

*Применение уравнений Боголюбова в  
современной физике сверхпроводимости:  
введение*

*Лекция 1*

*А.С.Мельников*

- ◆ Электроны и дырки в нормальном металле и в сверхпроводнике. Качественная картина.
- ◆ Гамильтониан БКШ
- ◆ Эффективный гамильтониан. Преобразование Боголюбова-Валатина
- ◆ Неоднородные сверхпроводящие состояния. Уравнения Боголюбова-де Жена. Функции Грина. Уравнения Горькова.
- ◆ Интересные современные вопросы

**21 августа 2009 г.: 100 лет д.р.**

**Н.Н.Боголюбова**



**Теория сверхпроводимости 1957-  
БКШ**

**Слабо  
взаимодействующий  
Бозе-газ 1947 -ННБ**

**Уравнения для электронов и  
дырок в сверхпроводниках  
1958- 1959-ННБ**

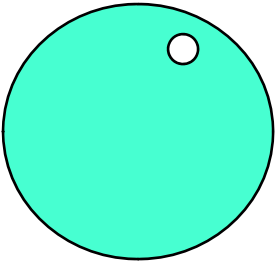
**Уравнения Горькова 1958**

**Андреевское отражение 1964**

# Электроны и дырки в нормальном металле

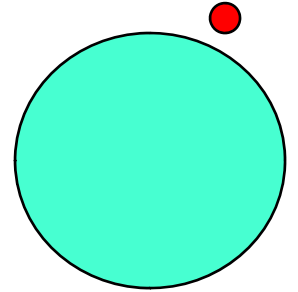
Дырки

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \approx V_F (k_F - k)$$



Электроны

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \approx V_F (k - k_F)$$



Ферми-жидкостные

эффекты:  $\varepsilon = V_F^* |k - k_F|$

Уравнение Шредингера:

$$\left( \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) v = \varepsilon v$$

$$u = 0$$

$$\left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) u = \varepsilon u$$

$$v = 0$$

## Электроны и дырки в нормальном металле

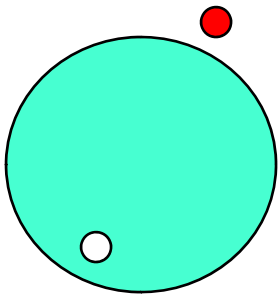
$$\langle 0 | \hat{a}_q \hat{a}_k^+ | 0 \rangle \neq 0$$

- вероятность рассеяния электрона из состояния  $|\hat{a}_k^+ | 0 \rangle$  в состояние  $|\hat{a}_q^+ | 0 \rangle$

## Электроны и дырки в сверхпроводнике.

Аномальные средние.

$$\langle 0 | \hat{a}_q^+ \hat{a}_k^+ | 0 \rangle \neq 0 \quad - \text{вероятность рассеяния электрона из состояния } |\hat{a}_k^+ | 0 \rangle \\ \text{в дырочное состояние } |\hat{a}_q | 0 \rangle$$



2 связанных уравнения Шредингера = уравнения Боголюбова

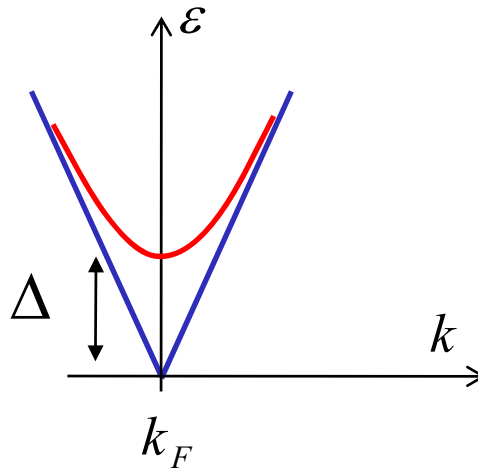
$$\left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) u + \Delta v = \epsilon u$$
$$\left( \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) v + \Delta u = \epsilon v$$

## Однородное сверхпроводящее состояние:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

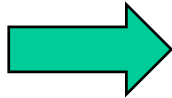
$$\varepsilon = \pm \sqrt{\Delta^2 + (\hbar V_F (k - k_F))^2}$$

Сверхпроводящая щель



**Низкие температуры: в однородном сверхпроводнике с изотропной щелью квазичастиц нет**

**Неоднородности  
щели**



**Изменение спектра  
квазичастиц**




**Информация о типе  
сверхпроводящего  
спаривания**

**Эксперименты: туннельная спектроскопия, теплопроводность, теплоемкость, поглощение ЭМ волн, спиновая восприимчивость, .....**

## *Кое-какие «мелочи»:*

*магнитное поле, фаза параметра порядка,  
калибровочная инвариантность, потенциальное  
рассеяние на неоднородностях, границах, спин*


$$\left( \frac{\hbar^2 \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$
$$\left( \frac{\hbar^2 \left( \nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$



*Еще кое-какие «мелочи»:  
Что такое оператор дельта?*

*Ответ 1: дельта – это именно тот параметр  
порядка, который появляется в теории типа  
Гинзбурга-Ландау*

*Ответ 2: дельта – это самосогласованное поле  
куперовских пар*

*Ответ 3: дельта – это вообще-то нелокальный  
оператор*

$$\hat{\Delta}u = \int \Delta(\vec{r}_1, \vec{r}_2)u(\vec{r}_2)d\vec{r}_2$$

## *Модель БКШ*

$$\hat{H} = \sum \hbar V_F (k - k_F) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} + g \sum a_{q\uparrow}^+ a_{-q\downarrow}^+ a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow}$$

Коммутационные соотношения  $\{a_{k\sigma}^+ a_{q\beta}\} = \delta_{kq} \delta_{\sigma\beta}$

## *Метод среднего поля*

$$\hat{H} = \sum \hbar V_F (k - k_F) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma}$$

$$+ g \sum \langle a_{q\uparrow}^+ a_{-q\downarrow}^+ \rangle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow}$$

$$+ g \sum a_{q\uparrow}^+ a_{-q\downarrow}^+ \langle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \rangle$$

$$- g \sum \langle a_{q\uparrow}^+ a_{-k\downarrow} \rangle a_{-q\downarrow}^+ a_{k\uparrow} + g \sum a_{q\sigma}^+ a_{k\sigma} \langle a_{-q-\sigma}^+ a_{-k-\sigma} \rangle$$

## *Эффективный гамильтониан*

$$\hat{H} = \sum \hbar V_F (k - k_F) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} + \sum \Delta^* a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} + \sum a_{q\uparrow}^+ a_{-q\downarrow}^+ \Delta$$

## *Уравнение самосогласования*

$$g \sum_k \langle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \rangle = \Delta$$

# Преобразование Боголюбова-Валатина

$$a_{k\uparrow} = u_{k\uparrow} \alpha_{k\uparrow} + v_{k\uparrow}^* \alpha_{-k\downarrow}^+$$

$$a_{k\uparrow}^+ = u_{k\uparrow}^* \alpha_{k\uparrow}^+ + v_{k\uparrow} \alpha_{-k\downarrow}$$

$$a_{k\downarrow} = u_{k\downarrow} \alpha_{k\downarrow} - v_{k\downarrow}^* \alpha_{-k\uparrow}^+$$

$$a_{k\downarrow}^+ = u_{k\downarrow}^* \alpha_{k\downarrow}^+ - v_{k\downarrow} \alpha_{-k\uparrow}$$

$$H = U_0 + \sum_{k\sigma} \varepsilon_k \alpha_{k\sigma}^+ \alpha_{k\sigma} \quad \{ \alpha_{k\sigma}^+ \alpha_{q\beta} \} = \delta_{kq} \delta_{\sigma\beta}$$

$$|u_{k\sigma}|^2 + |v_{k\sigma}|^2 = 1$$

$$|u_{k\sigma}|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_k}{\varepsilon_k} \right)$$

$$|v_{k\sigma}|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_k}{\varepsilon_k} \right)$$

$$\xi_k = \hbar V_F (k - k_F)$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2}$$

$$\frac{|g|}{2V} \sum_k \frac{\Delta}{\varepsilon_k} \tanh \frac{\varepsilon_k}{2T} = \Delta$$

