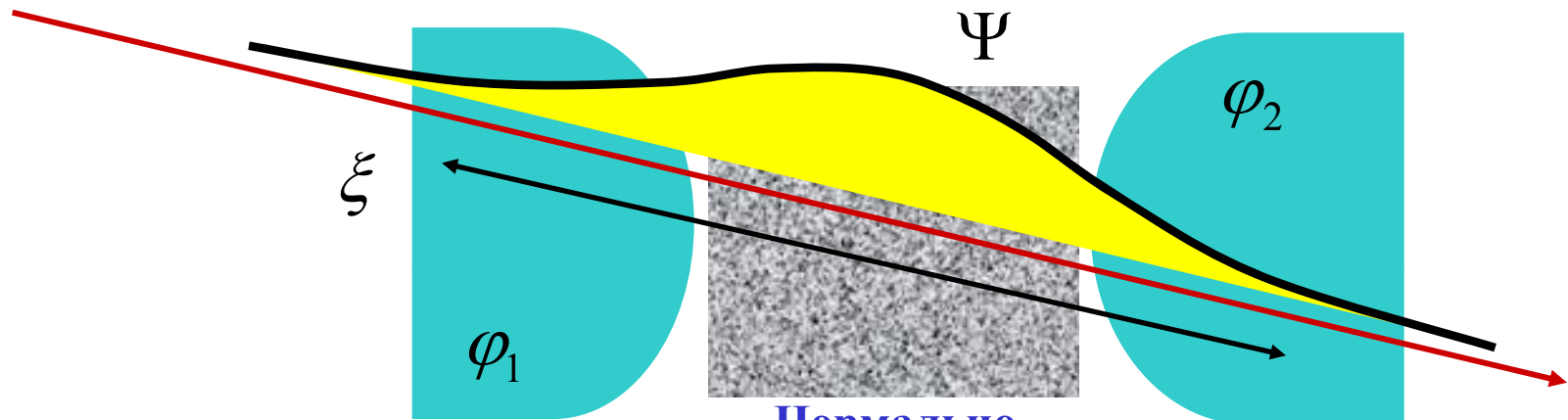
$$\varepsilon_n(k_r) \approx \frac{(n + 1/2)\pi\hbar v_x}{d}$$

А.Ф.Андреев (1965)

$$d \ll \xi$$

Короткий контакт. Решение задачи о спектре.

Beenakker (1992).



R_A

Нормально
рассеивающая
область

R_A

T_n Вероятности прохождения для
различных поперечных мод

$$\varepsilon_n = \pm \Delta \sqrt{1 - T_n \sin^2(\phi/2)}$$

$$d \ll \xi$$

Короткий контакт. Предельные случаи.

$$I(\phi) = \frac{e\Delta^2}{2\hbar} \sin \phi \sum_n \frac{T_n}{\varepsilon_n} \tanh \frac{\varepsilon_n(\phi)}{2T}$$

$$T_n \rightarrow 1 \quad I(\phi) = \frac{e\Delta}{2\hbar} \sin \phi \sum_n \frac{1}{|\cos(\phi/2)|} \tanh \frac{|\cos(\phi/2)|}{2T}$$

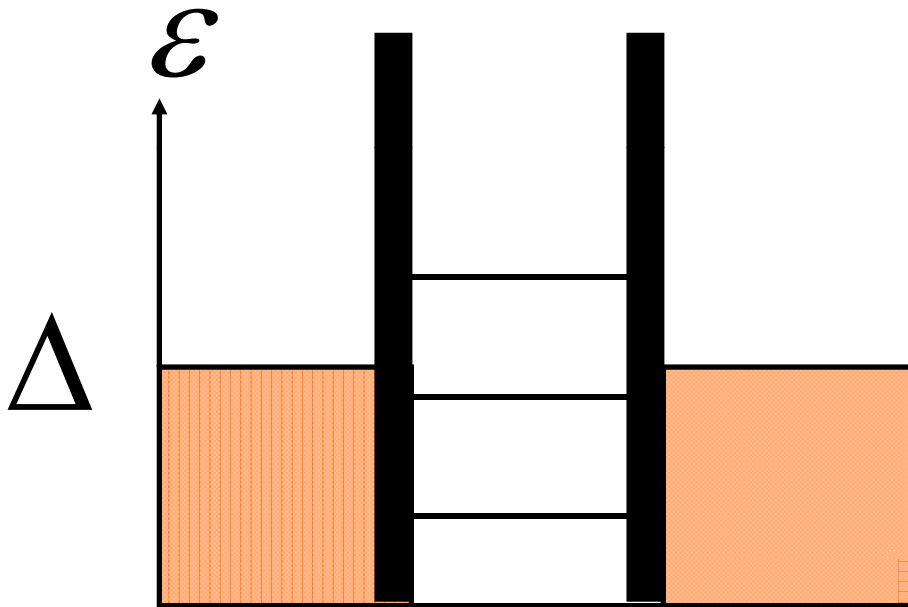
$$T \rightarrow 0 \quad I(\phi) = \frac{e\Delta}{\hbar} N \sin(\phi/2) \operatorname{sign}[\cos(\phi/2)]$$

