



Черенковское излучение джозефсоновских вихрей

Владислав Курин

*Институт Физики Микроструктур РАН,
Нижний Новгород, Россия*

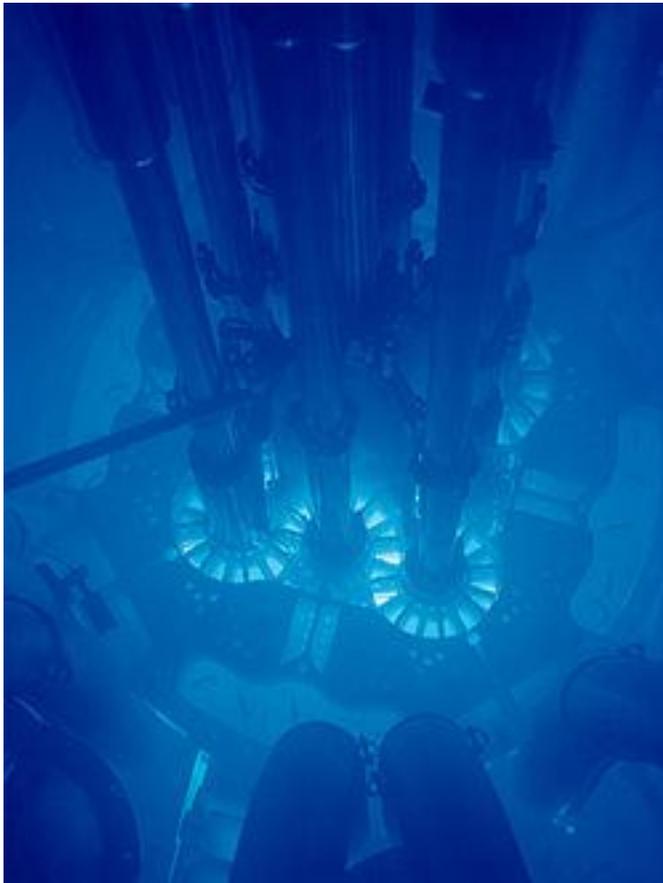
**IX зимняя школа по теоретической физике
НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ**

30 января - 6 февраля 2011 г., Дубна, Россия

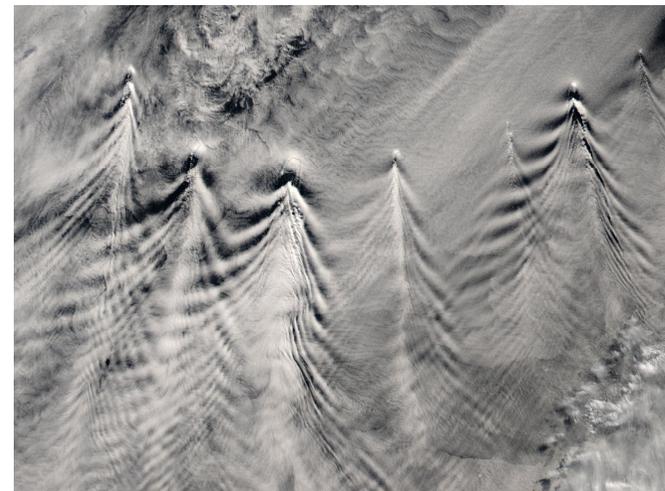
Образы черенковского излучения



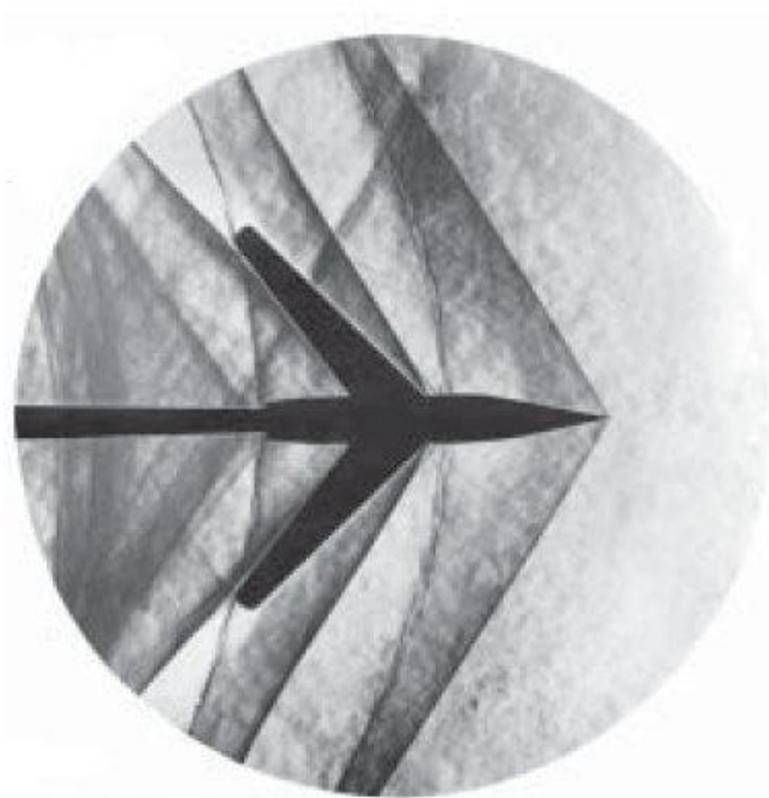
Свечение в ядерном реакторе



Волны на воде



Волны за кораблями и самолетами



Какое отношение все это имеет к сверхпроводимости и джозефсоновским контактам?

Черенковское излучение частиц



Поля и потенциалы

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -c^{-1}\partial_t\mathbf{A} - \nabla\varphi$$

Уравнения Максвелла

$$(\epsilon c^{-2}\partial_t^2 - \Delta)A^i = 4\pi c^{-1}j^i$$

Симметричная калибровка Лоренца

$$c^{-1}\partial_t\varphi + \text{div}\vec{A} = 0$$

4-х ток и потенциал

$$j^i = (c\rho, \mathbf{j}), \quad A^i = (\varphi, \mathbf{A})$$

Движущийся источник- точечный заряд

$$\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{j} = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$$

Общая теория



Уравнение для волн любой природы

$$\mathcal{D}(\partial_t, \nabla)\psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r} - \mathbf{v} t)$$

Фурье-преобразование по \mathbf{r}

$$\mathcal{D}(\partial_t, \mathbf{k})\psi_{\mathbf{k}}(t) = f_{\mathbf{k}} \exp\{-i\mathbf{k}\mathbf{v} t\}$$

Собственные волны-решения
дисперсионного уравнения

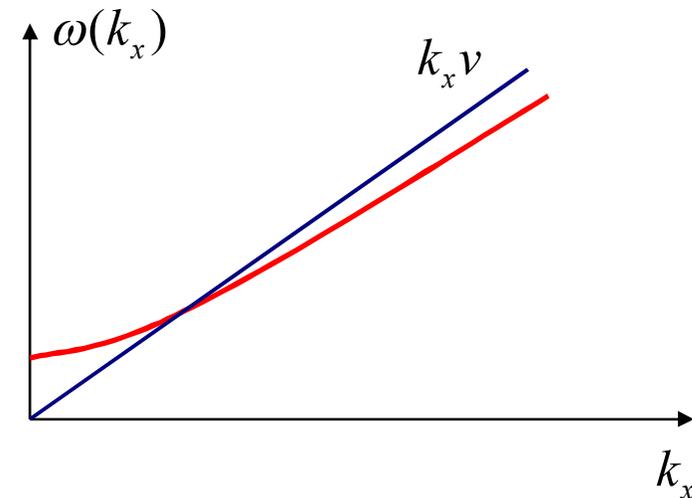
$$D(\omega, \mathbf{k}) = 0$$

Явное решение для резонансного вклада $\mathcal{D}(\partial_t, \mathbf{k}) \approx i \frac{\partial D}{\partial \omega} (\partial_t + i\omega(\mathbf{k}))$

$$\psi_{\mathbf{k}}(t) = f_{\mathbf{k}} \frac{\exp\{-i\mathbf{k}\mathbf{v} t\} - \exp(-i\omega(\mathbf{k}) t)}{i(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v})}, \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \int \psi_{\mathbf{k}}(t) \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r}\} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

Черенковский резонанс

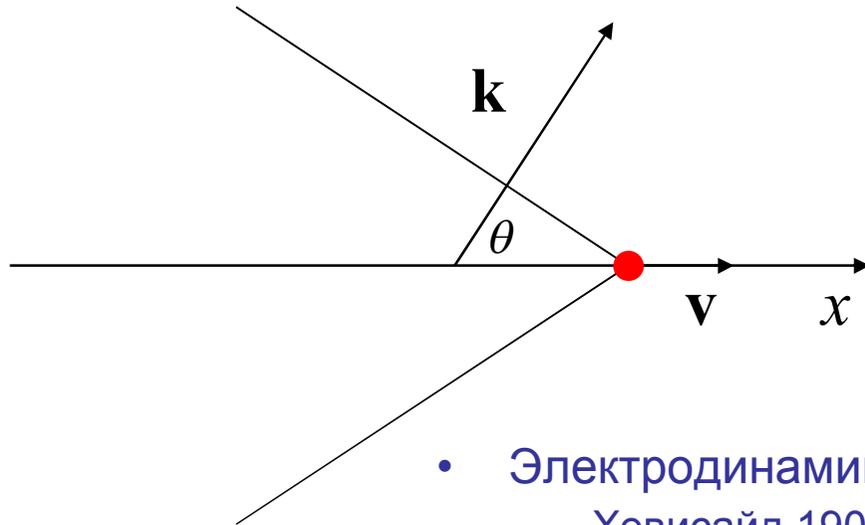
$$\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v}$$