## Теория Хартри-Фока в сверхпроводниках

Введем полевые операторы:  $\Psi_\sigma(\vec{r}) = \sum_k e^{i\vec{k}\vec{r}} a_{k\sigma}$

$$\{\Psi_\sigma(\vec{r})\Psi_\beta^+(\vec{r}')\} = \delta_{\sigma\beta}\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\hat{H} = \sum \int \Psi_\sigma^+(\vec{r}) \left( \frac{1}{2m} \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U_0(\vec{r}) - \mu \right) \Psi_\sigma(\vec{r}) d^3 r$$
$$+ g \int \Psi_\uparrow^+(\vec{r}) \Psi_\downarrow^+(\vec{r}) \Psi_\downarrow(\vec{r}) \Psi_\uparrow(\vec{r}) d^3 r$$

$$\hat{H} = \sum \int \Psi_\sigma^+(\vec{r}) \left( \frac{1}{2m} \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U(\vec{r}) - \mu \right) \Psi_\sigma(\vec{r}) d^3 r$$
$$+ \int \Psi_\uparrow^+(\vec{r}) \Psi_\downarrow^+(\vec{r}) \Delta(\vec{r}) d^3 r + \int \Delta^*(\vec{r}) \Psi_\downarrow(\vec{r}) \Psi_\uparrow(\vec{r}) d^3 r$$

## Каноническое преобразование

$$\Psi_{\uparrow}(\vec{r}) = \sum_n \left( u_n(\vec{r}) \gamma_{n\uparrow} - v_n^*(\vec{r}) \gamma_{n\downarrow}^+ \right) \quad \left\{ \gamma_{n\sigma}^+ \gamma_{m\beta} \right\} = \delta_{nm} \delta_{\sigma\beta}$$

$$\Psi_{\downarrow}(\vec{r}) = \sum_n \left( u_n(\vec{r}) \gamma_{n\downarrow} + v_n^*(\vec{r}) \gamma_{n\uparrow}^+ \right)$$

$$H = E_0 + \sum_{k\sigma} \varepsilon_n \gamma_{n\sigma}^+ \gamma_{n\sigma}$$

$$(\hat{H}_0 - \mu)u + \Delta v = \varepsilon u$$

$$(\mu - \hat{H}_0^*)v + \Delta^* u = \varepsilon v$$

Симметрия  
решений:

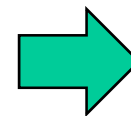
$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, u \rightarrow -v^*, v \rightarrow u^*$$

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda}(\vec{r}) u_{\lambda}^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \int \left( u_{\lambda}(\vec{r}) u_{\nu}^*(\vec{r}) + v_{\lambda}(\vec{r}) v_{\nu}^*(\vec{r}) \right) d^3 r = \delta_{\lambda\nu}$$

$$\sum_{\lambda} v_{\lambda}(\vec{r}) u_{\lambda}^*(\vec{r}') = 0$$

### Уравнение самосогласования

$$\Delta(\vec{r}) = g \langle \Psi_{\downarrow}(\vec{r}) \Psi_{\uparrow}(\vec{r}) \rangle = -g \sum_n u_n v_n^* \tanh \frac{\varepsilon_n}{2T}$$



Вблизи  $T_c$ :  
уравнение ГЛ

## Функции Грина. Уравнения Горькова.

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\lambda} \frac{u_{\lambda}(\vec{r}_1)u_{\lambda}^*(\vec{r}_2)}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}$$

$$F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\lambda} \frac{v_{\lambda}(\vec{r}_1)u_{\lambda}^*(\vec{r}_2)}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}$$

$$\left(\hat{H}_0 - \mu - \varepsilon\right)G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \Delta(\vec{r}_1)F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\left(\mu - \hat{H}_0^* - \varepsilon\right)F(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + \Delta^*(\vec{r}_1)G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

## Методы решения.

$$\left( \frac{\hbar^2 \left( \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + U \right) u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H) u$$

*Масштаб неоднородности  
сверхпроводящей щели*

$$\left( \frac{\hbar^2 \left( \nabla + \frac{ie}{\hbar c} \vec{A} \right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - U \right) v + \Delta^* u = (\varepsilon \pm \beta H) v$$

$$\xi = \frac{\hbar V_F}{\Delta}$$

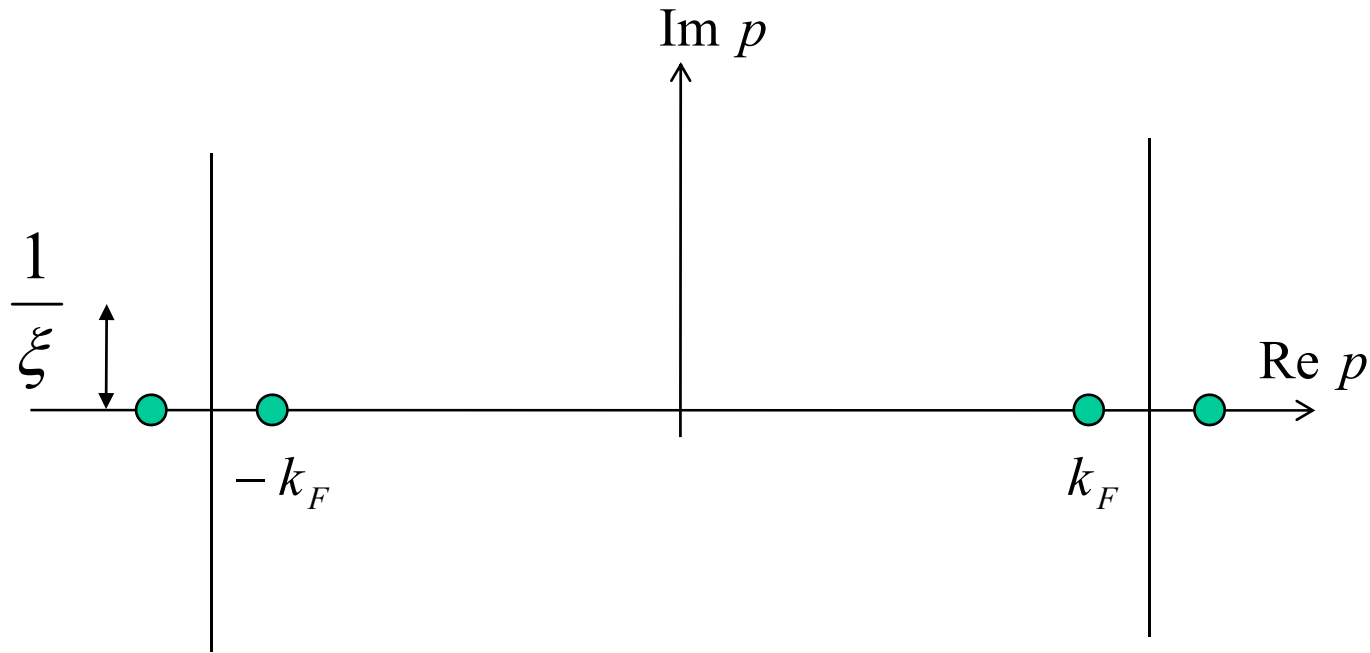
**Квазиклассическое приближение:**

$$\hat{\Psi} = (u, v) = \hat{\psi} e^{iS} \quad |\nabla S| = k_F \gg \frac{1}{\xi}$$