$$T_n \rightarrow 0 \quad I(\phi) = \frac{e\Delta}{2\hbar} \tanh \frac{\Delta}{2T} \sin \phi \sum_n T_n$$

Оценка максимального крит тока на 1 моду:

$$I_c \sim \frac{e}{\tau} \sim \frac{eV_F}{\xi} \sim \frac{e\Delta}{\hbar}$$

S - I - N - I - S контакт с резонансными уровнями



$$U_{1,2}(x) = I\delta(x \pm d/2)$$

$$Z = \frac{mI}{\hbar^2 k_x}$$

e.g., Schussler, Kummel (1993)

Gogadze, Kosevich (1998)

Jakobs, Kummel (2005)

Kuhn et al (2001)

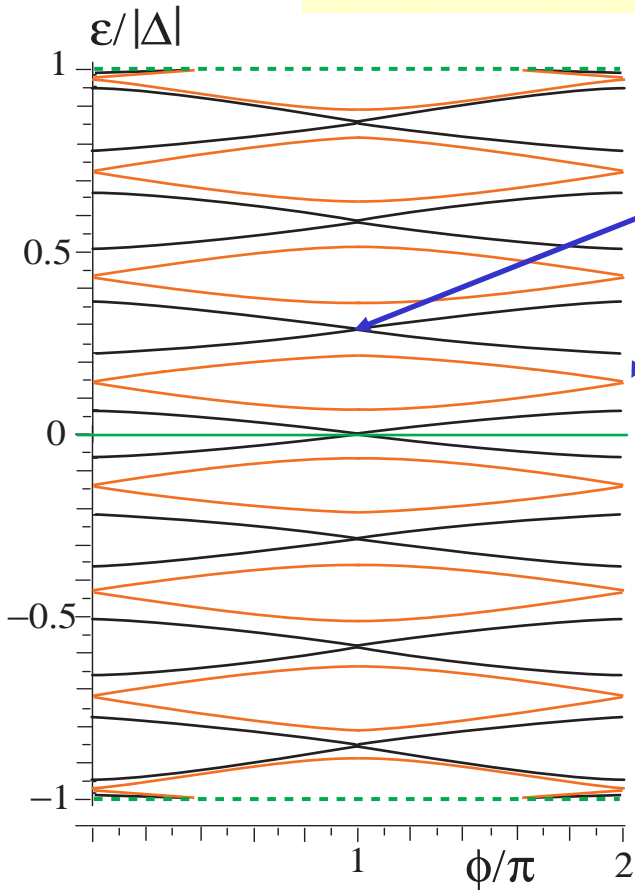
A.Furusaki et al (1992)

Galaktionov, Zaikin (2002)

Подщелевой спектр SINIS контакта

$$|R_N|^2 \sin^2 \alpha' + |R_A|^2 \cos^2(\phi/2) = \sin^2(\beta + \gamma)$$

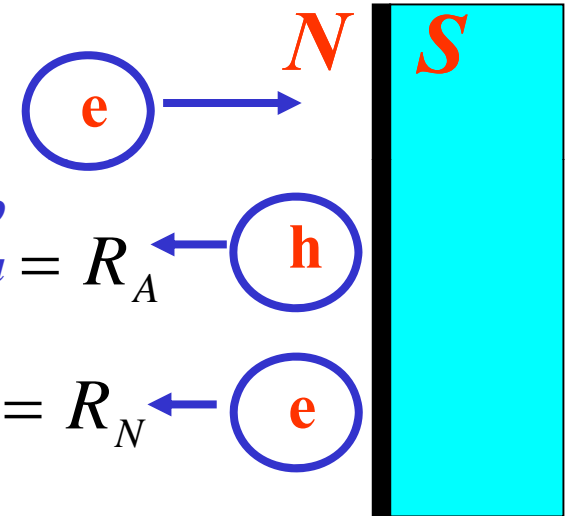
$$\alpha' = k_x d + \delta; \quad \beta = \frac{\varepsilon d}{\hbar v_x}; \quad \cot \delta = Z$$