Черенковские конуса

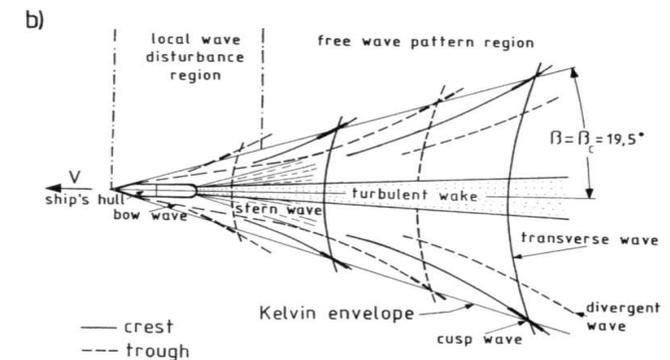
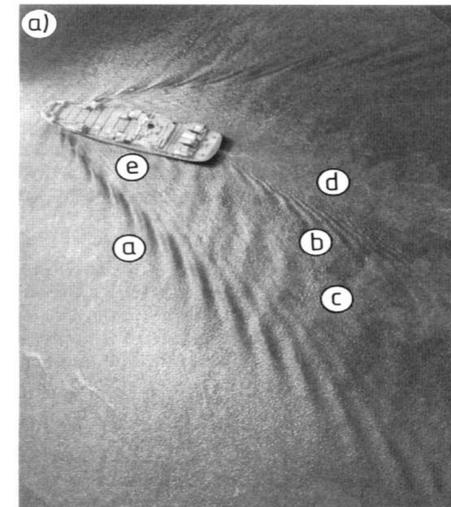


Свет-слабая дисперсия

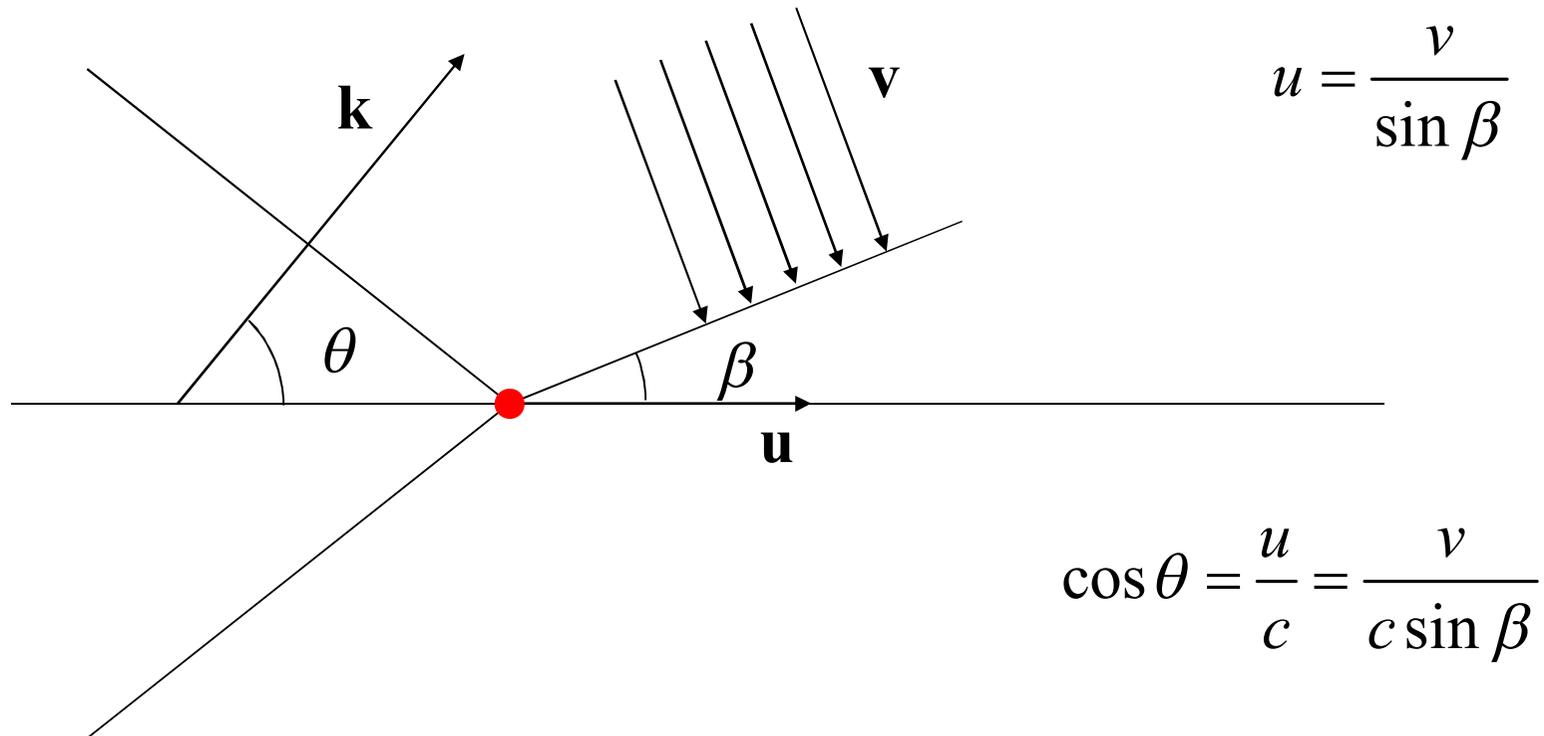


- Электродинамика
 - Хевисайд 1900,
 - Зоммерфельд 1905
 - Вавилов, Черенков, Тамм, Франк 1933-1937
- Волны на воде
 - Лорд Кельвин ~1860
- Акустика
 - Мах 1877

Волны на воде - сильная дисперсия



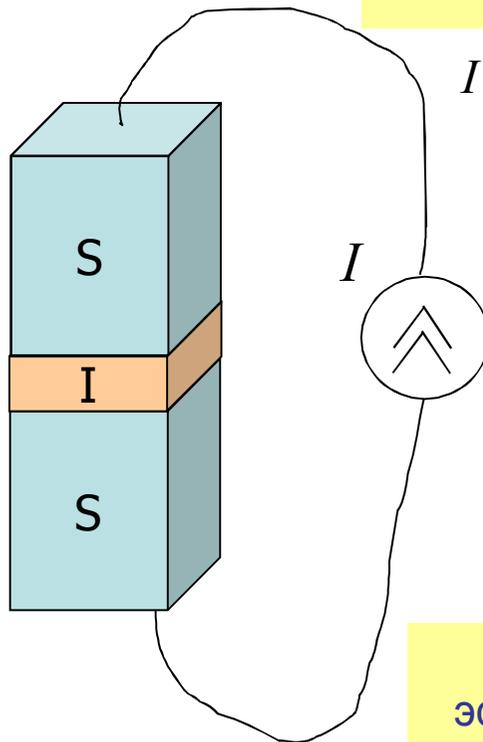
Черенковское излучение «зайчика»



Эффект Джозефсона



Стационарный эффект Джозефсона



$$I < I_c \quad I_s = I_c \sin \theta$$

I_c - критический ток джозефсоновского контакта

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

θ - джозефсоновская разность фаз

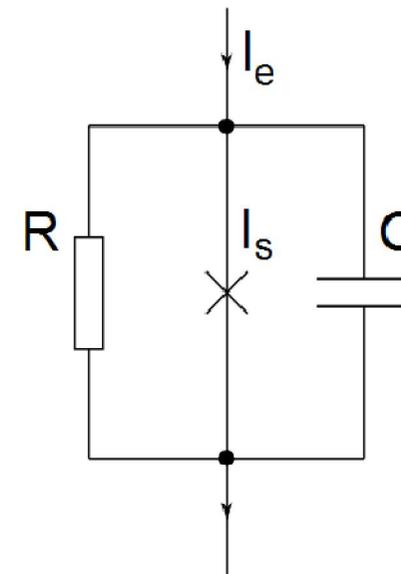
$$\psi_{1,2} = |\psi_{1,2}| \exp(i\theta_{1,2})$$

Нестационарный эффект Джозефсона

$$\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \theta}{\partial t} = U$$

$I > I_c$ — на контакте появляется напряжение

Резистивно-шунтированная модель точечного джозефсоновского контакта

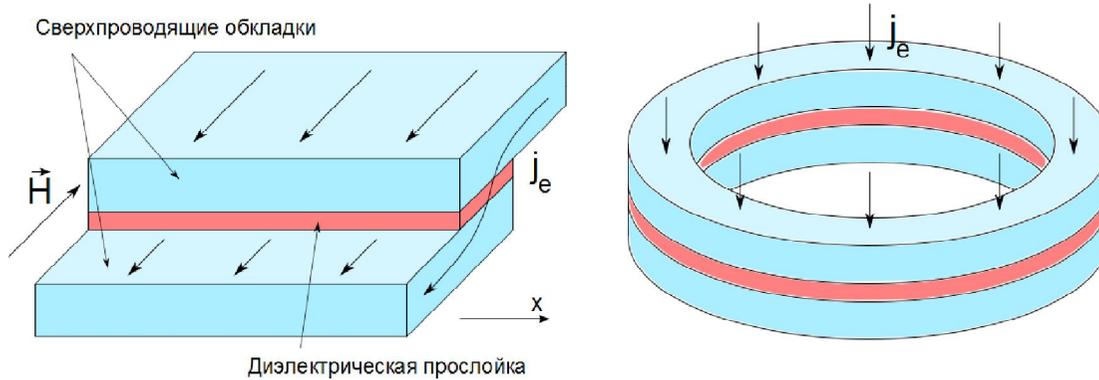


$$\frac{\hbar}{2e} C \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \theta}{\partial t} + I_c \sin \theta = I_e$$