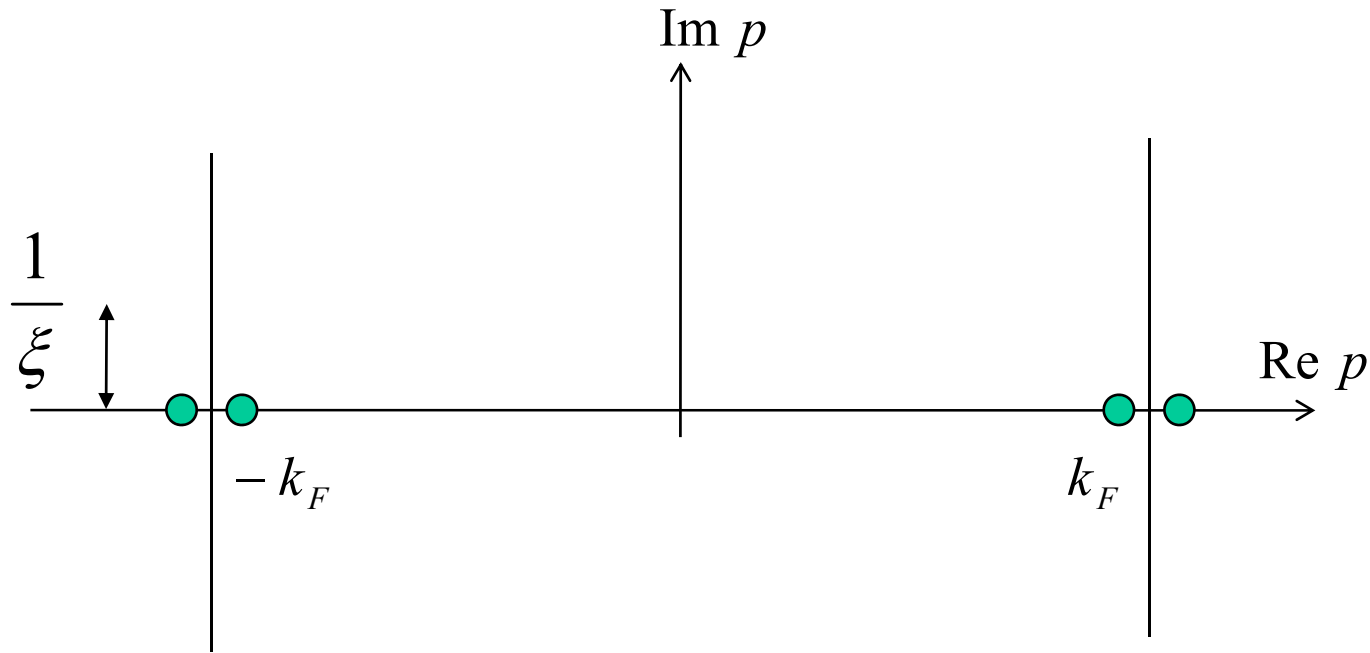
# Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$



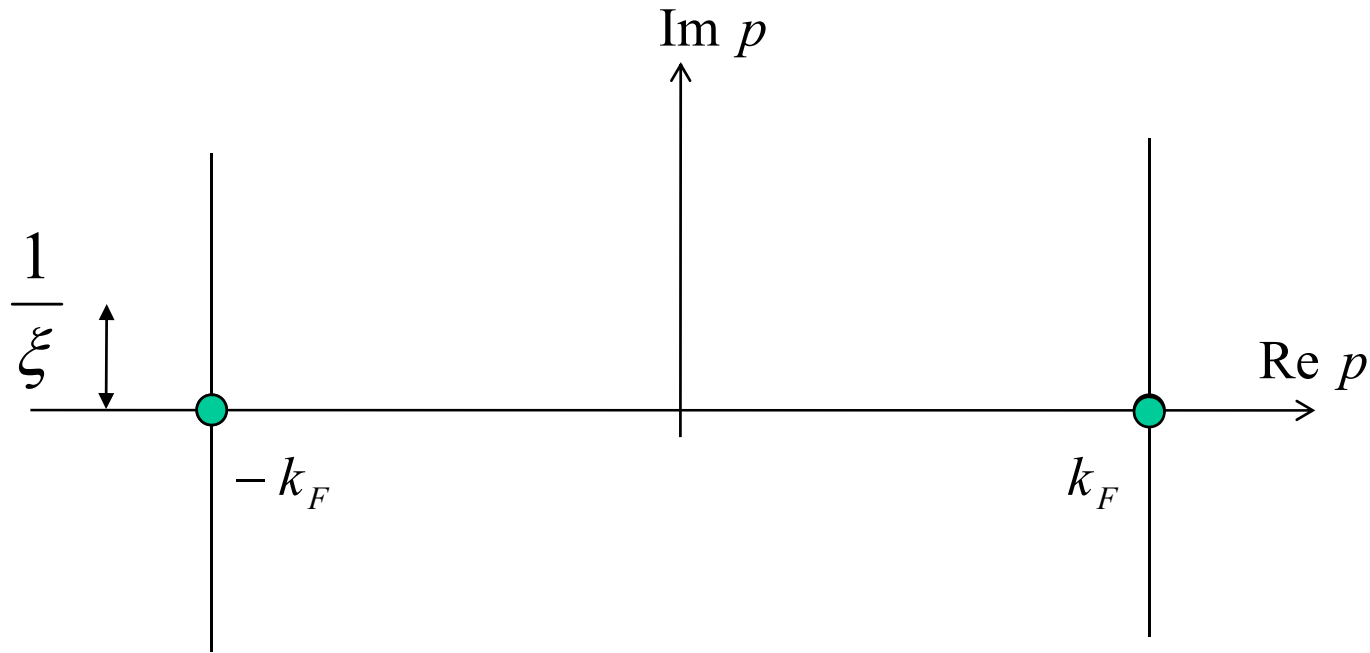
# Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$