Закрытые
минищели

Амплитуда андреевского
отражения = R_A

Амплитуда нормального
отражения = R_N



$$\frac{\hbar v_x}{d} \sim \text{Ширина минизоны}$$

$Z=0.5, d\Delta/\hbar v_x=10.$

Черные линии: $\sin \alpha'=0.$

Красные линии: $\sin \alpha'=\pm 1$

Все минищели при $\phi=\pi$ and $\phi=0$ исчезают
 $\sin \alpha'=0$ и $\sin \alpha'=\pm 1$, соответственно

Джозефсоновский контакт – сужение (constriction).
Несинусоидальное ток-фазовое соотношение.
Квантование крит тока.

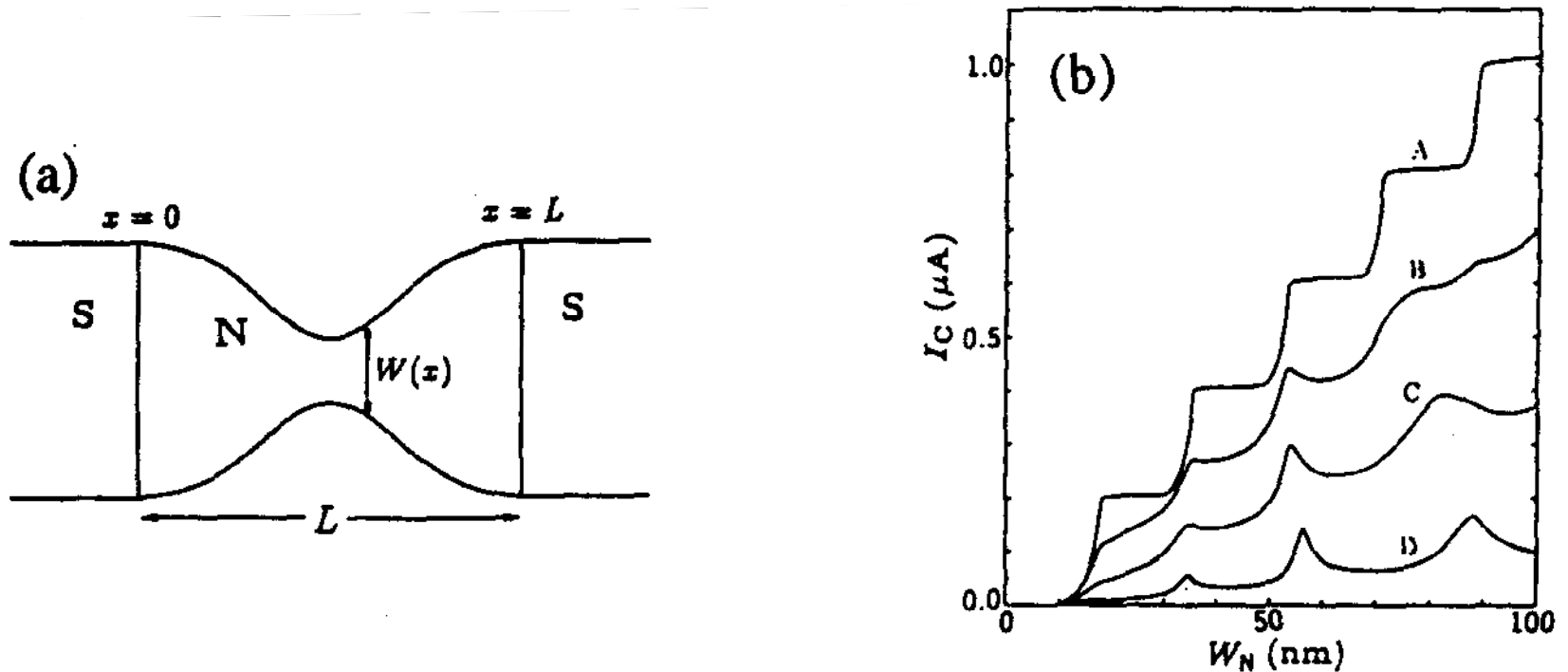
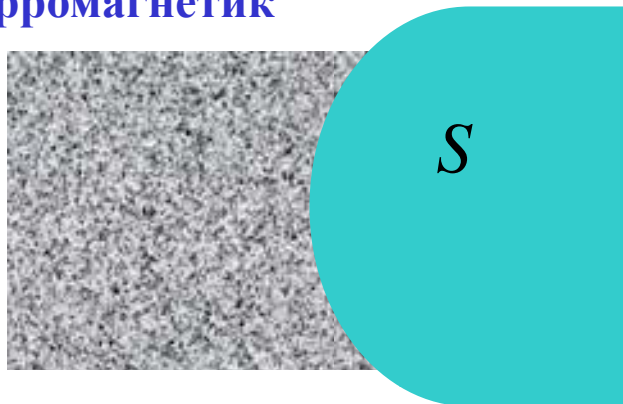