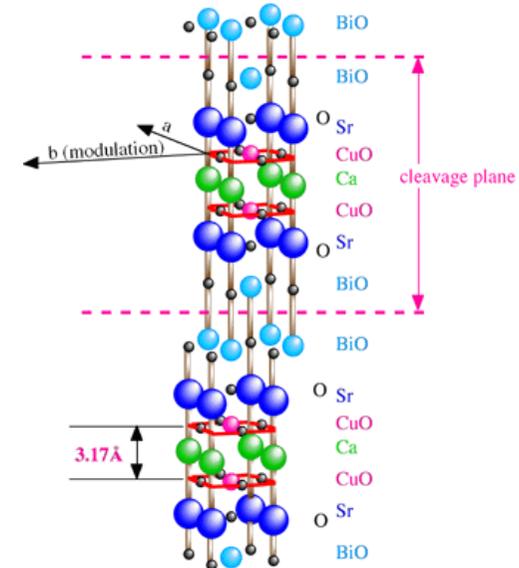
Распределенные джозефсоновские переходы



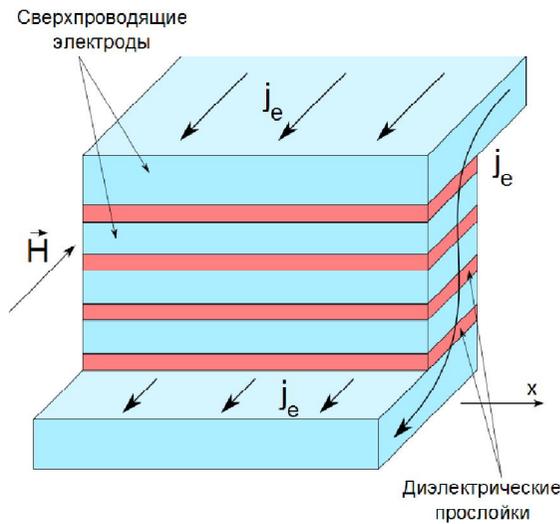
Распределенные джозефсоновские контакты



Слоистые сверхпроводники.



Многослойные распределенные джозефсоновские контакты



$$L \gg \lambda_j$$

Примеры: $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, ... — обладают внутренним эффектом Джозефсона!

— характерный размер вдоль плоскости контакта должен быть достаточно большим

Джозефсоновские вихри



$$\theta_{tt} - \theta_{xx} + \sin \theta = -\gamma \dot{\theta} + j_{ext}$$

— уравнение синус-Гордона

Характерные масштабы

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c (d + 2\lambda)}}$$

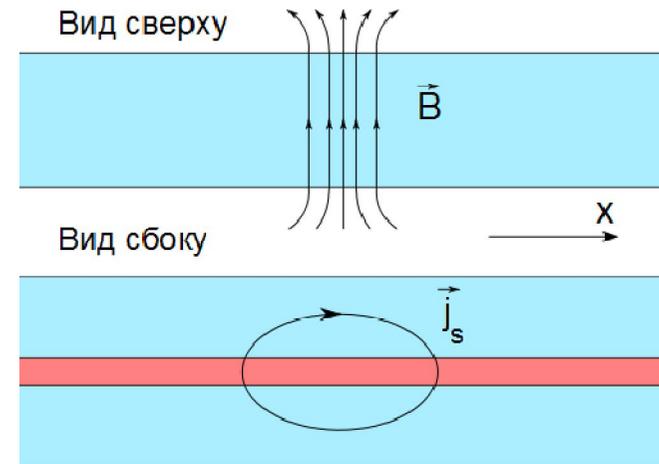
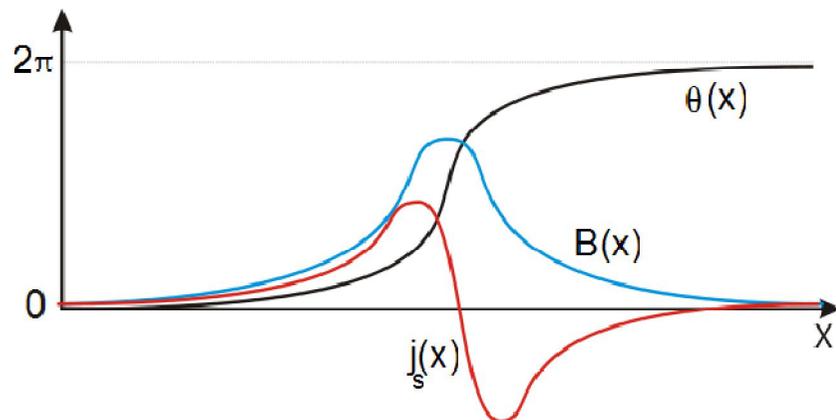
$$\omega_j = \sqrt{\frac{8\pi^2 j_c c d}{\epsilon \Phi_0}}$$

Джозефсоновский вихрь

$$\tan \frac{\theta}{4} = \exp\left(\pm \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}\right)$$

$$\bar{c} = \omega_j \lambda_j = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\frac{d}{d + 2\lambda}}$$

— скорость Свихарта



$$B_z(x) \sim \theta_x, E_y(x) \sim \theta_t$$

Волны Свихарта

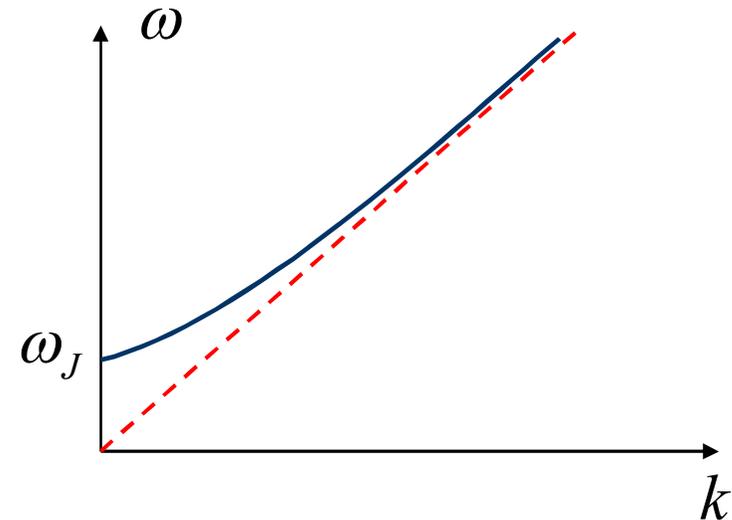


Джозефсоновские «плазменные» волны

Дисперсия волн

$$\omega^2 = 1 + k^2$$

$$\theta(x, t) = \text{Im } A \exp \{i(kx - \omega t)\}$$



Вихри играют роль частиц!

$$\theta(x, t) = \sum_j \frac{2a_j}{\sqrt{1 - \dot{X}_j^2} \cosh \frac{x - X_j(t)}{\sqrt{1 - \dot{X}_j^2}}} + \int A(k) \exp \{i(kx - \omega(k)t)\} \frac{dk}{2\pi}$$

Но! $\dot{X}_j < 1, v_{ph} = \omega / k > 1$

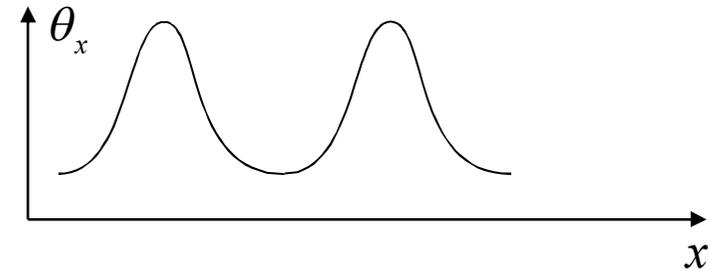
Черенковского излучения нет!