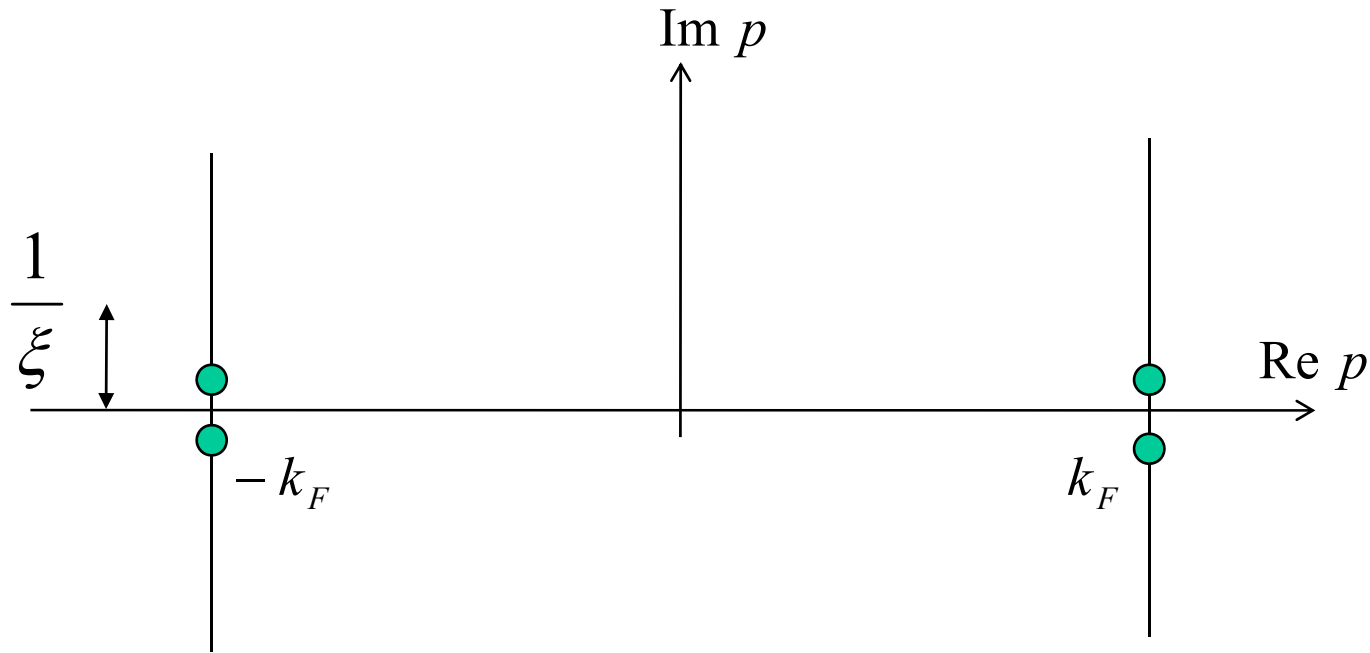
# Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$



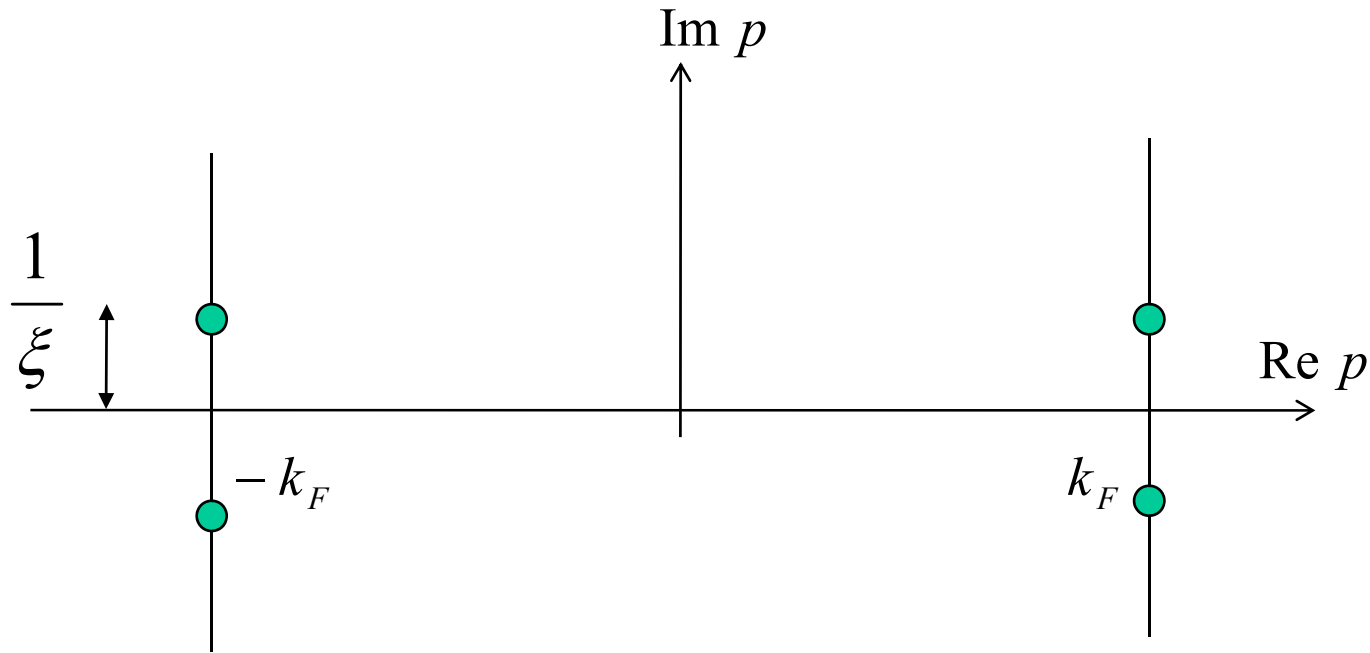
# Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

$$p = S'_x$$




# Особенности квазиклассического приближения в уравнениях Боголюбова.

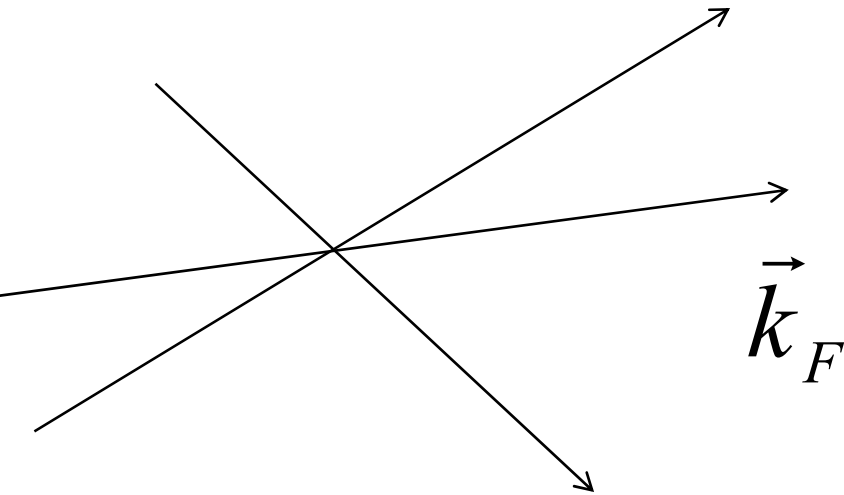
$$p = S'_x$$



## Квазиклассическое приближение. Уравнения Андреева.


$$\left( -i\hbar\vec{V}_F\left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right) + U \right)u + \Delta v = (\varepsilon \pm \beta H)u$$

$$\left( i\hbar\vec{V}_F\left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c}\vec{A}\right) - U \right)v + \Delta^*u = (\varepsilon \pm \beta H)v$$



**Недостатки:**

**Неучет отклонений траекторий в магнитном поле,  
Прецессия траекторий (неточный backscattering при андреевском отражении)**

**Квазиклассическое приближение в уравнениях для функций Грина.**

$$k_F \gg \frac{1}{\xi}$$

**Уравнения Эйленбергера.**

**Грязный предел.**

$$l \ll \xi$$

**Уравнения Узаделя.**

# Квантовая механика электронов и дырок в сверхпроводниках. Некоторые современные направления

- ◆ Квазичастицы в сверхпроводниках с анизотропным спариванием. теплоемкость, теплопроводность, связанные состояния на вихрях и дефектах
- ◆ динамика вихрей в сверхпроводниках