Figure 18. (a) Schematic drawing of an SQPC. (b) Critical current as a function of constriction width. Z value is 0, 0.2, 0.5, and 1.0 from top to bottom (from ref.89).

Андреевское отражение в SF системах

ферромагнетик



\hbar -Обменное поле

Уменьшение амплитуды андреевского отражения.
Probe of spin polarization by S tip.

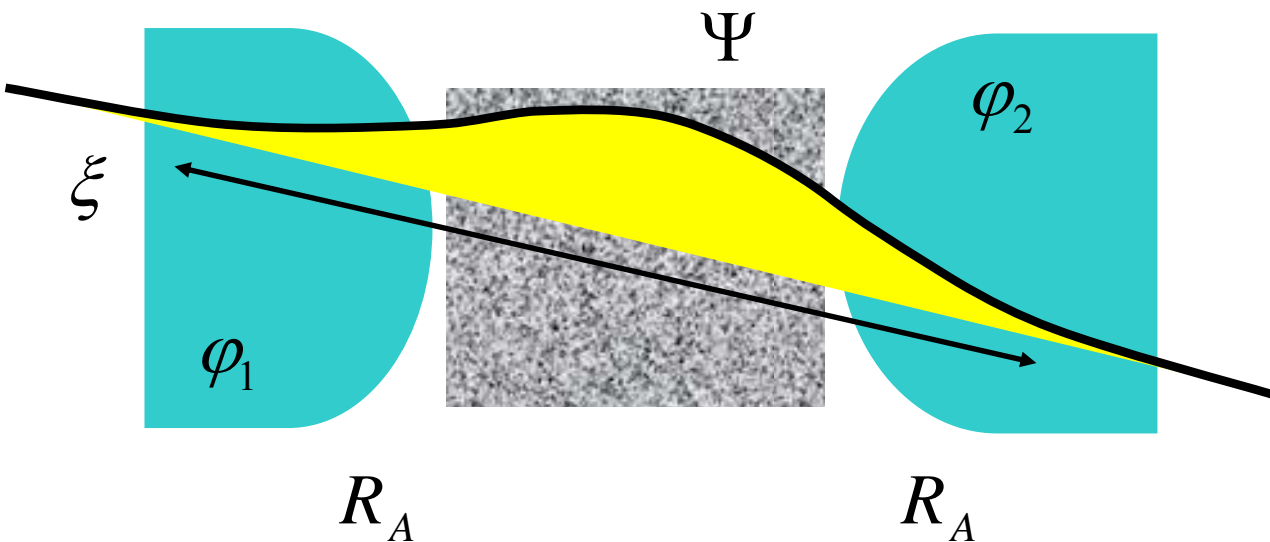
$$-i\hbar\vec{V}_F\nabla u + \Delta v = (\varepsilon \pm h)u$$

$$i\hbar\vec{V}_F\nabla v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm h)v$$

Дополнительные набег фаз вдоль траекторий:

$$\frac{\hbar L}{\hbar V_F}$$

Подавление крит тока.
Переход 0-пи контакт



1. Найти спектр квазичастиц в 1D андреевской яме
2. Найти спектр квазичастиц в 2D андреевской яме
3. Найти спектр квазичастиц в 3D андреевской яме

4. Найти ток-фазовое соотношение для одномодового контакта Джозефсона
5. Вычислить V_{AX} NIS контакта
6. Вычислить V_{AX} FIS контакта