Базисные нелинейные решения SGE



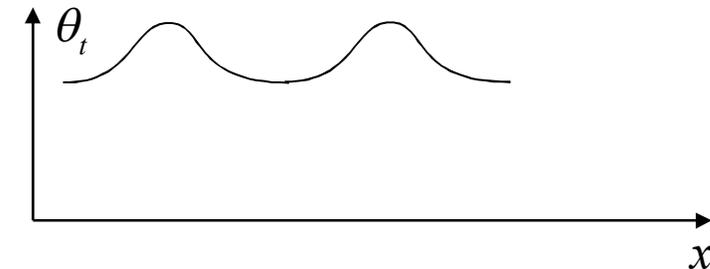
Цепочка вихрей

$$\sin \frac{\theta - \pi}{2} = \operatorname{sn} \left(\frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}, k \right), \quad u < 1$$



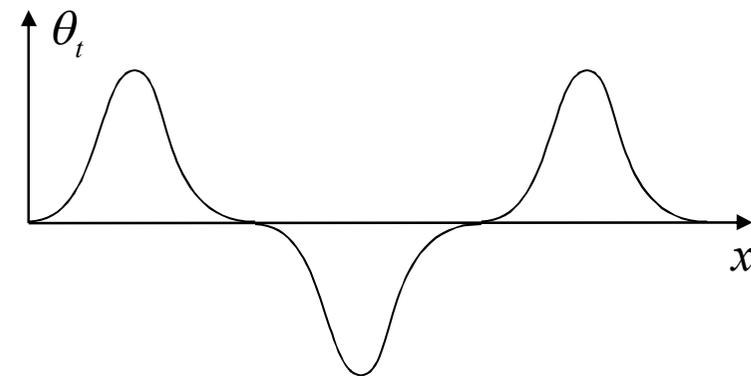
Линия проскальзывания фазы

$$\sin \frac{\theta}{2} = \operatorname{sn} \left(\frac{x - ut}{k\sqrt{1 - u^2}}, k \right), \quad u > 1$$



Нелинейная волна Свихарта

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn} \left(\frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}, k \right), \quad u > 1$$



Вольт-амперная кривая



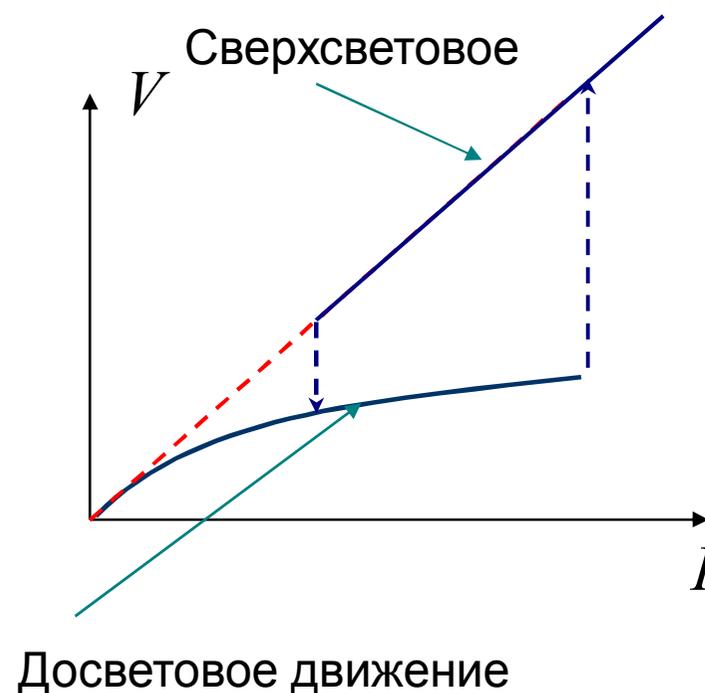
Закон сохранения импульса

$$\gamma u \int \varphi_x^2 dx = j_{ext} \int \varphi_x dx$$

$$\gamma \frac{8u}{\sqrt{1-u^2}} = 2\pi j_{ext}$$

$$I = Lj_{ext}, V = 2\pi \frac{u}{L}$$

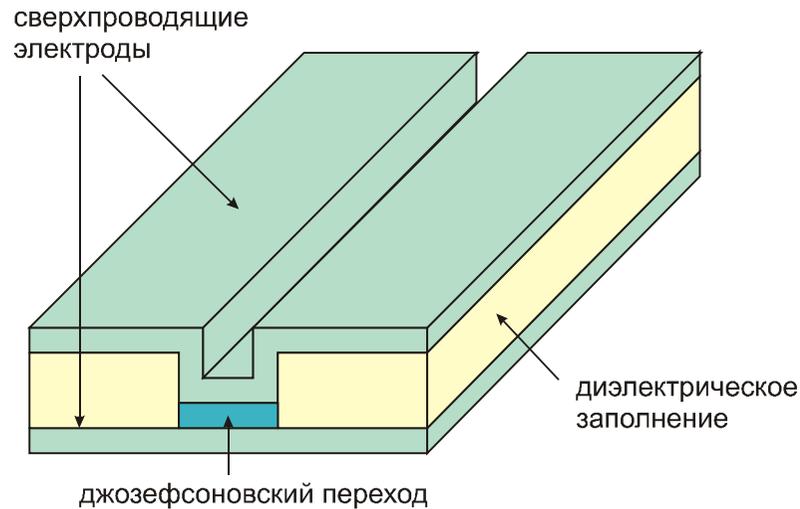
С одним вихрем



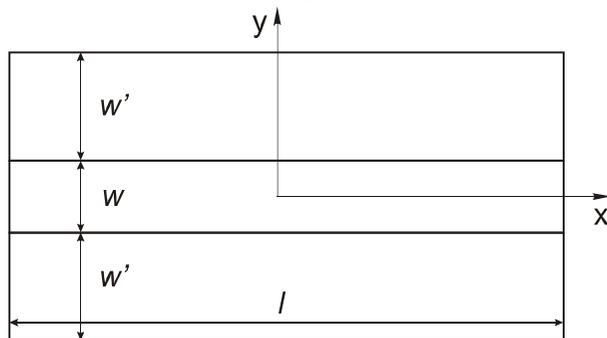
Джозефсоновский контакт в полосковой линии



Исследуемая структура



Вид сверху



Исходная система уравнений

$$\theta_{tt} + \gamma\theta_t - \nabla^2\theta + \sin\theta = 0$$

$$\psi_{tt} + \Gamma\psi_t - c_I\nabla^2\psi_{xx} = 0$$

Граничные условия

$$\theta(y = \pm \frac{w}{2}) = \psi(y = \pm \frac{w}{2})$$

$$\psi_y(y = \pm \frac{w}{2}) = \alpha\theta_y(y = \pm \frac{w}{2})$$

$$\psi_y(y = \pm \frac{w_0}{2}) = \pm \frac{w}{2}\alpha j_e$$

$$\alpha = \frac{L_I}{L_J} \quad \text{— соотношение индуктивностей на единицу площади}$$

$$j_e \quad \text{— внешний ток}$$

Одномерное интегральное уравнение



$$D(\omega, k)\theta_{\omega, k} + [\sin \theta(x, t)]_{\omega, k} = j_{\omega, k}$$

$$D(\omega, k) = k^2 - \omega(\omega + i\gamma) + \frac{2\kappa}{\alpha\omega} \tanh(\kappa\omega')$$

$$\kappa^2(k, \omega) = k^2 - \frac{\omega(\omega + i\Gamma)}{c_I^2}$$

интегральный оператор в x, t
представлении

Квазистатическое приближение

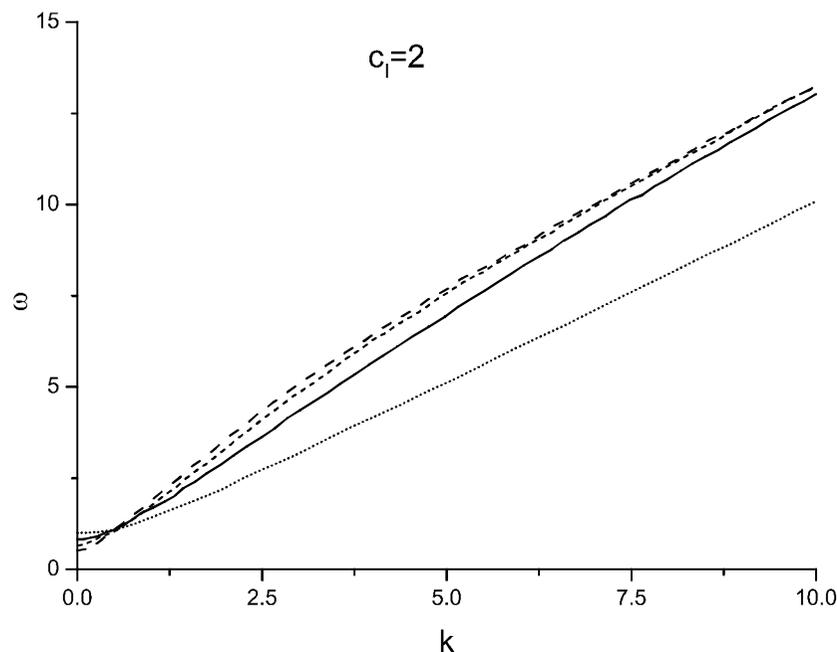
$$D(k, \omega) = A(k) \prod_i (\omega^2 - \omega_i^2(k)) \approx A(k)(\omega^2 - \omega_1^2(k))$$

$$\partial_t^2 \theta_k + \mu^2 \theta_k = -A^{-1}(k) \left([\sin(\theta + \frac{2\pi n}{l} x)]_k + \gamma \partial_t \theta_k - \frac{j_k}{\cosh(k\omega')} \right)$$

Черенковское излучение



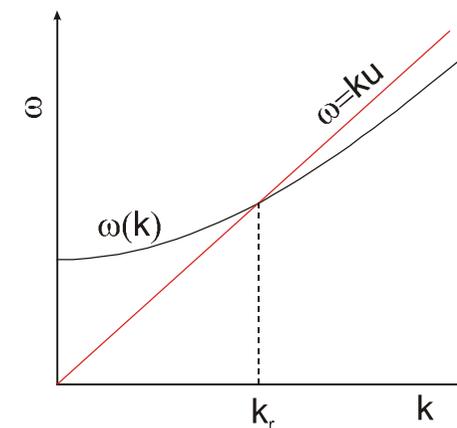
Дисперсионные характеристики при разных значениях ширины полосковой линии



Роль полосковой линии — в возможности обеспечить выполнение условия черенковского синхронизма в исследуемой системе.