## Мезоскопические сверхпроводящие системы

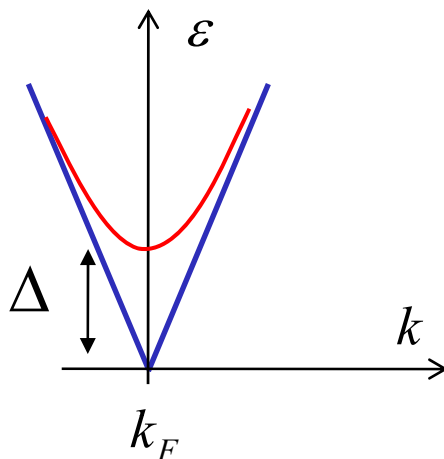
- ◆ квантовый транспорт в гибридных системах с андреевским отражением. Андреевские интерферометры. Интерференционные эффекты в системах с примесями
- ◆ Микротеория джозефсоновских систем. ВАХ. MAR
- ◆ системы сверхпроводник – ферромагнетик



# Квантовая механика квазичастиц как тест на тип сверхпроводящего спаривания

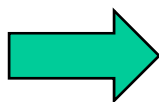
Однородное сверхпроводящее состояние:

Сверхпроводящая щель  $\Delta$

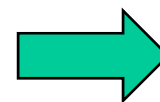


Низкие температуры: в однородном сверхпроводнике с изотропной щелью квазичастиц нет

Неоднородности щели



Изменение спектра квазичастиц

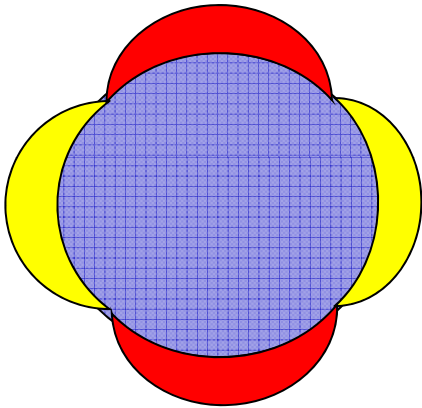


Информация о типе сверхпроводящего спаривания

Эксперименты: туннельная спектроскопия, теплопроводность, теплоемкость, поглощение ЭМ волн, спиновая восприимчивость, .....

## *Анизотропное сверхпроводящее спаривание в ВТСП*

*Анизотропия сверхпроводящей щели в импульсном пространстве*



$$\Delta = \frac{\Delta_0 k_x k_y}{k_F^2}$$

*Последствия:*

*Midgap states*

*Impurity induced quasiparticle states*

*Смесь делокализованных и локализованных состояний в вихрях*

# Фермионные возбуждения в вихревой фазе сверхпроводников

## Почему они важны?

### Local DOS

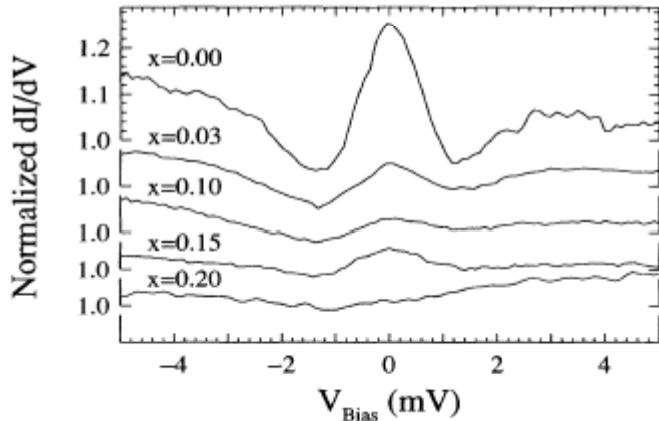
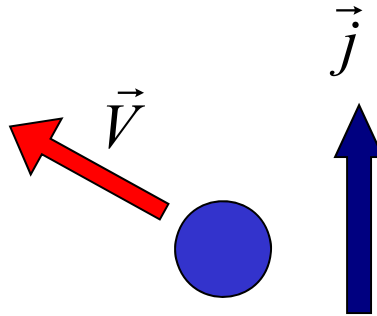


FIG. 3. Spectra taken at the center of a vortex core for various Ta substitutions at 1.3 K and 0.3 T. The spectra are normalized to the differential conductance at high bias.

Ch. Renner et al (1991)

Динамика  
вихрей:  
Диссипация и  
эффект Холла в  
вихревой фазе



### Thermal transport

Thermal conductivity  
along magnetic field:

$$\kappa(B) = n\kappa_v \propto \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

Experiment:

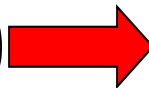
$$\kappa(B) \ll \kappa_n \frac{B}{H_{c2}}$$

---

Экспериментальные указания на тип сверхпроводящего спаривания

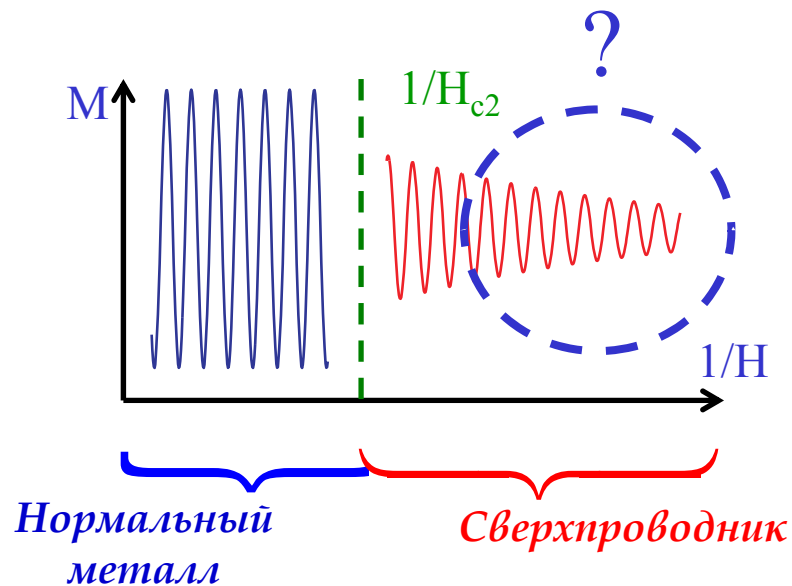
# Квантовые осцилляционные эффекты в сверхпроводниках

Большое межвихревое  
расстояние.  
Caroli – de Gennes – Matricon  
спектр.  
Минищель.



Нормальный металл  
Спектр Ландау.  
Минищели нет.  
Осцилляции де Гааза – ван  
Альфена.

Механизм кроссовера ?

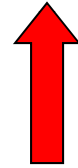
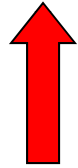


# Мезоскопические нормальные и сверхпроводящие системы.

От атомов к макроскопическим объектам.

От квантовой к классической механике.