Черенковские ступени — условия возникновения

1)



$\omega(k_r) = k_r u$ — условие черенковского синхронизма

2) $k_r = k_m = \frac{2\pi m}{\ell}$

— условие резонансного возбуждения моды кольцевого резонатора

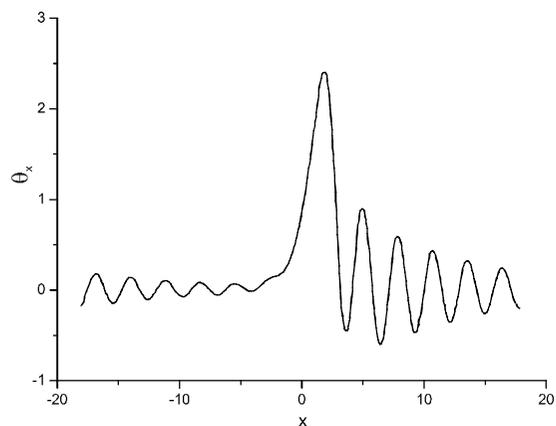
$$u_m = \frac{\omega(k_m)}{k_m}$$

$$\omega^2(k_m) \approx 1 + k_m^2 + \frac{2k_m}{\alpha w} \tanh(k_m w')$$

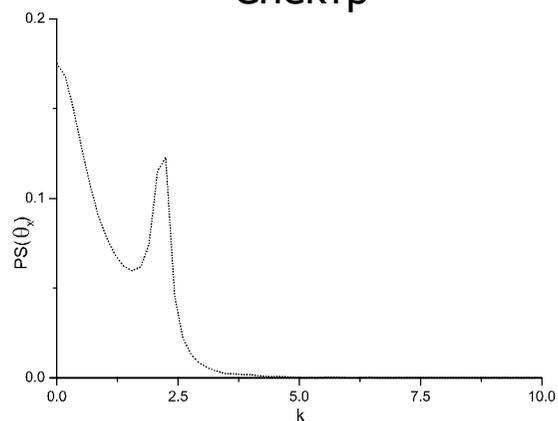
Структура полей



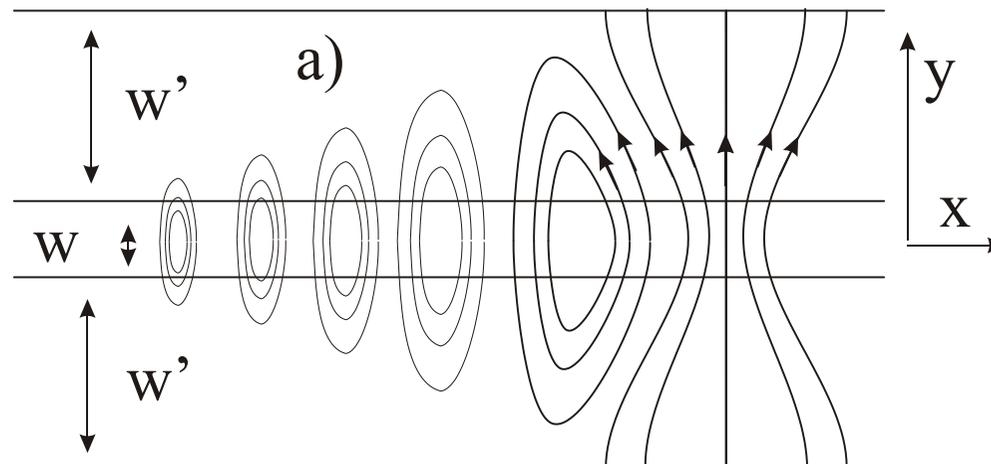
Вихрь с черенковским хвостом



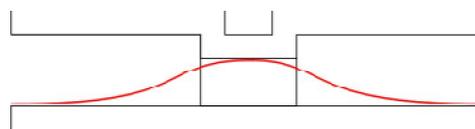
Спектр



Структура поля



Поперечная структура излучаемой моды

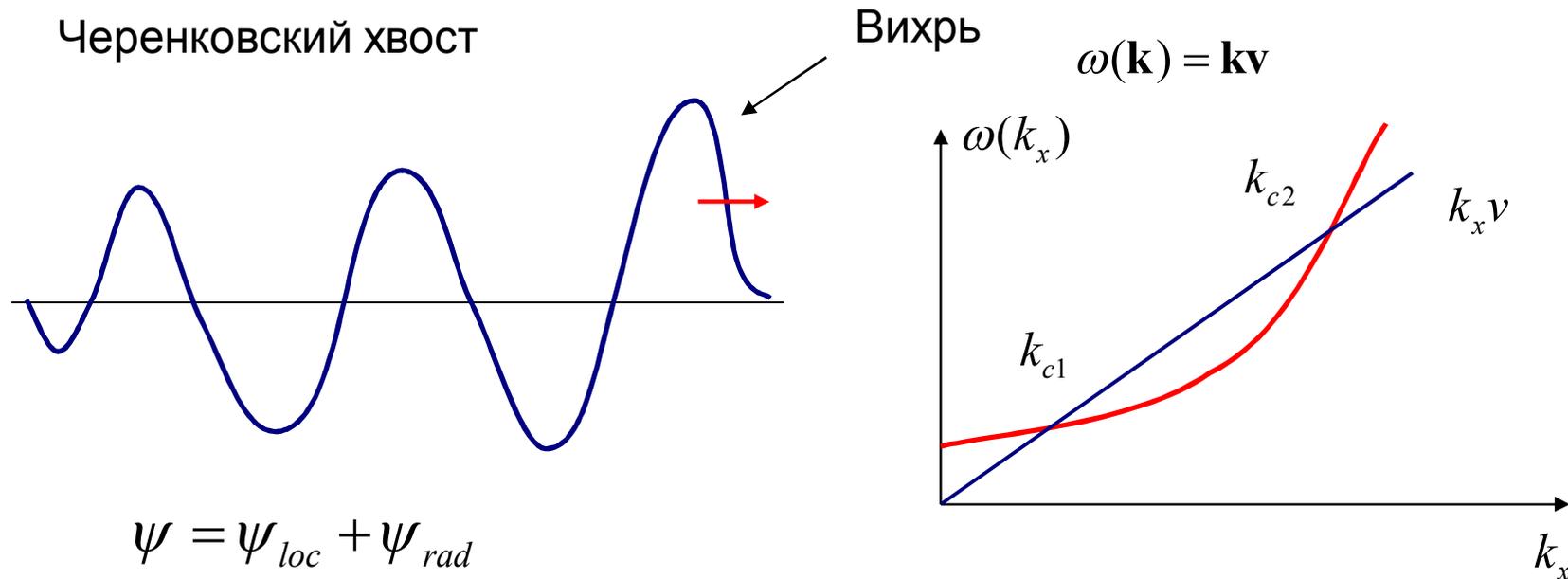


$$v_{Sw} < v_{line}$$

Излучение вбок отсутствует!
Излучение только назад!

$$u > v_{line}, \epsilon > 100$$

Аналитическое представление



$$\psi_{rad} \sim -\frac{k_c f(k_c)}{\frac{\partial D}{\partial \omega} |u - v_g(k_c)|} e^{ik_c(x-ut) + \frac{\Gamma(x-ut)}{u-v(k_c)}} \left[\theta(x-ut) - \theta(x - v_g(k_c)t) \right] + c.c.$$

Черенковские ступени на ИВС.



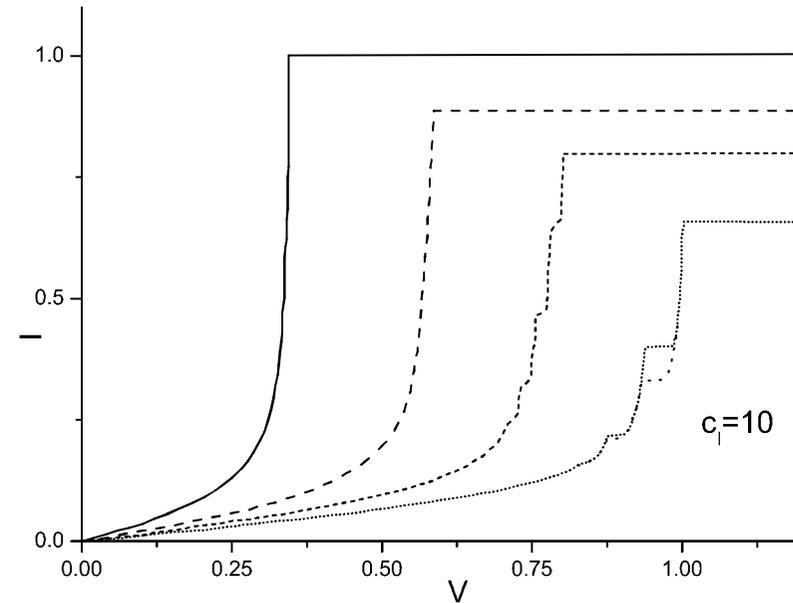
$$\frac{\omega(k_n)}{k_n} = v_n, \frac{\omega(k_{n+1})}{k_{n+1}} = v_{n+1}, k_n = 2\pi n / L$$

Расстояние между ступенями

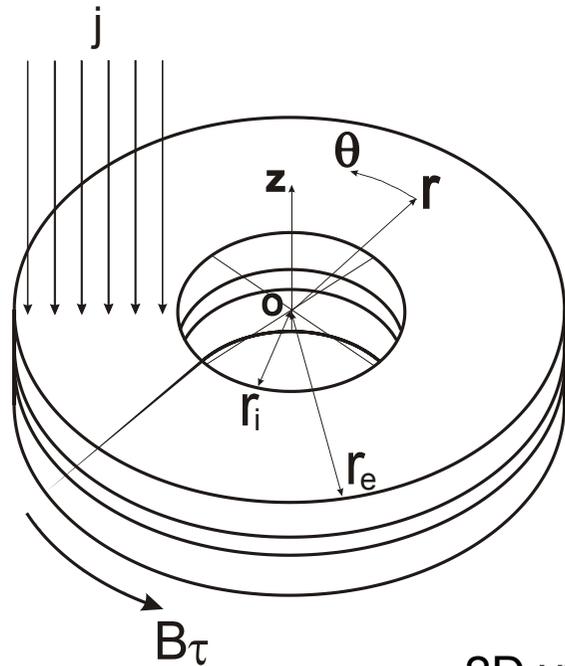
$$v_{n+1} - v_n = \frac{\Delta k}{k_n} (v_{gn} - v_{phn}),$$

$$v_{gn} = \left. \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right|_{k=k_n}, v_{phn} = \frac{\omega(k_n)}{k_n}$$

Вольт-амперные характеристики —
типичный вид



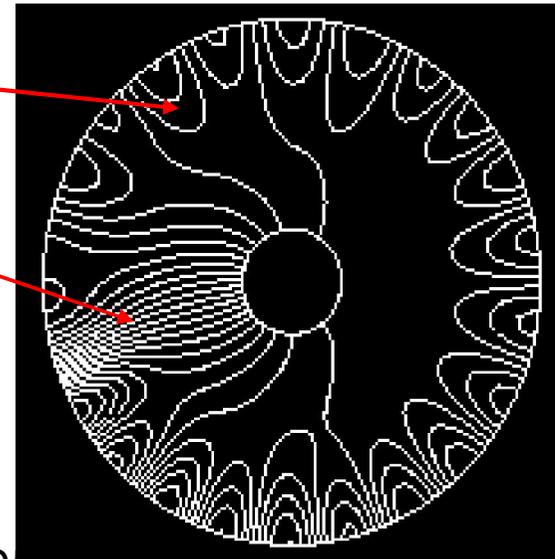
Кольцевой контакт



Структура силовых линий

Излучение

Вихрь



2D уравнение синус Гордона

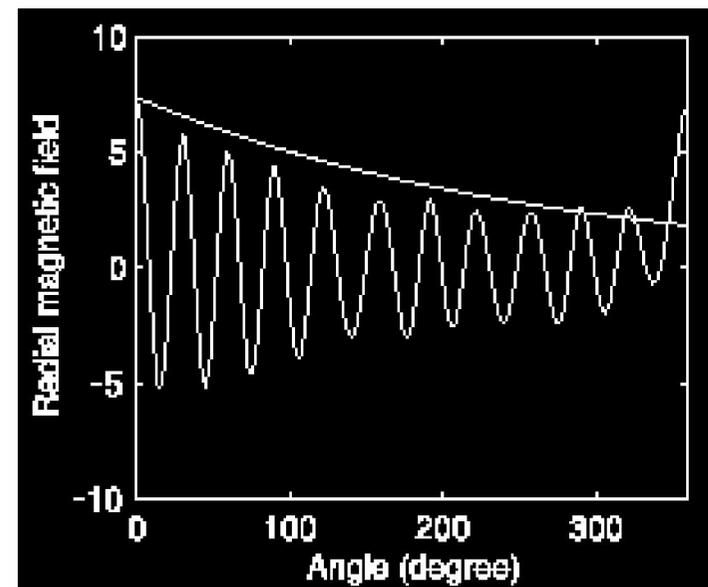
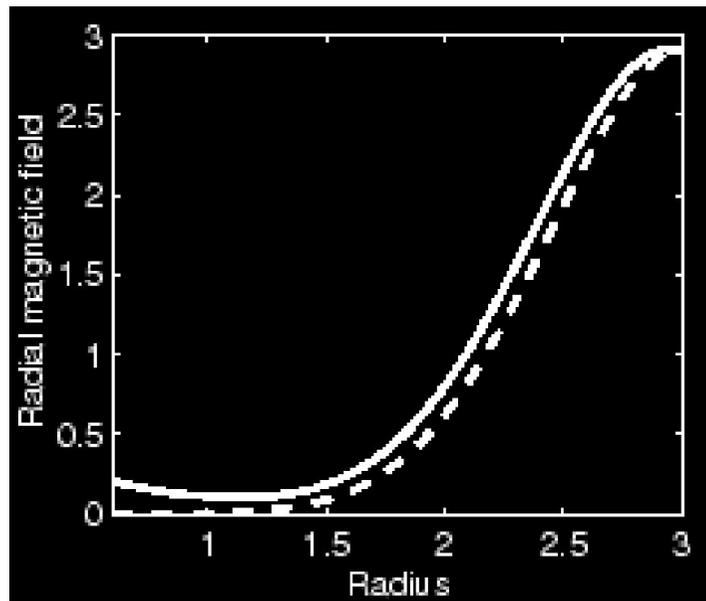
$$\partial_t^2 \varphi + \gamma \partial_t \varphi - r^{-1} \partial_r r \partial_r \varphi + r^{-2} \partial_\theta^2 \varphi + \sin(\varphi + \theta) = j_{ext}$$

Излучение шепчущих мод

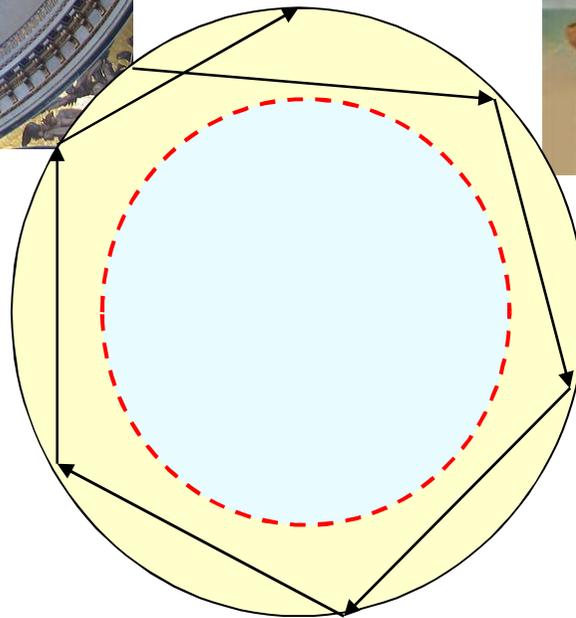


$$\psi_{rad} = U_{k_r,0} J_{k_r}(\lambda_{k_r,0} r) \exp \left\{ ik_r (\Theta - \omega t) + \frac{\gamma(\Theta - \omega t)}{2(\omega - \omega_g)} \right\}$$

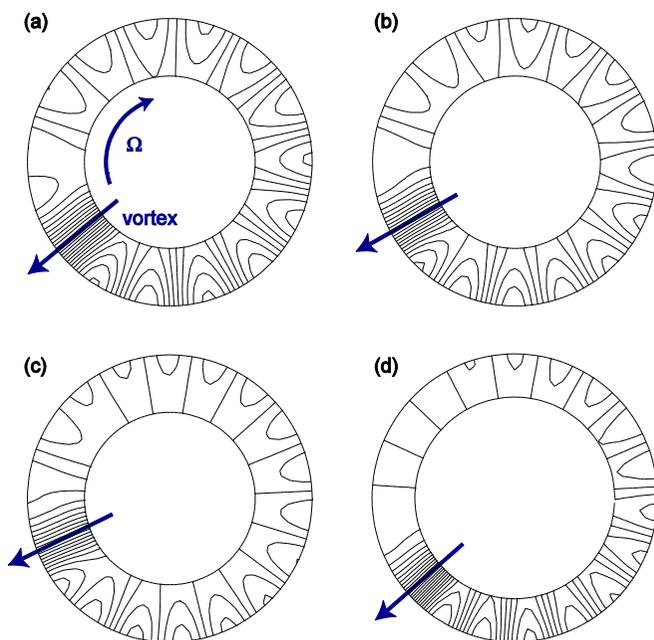
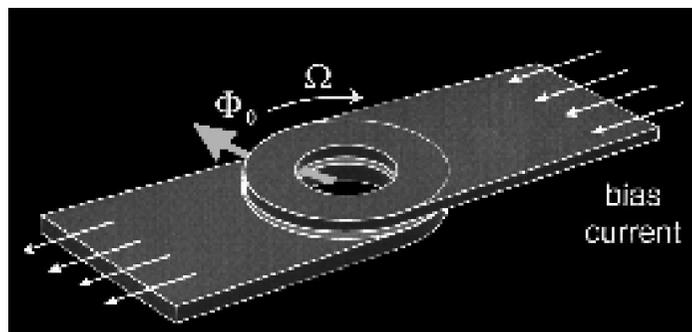
Угловая и радиальная зависимость