Пространственный масштаб



$$\sim 10^{-8} \text{ cm} = 1 \text{ \AA}$$

$$\sim 10^{-7} - 10^{-4} \text{ cm} = 10 - 10^4 \text{ \AA}$$

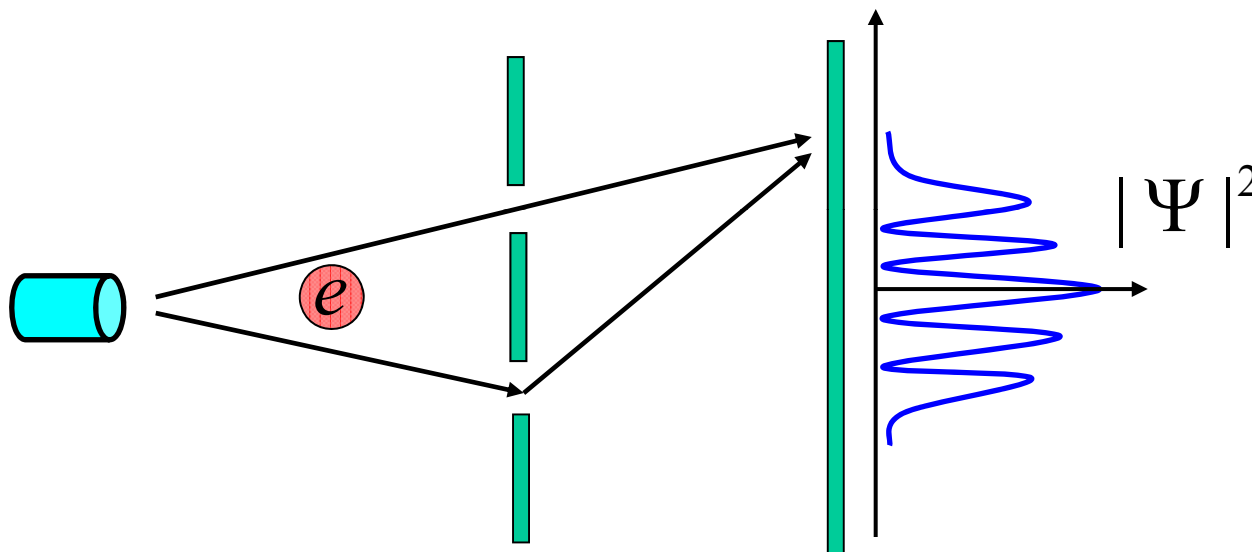
*промежуточные масштабы  
мезоскопика*

$\sim 1 \text{ cm}$   
*макротела*

*Уже очень много атомов,  
но все еще квантово-механическая система!*

# Основной закон физики мезо-систем: квантовая механика.

Основное следствие: интерференция волн де-Бройля



$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\vec{r})$$

Упругое рассеяние



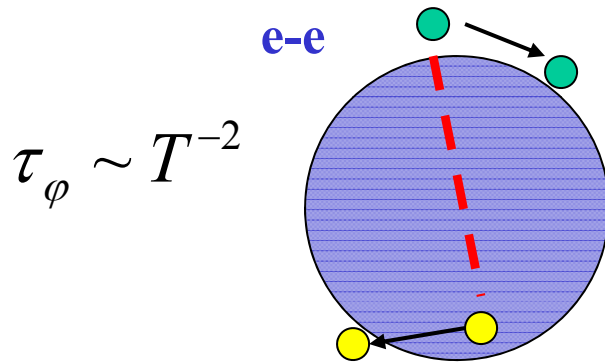
*Уравнения Боголюбова -  
адекватный инструмент  
для описания свойств  
сверхпроводящих мезо-  
систем*

Ограничение на размер мезо- системы:  $L \ll l_\varphi$

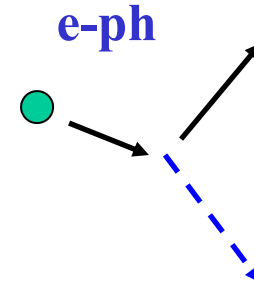
Длина сбоя фазы волновой функции

$$l_\varphi \sim \sqrt{D\tau_\varphi}$$

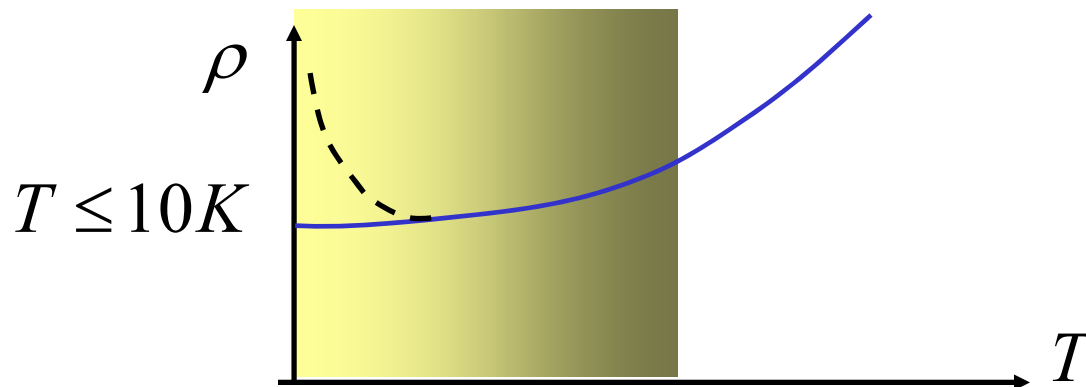
Коэффициент  
диффузии  $D = \frac{v_F^2 \tau}{3}$