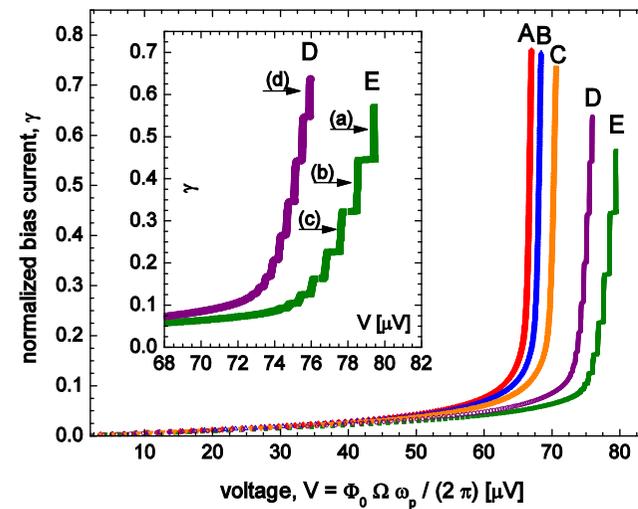
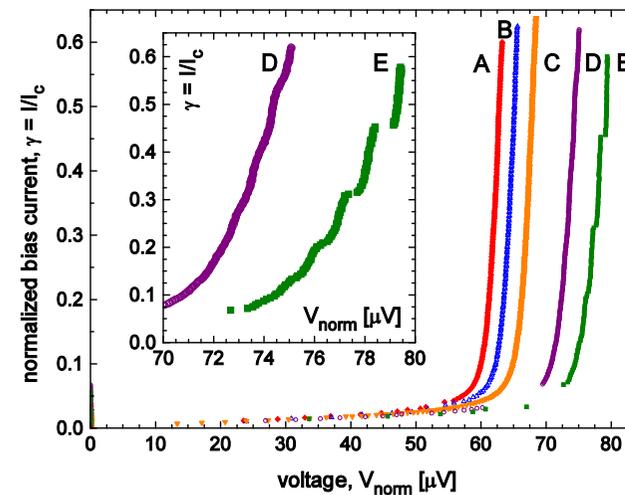
Моды шепчущей галереи



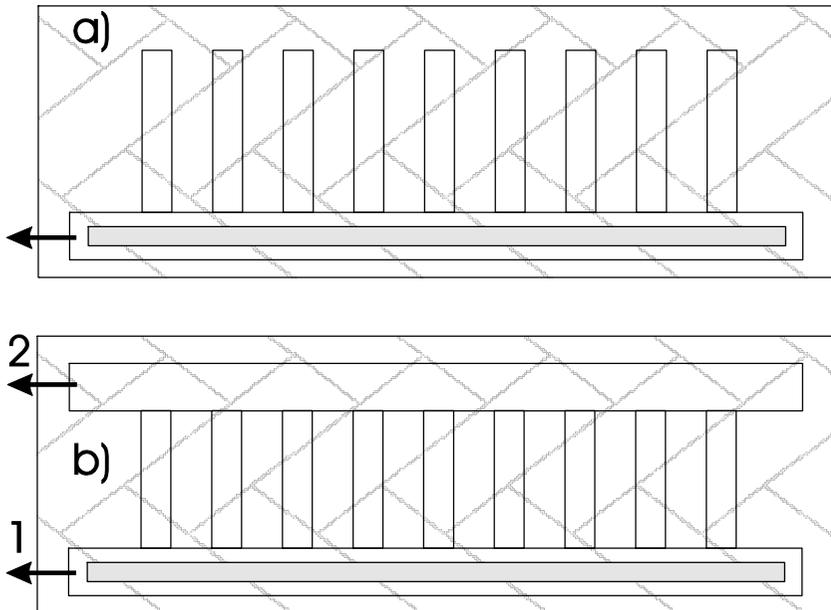
Эксперимент и симуляция



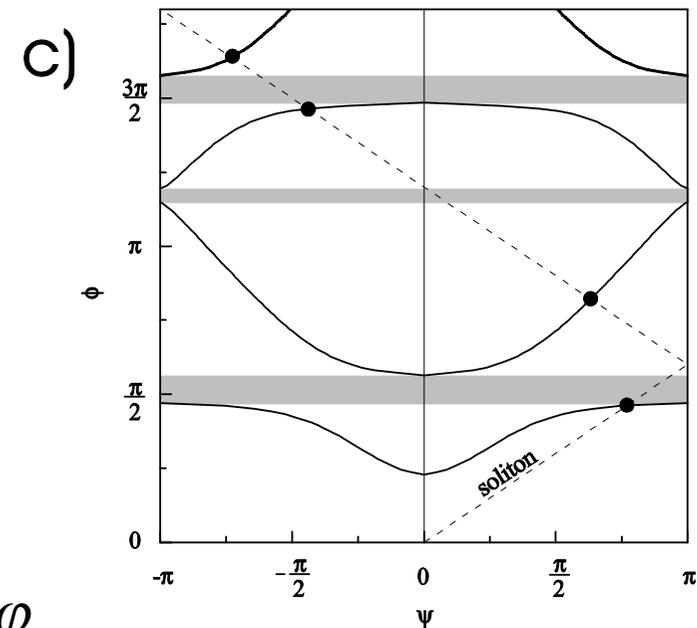
PRL 84,151 (2000)



Искусственные замедляющие структуры



Дисперсия волн в периодической системе



$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = -\alpha \psi_{xx} + \beta \psi_{xx} + j_{ext} - \gamma \varphi_t$$

$$D\psi = -\alpha \varphi_{xx} + \beta \varphi_{xx}$$

В периодически неоднородных структурах есть медленные волны

Периодические джозефсоновские структуры



Разложение поля. Теорема Блоха

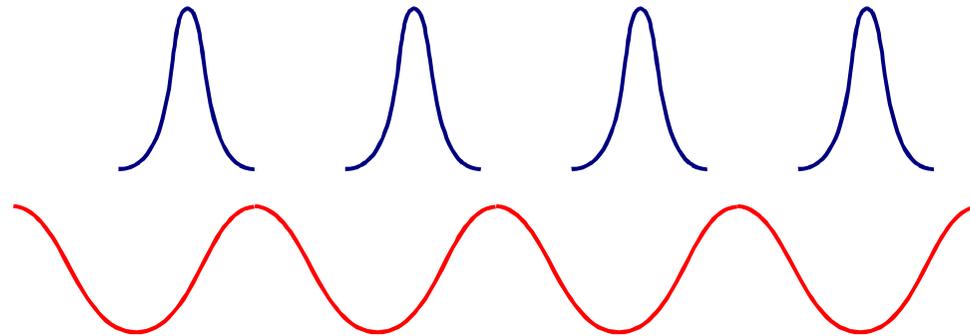
$$\psi = e^{iqx - i\omega t} \Phi(x) = e^{iqx - i\omega t} \sum_j A_j e^{ingx}$$

Фазовая скорость
пространственных гармоник

$$v_{ph} = \frac{\omega}{q + ng}$$



Черенковское излучение цепочек вихрей



Скорость звука

$$s^2 = \frac{\sqrt{\pi} d_0}{2} (1-u^2)^{3/2} \exp\left\{-\frac{d_0}{2\sqrt{1-u^2}}\right\}$$