$$\tau_\varphi \sim \hbar^3 \omega_D^2 T^{-3}$$

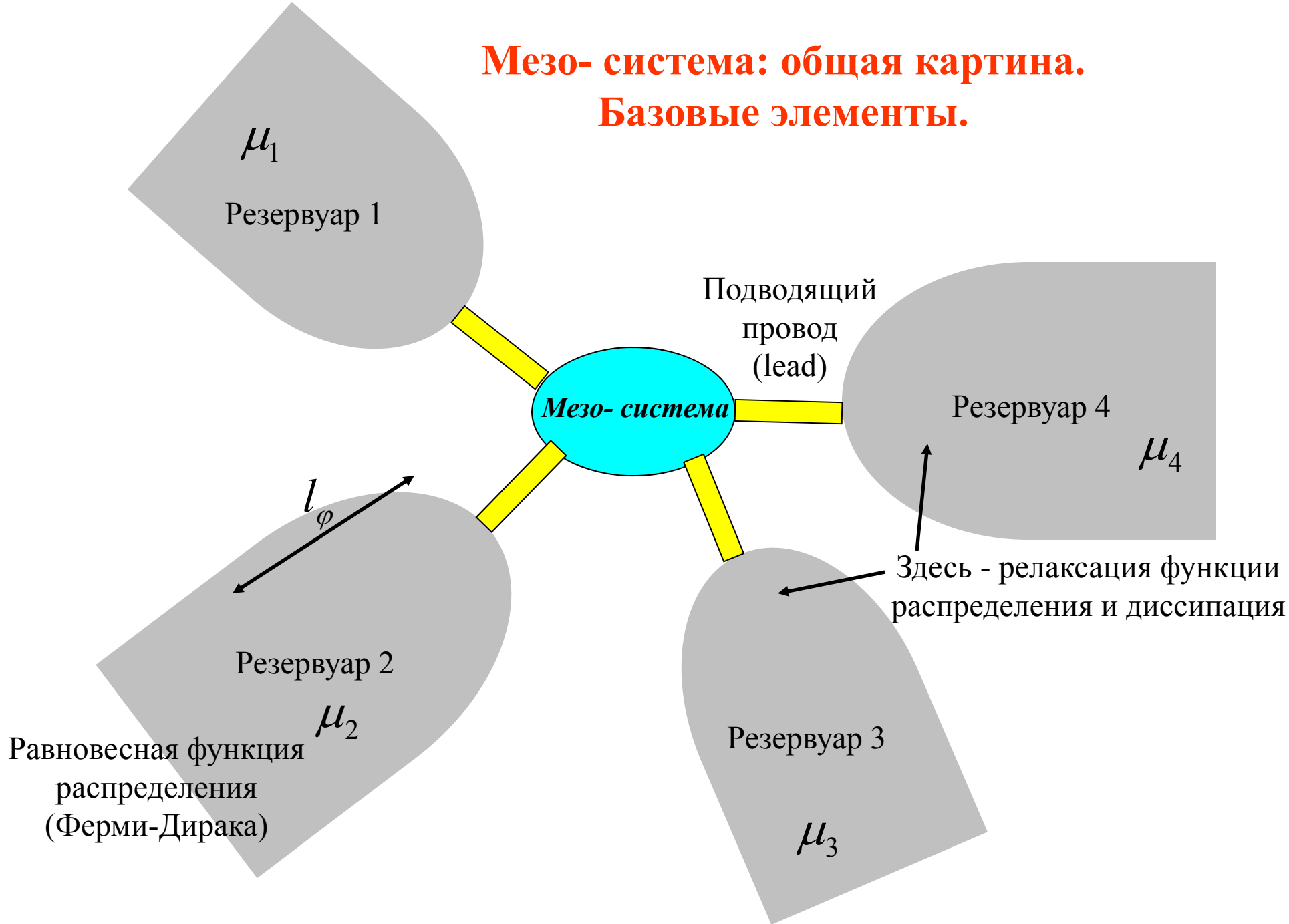


Низкие температуры



$$l_\varphi \leq 10^4 \text{ \AA}$$

# Мезо-система: общая картина. Базовые элементы.



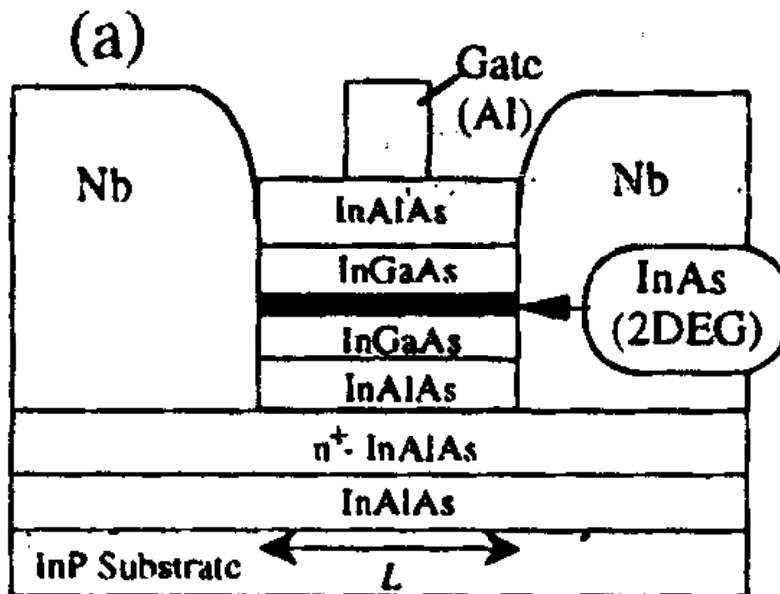


## Некоторые примеры.

Системы 2D электронный газ-сверхпроводник.

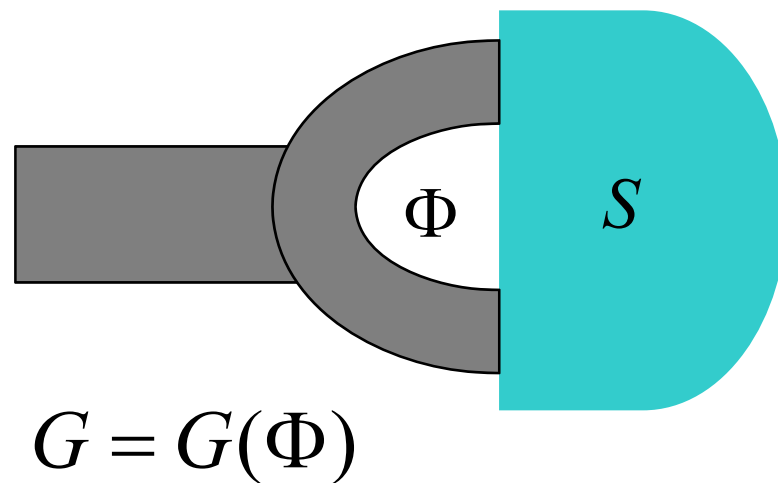
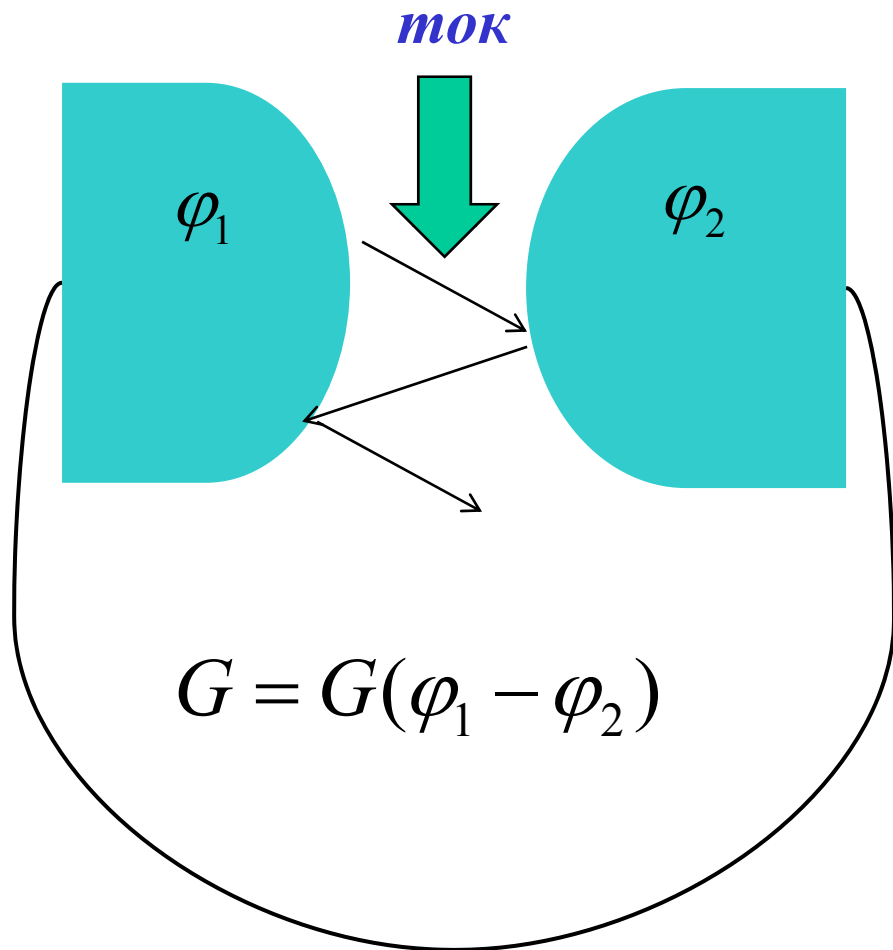
*Эффект близости.*

*Баллистический предел.*



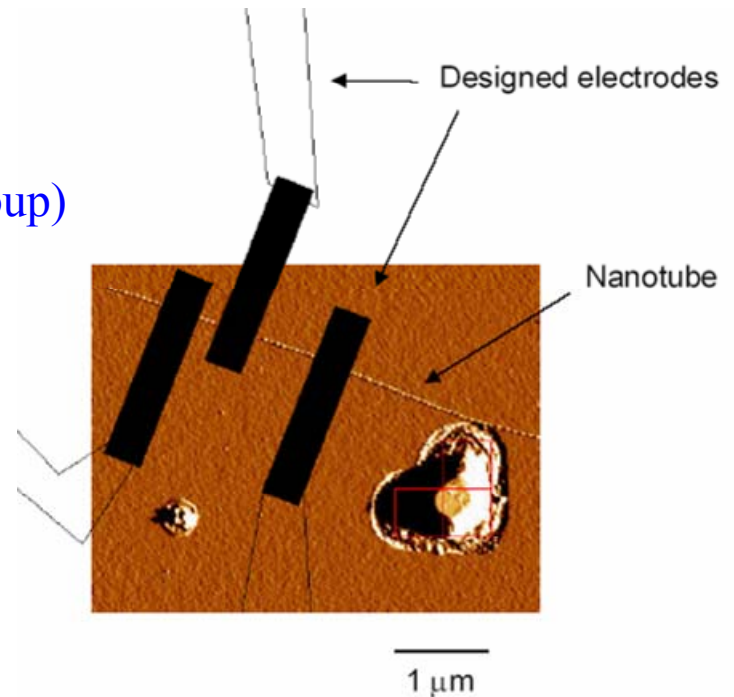
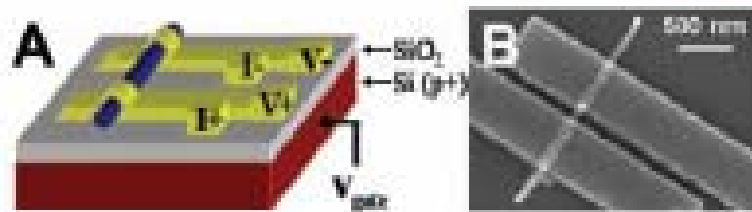
# Андреевский интерферометр

(В.Т.Петрашов, den Hartog, Nakano, Takayanagi...)



# Системы нанотрубки-сверхпроводник. Эффект близости.

(Delft University group)



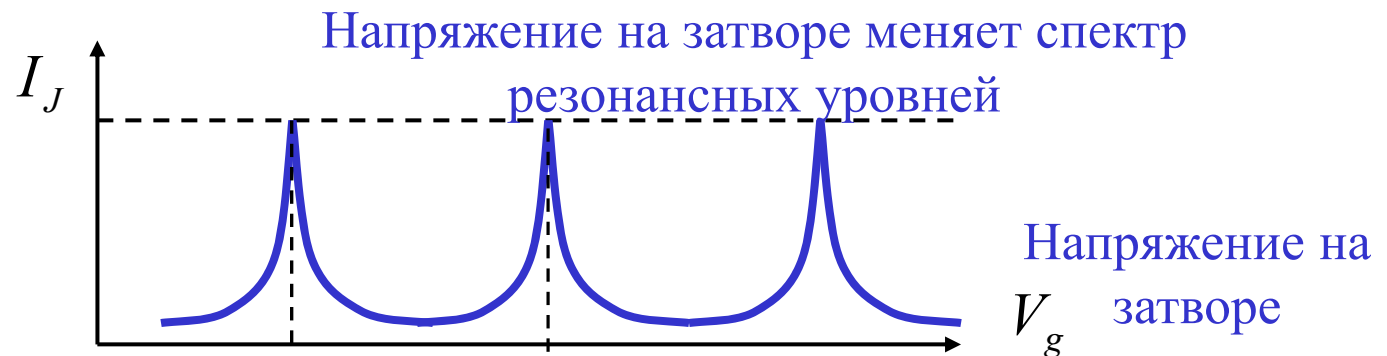
**InAs нанопроволока - Ti/Al  
электроды**

Doh *et al.*, *Science* **309**, 272 (2005)

**Углеродная нанотрубка - Ti/Al электроды**

Jarillo-Herrero *et al.*, *Nature* **439**, 953 (2006)

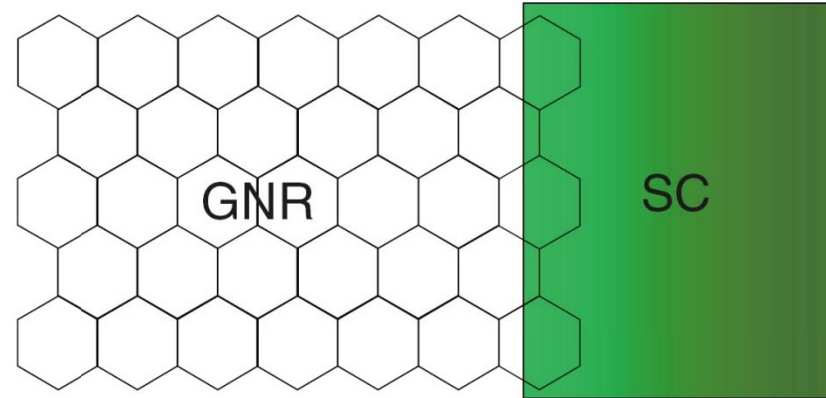
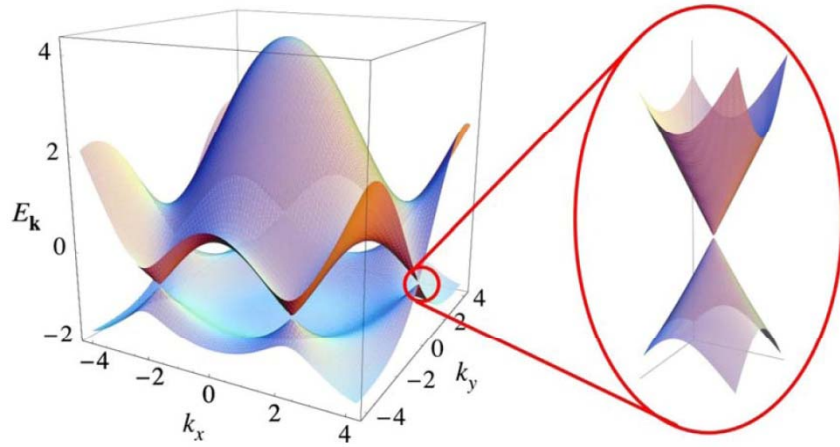
Джозефсоновский  
крит ток



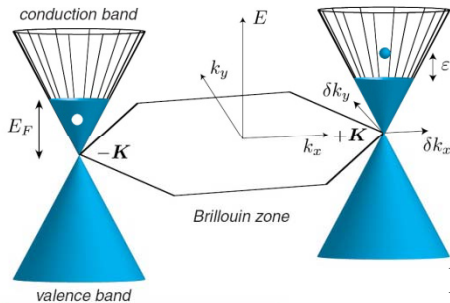
## Системы графен-сверхпроводник.

*Эффект близости.*

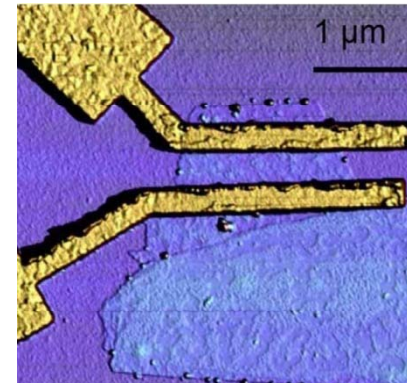
*Уравнения Дирака - Боголюбова - де Жена*



## Graphene spectrum



Induced superconductivity  
in graphene



Josephson junction  
experiment

## Системы топологический изолятор-сверхпроводник.

*Эффект близости.*