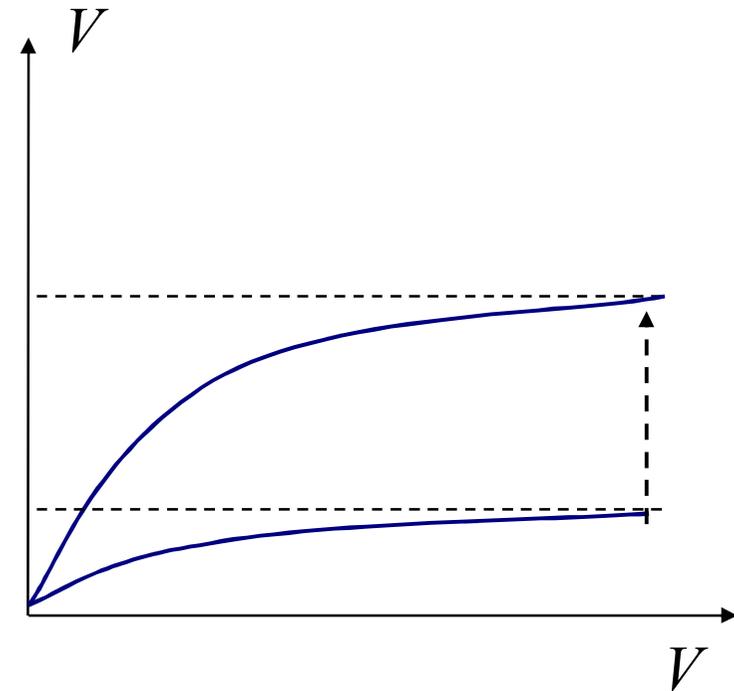
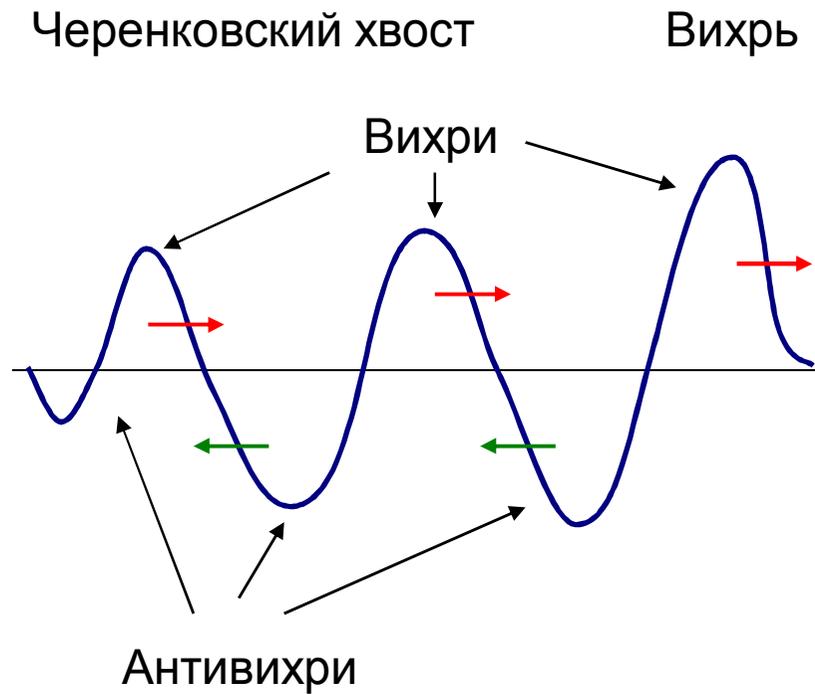
Динамика вихрей и волны

$$\ddot{\xi}_n + \gamma \dot{\xi}_n + s^2 d_0^{-2} (2\xi_n - \xi_{n-1} - \xi_{n+1}) = (1-v^2)^{3/2} \int \psi(x, t) \partial_x \varphi_{sol}^n(x, t) dx$$

$$\mathcal{D}\psi = (\alpha - \beta v^2) \xi_n \partial_x^3 \sum_n \varphi_{sol}^n(x, t)$$

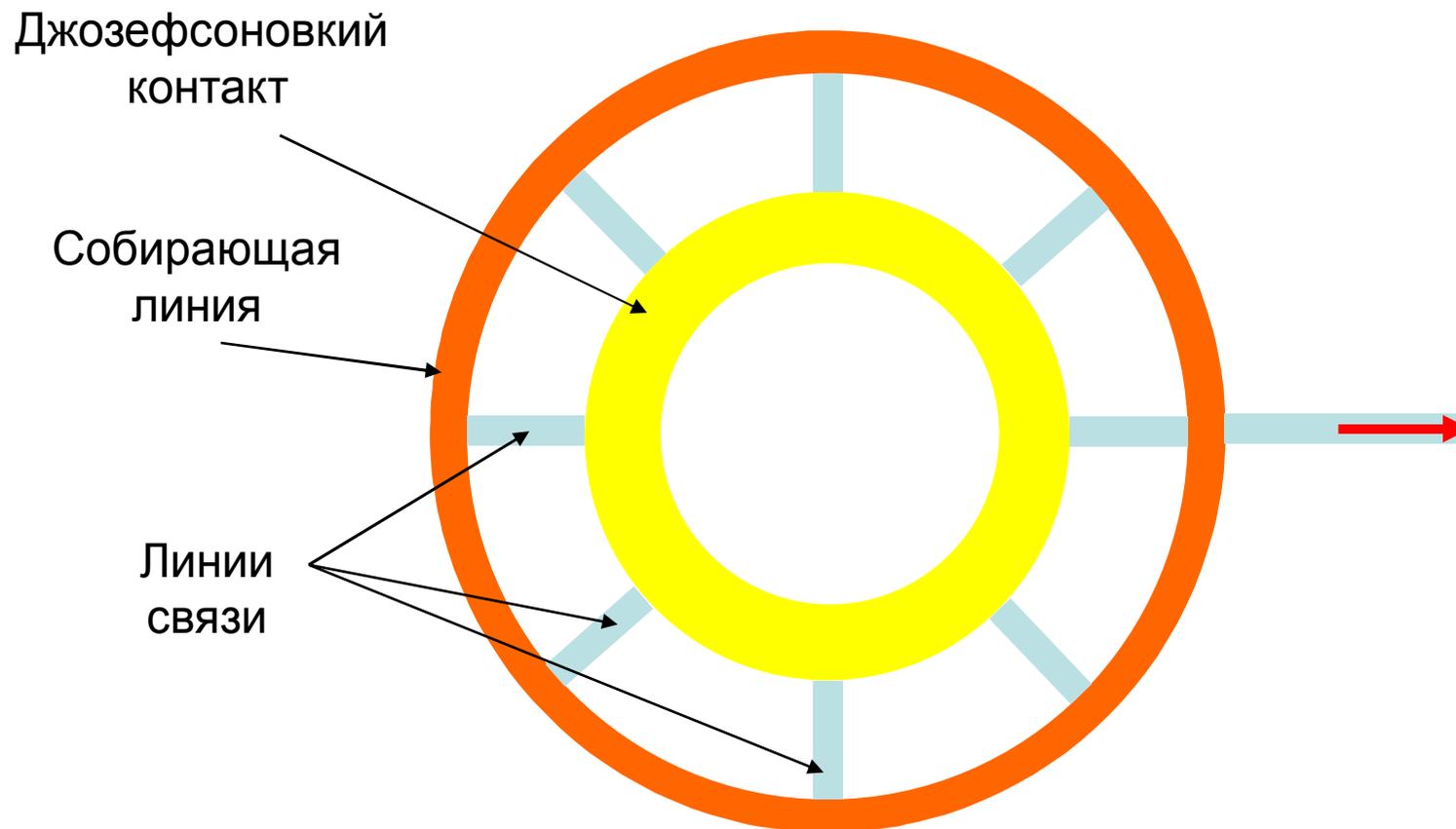
Решетка вихрей подстраивается под волну!

Нелинейная стадия - турбулентность



$$V = \frac{\hbar}{2e} 2\pi \frac{v_{Sw}}{L} (N_v + N_a)$$

Черенковский генератор



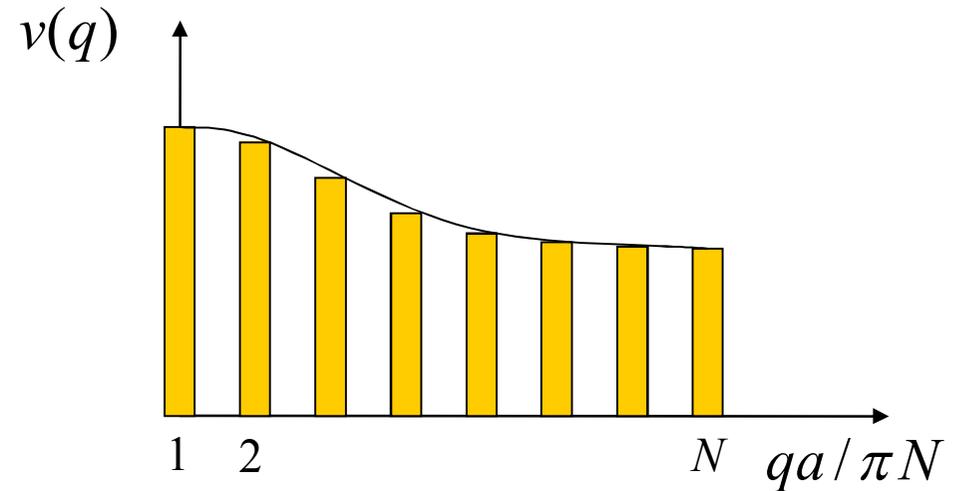
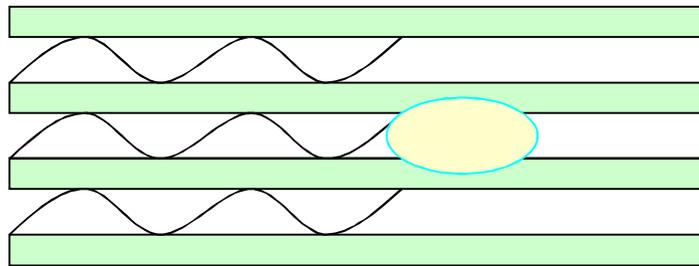
Похоже на магнетрон

Черенковское излучение в слоистых ВТСП



ВТСП с внутренним эффектом Джозефсона

Скорости электромагнитных мод



S. Sakai et al, J. Appl. Phys., 1993
L. N. Bulaevskii, Phys. Rev. B 1994

$$\sum_{m=1}^N K_{mn} \left(\partial_t^2 \theta_m + \gamma \partial_t \theta_m + \sin \theta_m - j_e \right) = \partial_x^2 \theta_n$$

Вихрь возбуждает все поперечные моды!

Черенковское излучение есть, если нарушена Лоренц инвариантность уравнений!

Черенковское излучение других типов волн



- Фононов
- Плазмонов
- Волн Карлссона – Голдмана
- Волн плотности вихрей-возмущений магнитного поля

Но об этих волнах – на следующей моей лекции